

$\mathbb{Q}_p$ 上の根既均質ベクトル空間の相対不変式の 複素中のフーリエ変換について

阪大理 村上 順

序 [J. Igusa] により, p 進体上の根既均質ベクトル空間の相対不変式の複素中のフーリエ変換に対しても [M. Sato - T. Skintani] と同様の結果が示された。そしていくつかの例について実際に P -因子を計算している。ここでは [M. Sato - T. Kimura] の分類での [1], [2], [3], [13], [15] の根既均質ベクトル空間についてフーリエ変換を計算した結果を述べる。

1. 記号 p を奇素数とし, $\mathbb{Q}_p$ を p 進体, $\mathbb{Z}$ をその整数環とする。また, χ を, $\mathbb{Q}_p$ から $\mathbb{C}^\times$ への加法的指標で, $\chi|_{\mathbb{Z}} \equiv 1$, $\chi|_{p^{-1}\mathbb{Z}} \neq 1$ となるものを 1 つ固定し, α を $\mathbb{Q}_p^\times$ から $\mathbb{C}^\times$ への乗法的指標とする。ここで, $\alpha(1) = 0$ と定義することにより, α を $\mathbb{Q}_p$ から $\mathbb{C}$ への写像に拡張しておく。 ω_s は $\omega_s|_{\mathbb{Z}^\times} \equiv 1$, $\omega_s(p) = p^{-s}$ で定まる乗法的指標とし, $\omega_s(\cdot)$ のことを $|\cdot|$ と書く。

(G, V) を $\mathbb{Q}_p$ 上の既約正則根既均質ベクトル空間

とし, f をその相対不変式とする。 V 中の G の open orbits を $Z_1, Z_2, \dots, Z_\ell$ で表わす。 $\check{V}$ を V の dual space とすると, $\check{V}$ も G に関する根元均質ベクトル空間になり, V との間には canonical な同型写像があるので, それを φ とする。このとき, $[u, v]: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ を $[u, v] = \varphi^{-1}(u)v$ で定義すると, これは対称双-次形式となる。 V 上の加法に関する不変測度 $d\mu$ で $\psi([,])$ と $d\mu$ に関するフーリエ変換を2回繰り返すともとにもどるように正規化されたものを1つ固定する。超関数としての $\chi(f(v))$ のフーリエ変換

$$g(\chi)(v) = \int_V \chi(f(v)) \psi([u, v]) d\mu$$

について考える。

2. 定理 (J. Igusa [1]) $v \in Z_i$ に対し

$$g(\chi)(v) = \sigma_i(\chi) \left(\chi_{-1} \omega_{\frac{n}{d}} \right) (f(v))$$

が適当な χ に対して成り立つ。

但し, $n = \dim V$, $d = \deg f$ とする。

(正確な statement は [1] を見て下さい)

以下では, この $\sigma_i(\chi)$ を計算した結果を述べる。

3. $G \times GL_m(\mathbb{Q}_p)$ が $M_m(\mathbb{Q}_p)$ に作用する場合 ([S.-K.] [1])

$M_m(\mathbb{Q}_p)$ 中の $GL_m(\mathbb{Q}_p)$ の open orbit は 唯一つ.

$f = \det$ である。 $v \in Z_1$ に対し.

$$g(x)(v) = \gamma \cdot x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-m}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^m \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x) |x|^{k-1} \psi(x) dx$$

4. $GL_m(\mathbb{Q}_p)$ が $Sym_m(\mathbb{Q}_p)$ (m 次対称行列全体) に作用する場合 ([S.-K.] [2]) ($m \geq 2$)

$f = \det$ である。

v が $\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ 0 & \ddots & \\ & & \delta_m \end{pmatrix}$ $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_m \neq 0$ の λ である orbit

に入る場合.

$$g(x)(v) = \gamma_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-\frac{m+1}{2}}$$

$$\gamma_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} = \frac{x^{-1}(\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_m)}{|\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_m|^{\frac{m+1}{2}}} \prod_{k=1}^m \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x) |x|^{\frac{m-k}{2}} \prod_{j=k+1}^m \mu\left(\frac{\delta_j}{\delta_k} x\right) \left|\frac{\delta_j}{\delta_k}\right|^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{但し. } \mu(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{Q}_p} \psi(x a^2) da^2$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \chi_p(x) + g_2(p) \chi_2(x) + g_2(p) \chi_2 \chi_p(x))$$

そこで $x = u p^k$, $u \in \mathcal{O}^\times$ とすると

$$\chi_p(x) = \begin{cases} 1 & k: \text{偶数} \\ -1 & k: \text{奇数} \end{cases} \quad g_2(p) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod{4} \\ i & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 1 & u \text{ が平方元} \\ -1 & u \text{ が平方元でない。} \end{cases}$$

5. GL_{2m} が Alt_{2m} ($2m$ 次交代行列の全体) に作用する場合 ([S.-K.] [3]) ($m \geq 3$)

open orbit は唯一つで, $f = Pff$ である。

$$g(x)(v) = \gamma \cdot \chi^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-2m+1}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^m \int_{\mathcal{O}_p} \chi(x) |x|^{2k-2} \psi(x) dx$$

