

非線型非縮小半群について

神戸大 理 山 田 直 記

0. 序

非線型半群論は従来, 縮小半群を与える作用素 (accretive or dissipative operator) を研究の対象としてきた. 空間変数に関して Lipschitz の条件; $\|G(t)x - G(t)y\| \leq M \|x - y\|$, を満たす非線型半群 $G(t)$ を生成する問題はあまり取扱われなかったように思われる. M. Iannelli は R -differentiable operator の概念を導入してこのような半群 $G(t)$ を構成した. 今, 彼の結果を述べ, それに関連した一結果を述べる.

1. R -differentiable operators

M. Iannelli の取扱った作用素は次のようなものである. 以下 X は Banach 空間とする. 作用素 $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ は, 次の条件を満たすとする: $A0 = 0$, すべての $\lambda > 0$ に対して $R(I + \lambda A) = X$, かつすべての $x, y \in X$ に対して

$$\|(I + \lambda A)^{-1}x - (I + \lambda A)^{-1}y\| \leq M \|x - y\| \quad (M \geq 1).$$

$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ が X の各点で Fréchet 微分可能であるとする.

$x \in D(A)$ に対して, $F(\lambda)$ で $x + \lambda Ax$ における J_λ の Fréchet 微分 ($J'_\lambda[x + \lambda Ax]$) を表わす. $F(\lambda)$ は X の有界線型作用素で "first resolvent equation"; $\lambda F(\lambda) - \mu F(\mu) = (\lambda - \mu) F(\lambda) F(\mu)$, を満たすことがわかる. 一般に first resolvent equation を満たす線型作用素に対して, それを resolvent とするような線型作用素が存在することが知られているので, $F(\lambda) = (I + \lambda A[x])^{-1}$ となる線型作用素 $A[x]$ が定義される.

定義 1.1. 上の様な作用素 A を R -differentiable operator と呼び, このとき $A[x]$ を $x \in D(A)$ での A の R -derivative という.

2. M. Iannelli の結果

比較のために M. Iannelli の結果を述べる.

定理 2.1. ([4], Theorem 3.1) A を R -differentiable operator とし, R -derivative $A[x]$ について

(S) 任意有限個の $\{x_1, \dots, x_n\} \subset D(A)$ と $\lambda > 0$ に対して

$$\left\| \prod_{i=1}^n (I + \lambda A[x_i])^{-1} \right\| \leq M$$

とするならば, $x \in \overline{D(A)}$ に対して

$$G(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + \frac{t}{n} A)^{-n} x$$

が存在して, 次を満たす.

- (i) $G(t)G(s) = G(t+s), \quad G(0) = I,$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} G(t)x = x \quad x \in \overline{D(A)},$
- (iii) $\|G(t)x - G(t)y\| \leq M\|x - y\| \quad x, y \in \overline{D(A)}.$

注意 2.2. A が稠密な定義域をもつ閉線型作用素の場合には, すべての $x \in D(A)$ に対し $A[x] = A$ であるから, 上記の条件(S)は Hille-Yosida の定理の仮定; $\|(I + \lambda A)^{-n}\| \leq M,$ に相当する.

定理 2.3. ([3], Theorem 5.1) A は R -differentiable で, R -derivative $A'[x]$ は次の条件を満たすとする.

- (S')
 - mapping $x \mapsto J_\lambda'[x]$ は強連続,
 - 任意有限個の $\{x_1, \dots, x_n\} \subset D(A)$ と $\lambda > 0$ に対して

$$\left\| \prod_{i=1}^n (I + \lambda A'[x_i])^{-1} \right\| \leq M.$$
- (K)
 - すべての $x \in D(A), \|x\| \leq r$ に対し $A'[x]$ は sector $\Sigma = \{|\arg t| \leq \theta; t \neq 0, 0 < \theta < \pi/2\}$ での解析的半群 $e^{tA'[x]}, \|e^{tA'[x]}\| \leq M(r)$ の生成作用素である.
 - $D(A'[x])$ は $x \in D(A)$ に依らず一定で, すべての $x_1, x_2, y \in D(A), \|x_1\|, \|x_2\|, \|y\| \leq r$ に対し

$$\|(A'[x_1] - A'[x_2])A'[y]^{-1}\| \leq K(r)\|x_1 - x_2\|$$

が成立する. ここに $M(\cdot), K(\cdot)$ は r で定まる定数.

