

Hermite による 2 つの近似問題と Schlesinger 変換*

(英題 : Two approximation problems by Hermite, and Schlesinger transformations)

眞野 智行 (MANO, Toshiyuki)[†], 津田 照久 (TSUDA, Teruhisa)[‡]

概要

Hermite は、函数の組に対する 2 通りの近似問題を提唱した。この小文では、それらの線形常微分方程式への応用について論ずる。特に 2 つの近似問題の双対性から、ある Schlesinger 変換 (= モノドロミーを保ちながら特性指数をずらす変換) が従うことを見る。また、Painlevé 方程式の研究への有用性についても紹介する。

(英訳 : Hermite studied two different types of rational approximation problems for a tuple of functions. We present their application to the theory of linear differential equations. In particular, we show that the duality between two approximations yields a certain transformation of linear differential equations. We also discuss how they benefit studying Painlevé equations.)

1 Hermite による 2 つの近似問題と Mahler 双対性

$L (\geq 2)$ 個の形式べき級数の組

$$f_0(w), f_1(w), \dots, f_{L-1}(w) \in \mathbb{C}[[w]]$$

について、Hermite は一今日「Hermite-Padé 近似」および「同時 Padé 近似」と呼ばれる 2 通りの有理函数近似を考察した。以下、一般性を失わずに $f_0(0) \neq 0$ を仮定する。非負整数の L 組 $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_{L-1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^L$ を近似の指数 (index) と呼ぶ。

Hermite-Padé 近似 多項式の L 組 $\mathbf{Q}(w) = [Q_0, \dots, Q_{L-1}]$ は次の条件を満たすものとする。

$$(1) \quad \deg Q_i \leq n_i - 1$$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{L-1} f_i Q_i = O(w^{|\mathbf{n}|-1})$$

*この小文は RIMS 研究集会「非線形離散可積分系の新展開」(2013 年 9 月 2 日~4 日)における講演を基に内容を再構成したものである。尚、本研究は JSPS 科研費 25800082 および 25870234 の助成を受けて行われた。

[†]琉球大学理学部数理科学科 (Department of Mathematical Sciences, University of the Ryukyus)

[‡]一橋大学大学院経済学研究科 (Department of Economics, Hitotsubashi University)

Received January 13, 2014. Revised May 3, 2014.

このとき (1) より未知係数は合計 $\sum_{i=0}^{L-1} n_i = |\mathbf{n}|$ 個であり, 一方 (2) より係数に対する (斉次) 線形方程式は $|\mathbf{n}| - 1$ 本ある. 従って, 適当な条件の下, 近似多項式 $\mathbf{Q}(w)$ は定数倍を法として一意のと分かる. 実際, Cramer の公式によって, 近似多項式は行列式を用いて明示可能である.

同時 Padé 近似 多項式の L 組 $\mathbf{P}(w) = {}^T[P_0, \dots, P_{L-1}]$ は次の条件を満たすものとする.

$$\begin{aligned} (3) \quad & \deg P_i \leq |\mathbf{n}| - n_i \\ (4) \quad & f_0 P_i - f_i P_0 = O(w^{|\mathbf{n}|+1}), \quad i \neq 0 \end{aligned}$$

このとき $L(|\mathbf{n}| + 1) - |\mathbf{n}|$ 個の未知係数に対して, $(L - 1)(|\mathbf{n}| + 1)$ 個の線形方程式があるので, やはり近似多項式 $\mathbf{P}(w)$ は定数倍を法として一意である.

注. $L = 2$ の場合, Hermite-Padé 近似と同時 Padé 近似はともに「普通の Padé 近似」に帰着する. 実際, 形式べき級数 $\psi \in \mathbb{C}[[w]]$ に対する (m, n) -Padé 近似:

$$\begin{aligned} \deg p &\leq m, \quad \deg q \leq n \\ p - \psi q &= O(w^{m+n+1}) \end{aligned}$$

は組 $\{1, \psi(w) = f_1/f_0\}$ に対する近似問題とみなせる.