6. $Sp_{2n} \times GL_{2m}$ が $M_{2n, 2m}$ に作用する場合 ([S.-K.] [13]) ($n \geq 2m \geq 2$)

open orbit は唯一つ

$$f(v) = Pff(v J v)$$

$$J = \begin{pmatrix} \overset{n}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}} & \overset{n}{\begin{pmatrix} 1 \\ & \ddots \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}} \\ & -1 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(x)(v) = \gamma \chi^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-4n}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^m \int_{\mathcal{O}_p} \chi(x) |x|^{\frac{k-1}{2}} \psi(x) dx \quad \prod_{k=1}^m \int_{\mathcal{O}_p} \chi(x) |x|^{2n-2k+1} \psi(x) dx$$

7. $GO_n \times SL_m$ が $M_{n,m}$ に作用する場合
 ($[S-K][15]$) ($n \geq 3, \frac{n}{2} \leq m \leq 1$)

a). n : odd の場合.

open orbit は 1 個 - 7.

$$f(v) = \det(v Q {}^t v) \quad \text{但し } Q = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,n}$$

GO_n は Q を scalar 倍を除いて不変にするものとする。

$$g(x)(v) = \gamma \cdot x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-n}$$

$$\gamma = \int_{\mathbb{Q}_p^m} \left(\prod_{i=1}^m \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x) |x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu(x \frac{y_j}{y_i}) \psi(x) dx \right)$$

$$\times \prod_{i=1}^m \chi(y_i) |y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i)^{m-i+1} \psi(y_i) dy_1 \cdots dy_m$$

但し $\mu(x)$ の定義は §4 にある。

b). n : even, GO_n : Split の場合.

open orbit は 1 個 - 7.

$$f(v) = \det(v Q {}^t v) \quad Q = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in M_{n,n}$$

GO_n は Q を scalar 倍を除いて不変にするもの。

$$g(x)(v) = \gamma \cdot x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-n}$$

$$\gamma = \int_{\mathbb{Q}_p^m} \prod_{i=1}^m \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x) |x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu(x \frac{y_j}{y_i}) \psi(x) dx$$

$$\times \prod_{i=1}^m \chi(y_i) |y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i)^{m-i} \psi(y_i) dy_1 \cdots dy_m$$

c) n : even GO_n : non-split の場合

$$f(v) = \det({}^t v Q v)$$

$$\delta \in \mathcal{O}^\times \setminus (\mathcal{O}^\times)^2$$

$m \geq 2$ の場合

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ & \delta & 0 & & \\ & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

GO_n は Q を scalar 倍を除いて不変にするもの

orbit は $\frac{n}{2} \cdot m$ とすると,

$$v_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^m \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_m \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}}_m \\ \underbrace{0}_{\frac{n}{2}-m} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

v_1 を含む Z_1 と v_2 を含む Z_2 とがある。

$v \in Z_1$ に対しては

$$g(x)(v) = \gamma_1 x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-n}$$

$$\gamma_1 = x^{-1}(\delta) \cdot \int_{\mathcal{O}_P^{m-1}}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} \int_{\mathcal{O}_P} \chi(x) |x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu\left(x \frac{y_j}{y_i}\right) \psi(x) dx \right)$$

$$\times \prod_{i=1}^{m-1} \chi(y_i) |y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i)^{m-i} \mu(-\delta y_i) \psi(y_i) dy_1 \cdots dy_{m-1}$$

$$\times \int \chi(a) |a|^{\frac{n}{2}} \psi(a) da \int_{\mathcal{O}_P} \chi(\delta - b^2) |\delta - b^2|^{\frac{m-1}{2}} \mu(\delta - b^2)^{m-1} db$$

$v \in Z_2$ に対しては

$$\begin{aligned}
 g(x)(v) &= \gamma_2 \cdot \chi^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-n} \\
 \gamma_2 &= \chi^{-1}(p\delta) p^{n+\frac{m}{2}-1} \int_{\mathbb{Q}_P^{m-1}} \chi(y_1 \dots y_{m-1}) \mu(y_1 \dots y_{m-1}) \chi(x) dx \\
 &\quad \left(\prod_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{Q}_P} \chi(y_i) |y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i) \mu(-\delta y_i) \chi(y_i) dy_i \dots dy_{m-1} \right) \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{Q}_P} \chi(a) |a|^{\frac{n}{2}} \chi(a) da \int_{\mathbb{Q}_P} \chi(\delta - b^2) |\delta - b^2|^{\frac{m-1}{2}} \mu(\delta - b^2)^{m-1} db \\
 \text{但し, } \int_{\mathbb{Q}_P} \chi(\delta - a^2) da &= \frac{\chi(\delta) \int \frac{\chi^{-1}(x)}{|x|} \chi(x) dx}{\int \frac{\chi^{-1}(x)}{|x|^{\frac{3}{2}}} \mu(-\delta^{-1}x) \chi(x) dx}
 \end{aligned}$$

であり, $\mu(x)$ は乗法的指標の和なので, $\mu(\cdot)$ 達の積を展開して各変数ごとにまとめることにより, 上の場合のどれもが, 1変数の p -函数を用いて表わされていることがわかる。

c) で $m=1$ の場合, 複素数に対しては [J. Igusa] で計算されている。一般の場合には, また計算していません。

文献

- [1] J. Igusa, Some results on p -adic complex powers, Amer. J. of Math., 106(1984), 1013-1032.
- [2] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J., 65(1977), 1-155.
- [3] M. Sato and T. Shintani, On zeta-functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math., 100, 1 (1974) 131-170.