このとき, 以下の性質を持つ X 上の半群 $G(t)$ が一意に存在する:

- ・ 定理 2.1 の (i), (ii) 及び (iii).
- (iv) $G(t)$ はすべての $x \in D(A)$ 对, すべての $y \in D(A)$ の方向に Gateaux 微分可能.
- (v) 任意の $x \in D(A)$ に対し, $u(t) = G(t)x$ は初期値問題

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad u(0) = x$$
 の解である.

3. 結果

$A[x]$ の stability について, T. Kato [5] のような Hyperbolic type の条件を考える.

定理 3.1. A は R -differentiable で, その R -derivative $A'[x]$ は次の条件を満たすとする.

- (S) 任意有限個の $\{x_1, \dots, x_n\} \subset D(A)$ と $\lambda > 0$ に対し

$$\left\| \prod_{i=1}^n (I + \lambda A'[x_i])^{-1} \right\| \leq M.$$
 - (S₁) X に稠密にかつ連続的に埋込まれた Banach 空間 Y が存在して, 任意有限個の $\{x_1, \dots, x_n\} \subset D(A)$ と $\lambda > 0$ に対し,

$$(I + \lambda A'[x_i])^{-1}(Y) \subset Y \text{ かつ}$$

$$\left\| \prod_{i=1}^n (I + \lambda A'[x_i])^{-1} \right\|_Y \leq M_1.$$
 - (S₂) $Y \subset D(A)$ かつすべての $x, y \in D(A)$ に対し $Y \subset D(A'[x])$,

$$\|A'[x] - A'[y]\|_{Y, X} \leq M_2 \|x - y\| \quad \text{が成立する.}$$
- ここに $\|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_{Y, X}$ は各々 $B(Y, Y), B(Y, X)$ の norm を表す.

このとき、定理 2.1 により存在する半群 $G(t)$ について

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (G(t)y - y) = -Ay \quad y \in Y$$

が成立する。

注意 3.2. (S_2) で " $Y \subset D(A)$ " の仮定がなくても、他の仮定から " $D(A)$ が X で稠密" であることがわかる。実際、 $y \in Y$ に対して

$$\begin{aligned} J_\lambda y &= \int_0^1 J'_\lambda[\sigma y] y \, d\sigma \\ &= y - \int_0^1 \lambda A'[J_\lambda \sigma y] (I + \lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} y \, d\sigma \end{aligned}$$

より $\lim_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda y = y$ が従う。依って $Y \subset \overline{D(A)}$ だから $D(A)$ は X で稠密である。

注意 3.3. 定理 3.1 の仮定は [5] Theorem 4.1 の仮定と類似している。これについては更に定理 4.2, 注意 4.3 参照。

4. 定理 3.1 の証明

$G_n(t) = (I + \frac{t}{n} A)^{-n}$ を形式的に Fréchet 微分して、積分すれば

$$\begin{aligned} G_n(t)x &= \int_0^1 G'_n(t)[\sigma x] x \, d\sigma \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n (I + \frac{t}{n} A'[(I + \frac{t}{n} A)^{-i} \sigma x])^{-1} x \, d\sigma \end{aligned}$$

であるから、右辺の被積分函数に極限が存在すれば $G(t)$ はその極限で積分表示できると考えられる。

この方針を実現するために、いくつかの補題を用意する。

$T > 0$ に対して $C(T) = C([0, T] \times [0, 1]; X)$ は $[0, T] \times [0, 1]$ で定義されて X に値をとる連続関数の全体を表わす。 $u \in C(T)$ と零数列 $\{\lambda_n\}$ に対して、 u の近似列 $\{u_n\}$ で次の条件を満たすものが選べる；

$$\begin{cases} u_n(t, \sigma) = u_n(i\lambda_n, j\lambda_n) \in D(A) & \text{if } i\lambda_n \leq t < (i+1)\lambda_n \\ & j\lambda_n \leq \sigma < (j+1)\lambda_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(t, \sigma) \in [0, T] \times [0, 1]} \|u_n(t, \sigma) - u(t, \sigma)\| = 0. \end{cases}$$