一見して無関係に思える 2 つの近似問題には, 実は深い繋がりがあった. Mahler によるこの事実の発見は, Hermite の近似問題の提唱から 50 年後のことである ([1, 4] 等参照).

定理 1 (Mahler 双対性). 指数 $\mathbf{n}$ に対する近似多項式を $\mathbf{Q}^{\mathbf{n}}(w)$, $\mathbf{P}^{\mathbf{n}}(w)$ と記す. また $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^L$ とおく. このとき

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_0} \\ \mathbf{Q}^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_{L-1}} \end{bmatrix} [\mathbf{P}^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_0}, \mathbf{P}^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1}, \dots, \mathbf{P}^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_{L-1}}] = w^{|\mathbf{n}|} \cdot D$$

が成り立つ. 但し D は w に依らない対角行列である. 従って, 特に対角部分 $Q_i^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}(w)$, $P_i^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_i}(w)$ をモニックに選べば $D = I$ (単位行列) とできる.

証明 左辺の (i, j) 成分 $M_{ij} = \sum_{k=0}^{L-1} Q_k^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} P_k^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}$ の次数は

$$(5) \quad \deg M_{ij} \leq \begin{cases} |\mathbf{n}| - 1 & (i \neq j) \\ |\mathbf{n}| & (i = j) \end{cases}$$

である。一方,

$$\begin{aligned}
 f_0 M_{ij} &= f_0 Q_0^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} P_0^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j} + \sum_{k \neq 0} Q_k^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} \underbrace{f_0 P_k^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}}_{\parallel} \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad f_k P_0^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j} + O(w^{|\mathbf{n}|}) \quad \text{「同時 Padé 近似」} \\
 &= P_0^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j} \underbrace{\sum_{k=0}^{L-1} f_k Q_k^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}}_{\parallel} + O(w^{|\mathbf{n}|}) \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad O(w^{|\mathbf{n}|}) \quad \text{「Hermite-Padé 近似」} \\
 &= O(w^{|\mathbf{n}|})
 \end{aligned}$$

を得る。従って $1/f_0 \in \mathbb{C}[[w]]$ に注意すると $M_{ij} = O(w^{|\mathbf{n}|})$ である。次数の上からの評価 (5) と合わせて, M_{ij} の対角成分は w の $|\mathbf{n}|$ 次の単項式で, 非対角成分は全て 0 と分かる。 $\square$

2 Schlesinger 変換の構成

L 連立 1 階線形常微分方程式

$$(F) \quad \frac{dy}{dz} = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{A_i}{z - s_i} y \quad (A_i : L \times L \text{ 行列})$$

は複素射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に $N+3$ 個の確定特異点

$$S = \{s_0 = 1, s_1, \dots, s_N, s_{N+1} = 0, s_{N+2} = \infty\}$$

を持つ **Fuchs** 型方程式である。以下, $z=0$ と $z=\infty$ での留数行列 A_{N+1} と $A_{N+2} = -\sum_{i=0}^{N+1} A_i$ は, それぞれ上三角行列と下三角行列とする。この規格化¹の下, (F) の解の基本系 $Y = Y(z)$ は次のように選ぶことができる。

$$\begin{aligned}
 z=0 \text{ の近傍で } Y &= \left(\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + O(z) \right) \cdot \text{diag } z^{\alpha_i} \\
 z=\infty \text{ の近傍で } Y &= \Phi(w) \cdot \text{diag } w^{\beta_i} \cdot C, \quad w = \frac{1}{z}
 \end{aligned}$$

但し $z=0, z=\infty$ における特性指数 (留数行列の固有値) $\{\alpha_i\}_{i=0}^{L-1}$ と $\{\beta_i\}_{i=0}^{L-1}$ には, それぞれ整数差がないものと仮定した。また C は可逆な定数行列で, $\Phi(w)$ は

$$\Phi(w) = \begin{bmatrix} * & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \dots & * \end{bmatrix} + O(w), \quad \text{対角成分} \neq 0$$

¹無限遠点 $z=\infty$ の留数行列 A_{N+2} を対角化するのが通例だが, ここでは $z=0$ と $z=\infty$ を対等に扱う規格化を採用した。

の形である。べき級数行列 $\Phi(w)$ の 1 列目を $\mathbf{f} = {}^T[f_0, \dots, f_{L-1}]$ とおく。このとき $f_0(0) \neq 0$ であることに注意する。

$Y(z)$ のモノドロミー²を変えずに特性指数を整数分ずらす変換を **Schlesinger 変換**という。任意の Schlesinger 変換は, $Y(z)$ の展開係数から代数的に計算可能な有理函数行列 $R(z)$ の左作用: $Y \mapsto \hat{Y} = RY$ として記述される ([6, 11] 参照)。実は Schlesinger 変換の具体的な構成問題は「有理函数近似」と密接に関係している。ここでは, Hermite の近似問題から従うある特別な Schlesinger 変換—無限遠点 $z = \infty$ の特性指数を $(n(L-1), -n, \dots, -n)$ だけずらす変換—について考えよう。

Hermite-Padé 型の近似多項式 多項式 $Q_j^{(i)}(w) \in \mathbb{C}[w]$ を $\deg Q_j^{(i)} \leq n-1 + \delta_{i,j}$ かつ

$$(6) \quad Q_0^{(i)}f_0 + \dots + Q_i^{(i)}f_i + wQ_{i+1}^{(i)}f_{i+1} + \dots + wQ_{L-1}^{(i)}f_{L-1} = O(w^{nL})$$

によって定める³。各 $i = 0, 1, \dots, L-1$ について, 行ベクトル

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(i)} = [Q_0^{(i)}, \dots, Q_i^{(i)}, wQ_{i+1}^{(i)}, \dots, wQ_{L-1}^{(i)}]$$

を考える。合計 $nL+1$ 個の未知係数に対し nL 本の線形方程式があるので, $\tilde{\mathbf{Q}}^{(i)}$ は定数倍を除いて一意的である。

同時 Padé 型の近似多項式 多項式 $P_i^{(j)}(w) \in \mathbb{C}[w]$ を $\deg P_i^{(j)} \leq n(L-1) - 1 + \delta_{i,j}$ かつ

$$\begin{aligned} \text{(i) } j=0 \text{ のとき} \quad & f_0P_i^{(0)} - f_iP_0^{(0)} = O(w^{nL}), \quad i \neq 0 \\ \text{(ii) } j \neq 0 \text{ のとき} \quad & f_0P_i^{(j)} - f_iP_0^{(j)} = O(w^{nL}), \quad 1 \leq i \leq j-1 \\ & f_0P_i^{(j)} - f_iwP_0^{(j)} = O(w^{nL}), \quad j \leq i \leq L-1 \end{aligned}$$

によって定める。各 $j = 0, 1, \dots, L-1$ について, 列ベクトル

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(j)} = {}^T[wP_0^{(j)}, \dots, wP_{j-1}^{(j)}, P_j^{(j)}, \dots, P_{L-1}^{(j)}]$$

を考える。合計 $nL(L-1)+1$ 個の未知係数に対し $nL(L-1)$ 本の線形方程式があるので, $\tilde{\mathbf{P}}^{(j)}$ は定数倍を除いて一意的である。

さて, $\tilde{\mathbf{Q}}^{(i)}$ と $\tilde{\mathbf{P}}^{(j)}$ の正規化を「対角部分」 $Q_i^{(i)}(w)$, $P_j^{(j)}(w)$ がモニックになるように選ぶ。このとき, 2つの L 次正方行列

$$Q(w) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{(0)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{(L-1)} \end{bmatrix}, \quad P(w) = [\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}, \dots, \tilde{\mathbf{P}}^{(L-1)}]$$

²正則点 $p \in X = \mathbb{P}^1 \setminus S$ を始点とする閉曲線に沿った解析接続は, (F) の解の基本系に対する線形変換を引き起こす。こうして得られる基本群 $\pi_1(X, p)$ の L 次元表現 (の共役類) のことを (F) のモノドロミーと呼ぶ。

³構成より $Q_0^{(0)}(w)$ は定数項を持たないことを注意しておく。

の間に

$$(7) \quad Q(w)P(w) = w^{nL} \cdot I \quad \text{「Mahler 双対性の変奏」}$$

が成り立つ。

命題 2. 行列 $R(z) = z^n Q(1/z)$ について

$$(i) \ R(z)^{-1} = z^{n(L-1)} P(1/z), \quad (ii) \ \det R(z) = 1$$

証明 (i) は (7) より明らか。 (ii) については、定義から R と R^{-1} はともに

$$\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + O(z)$$

の形⁴ゆえ、 $\det R = \text{定数} = 1$ が従う。 □

Hermite-Padé 近似 (6) より $Rf = O(w^{n(L-1)})$ である。さらに R は定義より

$$R = w^{-n} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ * & * & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} + O(w)$$

の形であることに気をつけると、結局

$$R\Phi(w) = \hat{\Phi}(w) \cdot \text{diag} [w^{n(L-1)}, w^{-n}, \dots, w^{-n}] \quad (\hat{\Phi} \text{ は } \Phi \text{ と同じ形})$$

が分かる。

定理 3. 線形変換 $Y \mapsto \hat{Y} = R(z)Y$ は $z = \infty$ の特性指数を $(n(L-1), -n, \dots, -n)$ ずらすような Schlesinger 変換である。

Fuchs 型方程式 (F) の係数 $A(z) = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{A_i}{z - s_i}$ は、Schlesinger 変換によって

$$A \mapsto \hat{A} = RAR^{-1} + \frac{dR}{dz} R^{-1}$$

と変換される。ここで R, R^{-1} は z の多項式ゆえ、 $\hat{A}$ は A と同様 $z \in S$ に 1 位の極を持つ他は正則な有理函数である。即ち Mahler 双対性は $\hat{Y} = R(z)Y$ の満たす微分方程式に見かけの特異点が生じないことを保証している。

⁴ R と R^{-1} は z について各々 n 次と $n(L-1)$ 次の多項式行列である。

注. 階数 $L = 2$ の場合, Padé 近似を用いた Schlesinger 変換の構成は論文 [7] で為された。次節に見るように Padé 近似の理論と Painlevé 方程式は自然に関係しているが, この方面の先駆的な研究として Chudnovsky 兄弟による一連の仕事がある ([2, 3] 等参照)。また Yamada による「Padé 法」は, 特殊解や Lax 形式を初等函数の Padé 近似を通して求める処方箋で, 古典的な Painlevé 微分方程式のみならず離散版をも含んだ形で発展している ([5, 10, 14] 等参照)。

3 Painlevé 方程式 (=モノドロミー保存変形) への応用

定理 4 (古典的). Fuchs 型線形常微分方程式 (F) のモノドロミーが特異点の位置 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$ に依らない為の必要十分条件は, z についての有理函数 $B_i(z)$ が存在して, 変形方程式

$$(D) \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s_i} = B_i \mathbf{y}$$

が成り立つことである。

有理函数 $B_i(z)$ は A_i を用いて具体的に表される。実際, 第 2 節のような規格化の下,

$$B_i = \frac{A_i}{s_i - z} + \Delta_i \quad (\Delta_i \text{ は } -A_i/s_i \text{ の狭義下三角部分})$$

とできる⁵。尚, B_i には $\mathbf{s}$ のみに依るスカラー行列を足し引きする程度の自由度が残ることを注意しておく。(F) と (D) の完全積分可能条件

$$\frac{\partial A}{\partial s_i} - \frac{\partial B_i}{\partial z} + [A, B_i] = 0$$

から得られる, 未知函数 A_i に対する変数 $\mathbf{s}$ についての非線形微分方程式系をモノドロミー保存変形という。最初の非自明な例は $(L, N) = (2, 1)$ の場合で, Painlevé VI 型方程式

$$(P_{VI}) \quad \frac{d^2 q}{ds^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-s} \right) \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{q-s} \right) \frac{dq}{ds} \\ + \frac{q(q-1)(q-s)}{s^2(s-1)^2} \left(a + b \frac{s}{q^2} + c \frac{s-1}{(q-1)^2} + d \frac{s(s-1)}{(q-s)^2} \right)$$

に帰着する。

次に Fuchs 型方程式 (F) の解と係数 A_i の関係について調べよう。無限遠点 $z = \infty$ ($\Leftrightarrow w = 0$) における解のべき級数展開

$$Y_\infty = \Phi(w) \cdot \text{diag } w^{\beta_i}, \quad \Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n w^n$$

⁵無限遠点 $z = \infty$ の留数行列 A_{N+2} を対角行列にとる規格化の下では, $B_i = A_i/(s_i - z)$ とできる。

の係数 Φ_n の各成分は, Frobenius の方法により (F) の $z = \infty$ での留数行列 $A_{N+2} = -\sum_{i=0}^{N+1} A_i$ の成分の多項式として求まる⁶。逆に, 解 Y_∞ を (F) に代入することから

$$(8) \quad A_{N+2} = \Phi_0 \cdot \text{diag } \beta_i \cdot \Phi_0^{-1}$$

が従う⁷。 $\det \Phi_0 \neq 0$ を思い出せば, A_{N+2} は解の展開係数の多項式と分かる。

この「(F) の解と係数の関係」と第 2 節で見た「有理函数近似による Schlesinger 変換の構成」から, Painlevé 方程式の解の行列式公式が自然に導かれる。詳細は論文 [8] に譲るが, 近似問題の剰余—(6) 式の右辺—の展開係数が $\Phi(w)$ の展開係数の **(block-)Toeplitz** 行列式の比で与えられることがその原理である。(F) の係数 A_i は Painlevé 方程式の従属変数に相当する。例えば A_{N+2} は, (8) 式のように $\Phi(w)$ の先頭項 Φ_0 のみで表されている。その Schlesinger 変換による像 $\hat{A}_i$ は, やはり「近似問題の剰余 $\hat{\Phi}(w)$ 」の展開係数によって表されるというわけである。

ところで, Painlevé 方程式は (パラメタが特別な場合) 超幾何函数で書かれる特殊解を許す。このとき実は, 対応する Fuchs 型方程式 (F) の解は Stieltjes 積分の形で与えられる。上述した Painlevé 方程式の解の行列式公式は, Vandermonde 行列式と差積の関係を経由することで, 特殊解の「繰り返し超幾何積分」による表示を導く。以下, 具体例について結果の概略を述べて, この小文を終えたい。

Painlevé 方程式と繰り返し超幾何積分 多時間 Hamilton 系 [13]

$$(\mathcal{H}_{L,N}) \quad \frac{\partial q_n^{(i)}}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_n^{(i)}}, \quad \frac{\partial p_n^{(i)}}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_n^{(i)}} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq i, j \leq N \\ 1 \leq n \leq L-1 \end{array} \right)$$

を考えよう。但し Hamilton 関数 H_i は

$$s_i H_i = \sum_{n=0}^{L-1} e_n q_n^{(i)} p_n^{(i)} + \sum_{j=0}^N \sum_{0 \leq m < n \leq L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)} + \sum_{j=0}^N \frac{s_j}{s_i - s_j} \sum_{m,n=0}^{L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)}$$

で定まる正準変数についての多項式である。ここで

$$s_0 = q_n^{(0)} = q_0^{(i)} = 1, \quad p_n^{(0)} = \kappa_n - \sum_{i=1}^N q_n^{(i)} p_n^{(i)}, \quad p_0^{(i)} = \theta_i - \sum_{n=1}^{L-1} q_n^{(i)} p_n^{(i)}$$

⁶Cramer の公式で解けば, 行列式を用いて明示可能である (Noumi-Yamada の公式, [9] 参照)。

⁷他にも (F) からは

$$\sum_{i=0}^N s_i A_i = \left(-\Phi_1 \cdot \text{diag } (\beta_i + 1) + \Phi_0 \cdot \text{diag } \beta_i \cdot \Phi_0^{-1} \Phi_1 \right) \Phi_0^{-1}$$

また, 変形方程式 (D) からは

$$A_i = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial s_i} \Phi_0^{-1} \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_i} \right) \Phi_0^{-1} \quad (i = 1, \dots, N)$$

等が得られる。

とした。つまり H_i は q と p に関して各々3次と2次の多項式である。 $\mathcal{H}_{L,N}$ の正体は, Fuchs 型方程式 (F) において「 $N+3$ 個の確定特異点のうち $N+1$ 個の近傍で $L-1$ 次元分の正則解を持つ」場合のモノドロミー保存変形に他ならない⁸。特に $L=2$ の場合, $\mathcal{H}_{L,N}$ は Garnier 系に等価であり, さらに $N=1$ とすると P_{VI} の Hamilton 系表示が再現される。

Hamilton 系 $\mathcal{H}_{L,N}$ の初期値の空間は一般に複雑な代数多様体であるが, 定数パラメタが特別な場合, ちょうど半分の次元の射影空間 $\mathbb{P}^{N(L-1)}$ の点によって径数づけられる特殊解の族が存在する。実際, $\mathcal{H}_{L,N}$ は超幾何函数 [12]

$$\begin{aligned} F_{L,N}(\mathbf{s}) &= \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\alpha_1)_{|\mathbf{m}|} \cdots (\alpha_{L-1})_{|\mathbf{m}|} (\beta_1)_{m_1} \cdots (\beta_N)_{m_N}}{(\gamma_1)_{|\mathbf{m}|} \cdots (\gamma_{L-1})_{|\mathbf{m}|} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_N}} \mathbf{s}^{\mathbf{m}} \\ &= \prod_{k=1}^{L-1} \frac{\Gamma(\gamma_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\gamma_k - \alpha_k)} \times \int_{\sigma} U(\mathbf{t}) \frac{dt_1 \cdots dt_{L-1}}{\prod_{k=1}^{L-1} (t_{k-1} - t_k)} \quad \text{「Euler 型積分表示」} \end{aligned}$$

で書かれる特殊解を持つことが分かる。但し, 多重指数の記法 $\mathbf{s}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^N s_i^{m_i}$, $|\mathbf{m}| = \sum_{i=1}^N m_i$, 及び Pochhammer の記号 $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ を用いた。また Euler 型積分表示において, 被積分函数は

$$U(\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{L-1} t_k^{\alpha_k - \gamma_{k+1}} (t_{k-1} - t_k)^{\gamma_k - \alpha_k} \prod_{i=1}^N (1 - s_i t_{L-1})^{-\beta_i}$$

なる多価函数で, 積分域は $L-1$ -単体 $\sigma = \{0 \leq t_{L-1} \leq \cdots \leq t_2 \leq t_1 \leq t_0 = 1\} \subset \mathbb{R}^{L-1}$ である。尚, 次元の勘定は次表の通りである。

Hamilton 系 $\mathcal{H}_{L,N}$	相空間の次元 = $2N(L-1)$ 定数パラメタは $2L+N-1$ 個
$F_{L,N}$ の超幾何系	階数 = $N(L-1)+1$ 定数パラメタは $2L+N-2$ 個

対応する Fuchs 型方程式 (F) の解は次のような Stieltjes 積分

$$f_0(w) = 1, \quad f_i(w) = \int \frac{d\mu_i(t_{L-1})}{1 - wt_{L-1}} \quad (i = 1, \dots, L-1)$$

で与えられる。但し, 測度を

$$d\mu_i(t_{L-1}) = \left(\int \frac{\prod_{k=1}^{L-1} s_k^{\beta_k}}{\prod_{k \neq i} (t_{k-1} - t_k)} U(\mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_{L-2} \right) dt_{L-1}$$

と定めた。即ち $f_i(w)$ の展開係数には, 超幾何函数 $F_{L,N}$ (のパラメタをずらしたもの) が並んでいる。

⁸定数パラメタ $(e, \kappa, \theta) = (e_0, \dots, e_{L-1}, \kappa_0, \dots, \kappa_{L-1}, \theta_0, \dots, \theta_N)$ は (F) の特異点における特性指数に対応している。2つの関係式

$$\sum_{n=0}^{L-1} e_n = \frac{L-1}{2}, \quad \sum_{n=0}^{L-1} \kappa_n = \sum_{i=0}^N \theta_i$$

が付随するので, $\mathcal{H}_{L,N}$ の含む定数パラメタは正味 $2L+N-1$ 個である。

さて、非負整数の $L-1$ 組 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_{L-1})$ に対し

$$D(\mathbf{k}) = \prod_{a=1}^{L-1} \prod_{\substack{b,c=1 \\ b>c}}^{k_a} (t_{a,b} - t_{a,c}) \prod_{(a,b)>(c,d)} (t_{a,b} - t_{c,d}) \quad \text{「差積もどき」}$$

$$M(\mathbf{k}) = \prod_{a=1}^{L-1} \frac{\prod_{b=1}^{k_a} d\mu_a(t_{a,b})}{k_a!} \quad \text{「直積測度」}$$

を導入しよう。次の定理は、解の行列式公式と Vandermonde 行列式による計算の帰結である。

定理 5 ([8]). Hamilton 系 $\mathcal{H}_{L,N}$ は繰り返し超幾何積分

$$I(\mathbf{k}) = \int D(\mathbf{k}) M(\mathbf{k})$$

で書かれる特殊解を持つ。

参考文献

- [1] Baker, G., Graves-Morris, P.: Padé approximants, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- [2] Chudnovsky, D.V., Chudnovsky, G.V.: Bäcklund transformations for linear differential equations and Padé approximations. I. J. Math. Pures Appl. **61**, 1–16 (1982)
- [3] Chudnovsky, D.V., Chudnovsky, G.V.: Explicit continued fractions and quantum gravity. Acta Appl. Math. **36**, 167–185 (1994)
- [4] Coates, J.: On the algebraic approximation of functions. I. Indag. Math. **28**, 421–434 (1966)
- [5] Ikawa, Y.: Hypergeometric solutions for the q -Painlevé equation of type $E_6^{(1)}$ by the Padé method. Lett. Math. Phys. **103**, 743–763 (2013)
- [6] Jimbo, M., Miwa, T.: Monodromy perserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II. Physica D **2**, 407–448 (1981)
- [7] Mano, T.: Determinant formula for solutions of the Garnier system and Padé approximation. J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 135206 (2012)
- [8] Mano, T., Tsuda, T.: Hermite-Padé approximation, isomonodromic deformation and hypergeometric integral. (in preparation)
- [9] 野海正俊: 『パウルヴェ方程式—対称性からの入門』, 朝倉書店 (2000)
- [10] Noumi, M., Tsujimoto, S., Yamada, Y.: Padé interpolation for elliptic Painlevé equation. In: Iohara, K., Morier-Genoud, S., Rémy, B., (eds.) Symmetries, Integrable Systems and Representations, pp. 463–482. Springer, London (2013)
- [11] Schlesinger, L.: Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten. J. reine angew. Math. **141**, 96–145 (1912)
- [12] Tsuda, T.: Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type. Quart. J. Math. **63**, 489–505 (2012)

- [13] Tsuda, T.: UC hierarchy and monodromy preserving deformation. *J. reine angew. Math.* **690**, 1–34 (2014)
- [14] Yamada, Y.: Padé method to Painlevé equations. *Funkcial. Ekvac.* **52**, 83–92 (2009)