以下、単に $u \in C(T)$ の近似列といえはこの性質をもつとする。

補題 4.1. $u \in C(T)$ とその近似列 $\{u_n\}$ に対し、

$$U\{u, \sigma\}(t, 0)x = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n\lambda_n \rightarrow t}} \prod_{i=1}^n (I + \lambda_n A'[u_n(i\lambda_n, \sigma)])^{-1} x$$

がすべての $x \in X$ に対して存在する。更に $u, v \in C(T)$ と $y \in Y$ に対し、

$$\begin{aligned} & \sup_{(t, \sigma) \in [0, T] \times [0, 1]} \|U\{u, \sigma\}(t, 0)y - U\{v, \sigma\}(t, 0)y\| \\ & \leq M M_1 M_2 T \|y\|_Y \sup_{(t, \sigma) \in [0, T] \times [0, 1]} \|u(t, \sigma) - v(t, \sigma)\| \end{aligned}$$

が成立する。特にこの不等式から $U\{u, \sigma\}$ は u の近似列 $\{u_n\}$ の選び方に依らないで定義されることがわかる。

証明. $y \in Y$, $m \leq n$ に対して次の等式を得る。

$$\begin{aligned} (4.1) \quad & \prod_{i=1}^m (I + \lambda A'[u_m(i\lambda, \sigma)])^{-1} y - \prod_{i=1}^n (I + \mu A'[u_n(i\mu, \sigma)])^{-1} y \\ & = \sum_{i=1}^{m-1} \beta^{n-i} \alpha^i \left(\sum_{(m-i, 0)}^{(m, n)} \prod_{p=1}^n (I + \mu A'[u_n(c_p \lambda, \sigma)])^{-1} \right) \prod_{i=1}^{m-i} (I + \lambda A'[u_m(i\lambda, \sigma)])^{-1} y \\ & + \sum_{i=m}^n \alpha^m \beta^{i-m} \left(\sum_{(1, n-i+1)}^{(m, n)} \prod_{p=1}^{i-1} (I + \mu A'[u_n(c_p \lambda, \sigma)])^{-1} \right) (I + \mu A'[u_n(\lambda, \sigma)])^{-1} \\ & \quad \times \prod_{i=1}^{n-i} (I + \mu A'[u_n(i\mu, \sigma)])^{-1} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{(m-1)\wedge j} \beta^{j-i} \alpha^i \left(\sum_{(m-i, n-j)}^{(m, n)} \prod_{p=1}^i (I + \mu A'[u_n(c_p \lambda, \sigma)])^{-1} \right) \\
& \times (I + \mu A'[u_n((m-i)\lambda, \sigma)])^{-1} \{A'[u_n((n-j)\mu, \sigma)] - A'[u_n((m-i)\lambda, \sigma)]\} \\
& \times \prod_{k=1}^{n-j} (I + \mu A'[u_n(k\mu, \sigma)])^{-1} y.
\end{aligned}$$

ここに $j \wedge i = \min\{j, i\}$, $\alpha = \mu/\lambda$, $\alpha + \beta = 1$ であって, 記号 $\sum_{(i, j)}^{(m, n)}$ は次を満たす $\{c_p\}$ の全体に関する和を表わす:

$$1 \leq p \leq n-j, \quad c_p \in \{m, m-1, \dots, i\},$$

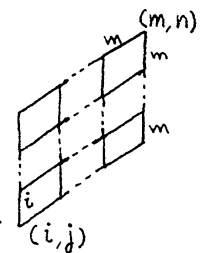
$$c_1 = m, \quad c_{n-j} = i+1 \text{ 又は } i, \quad c_p \leq c_{p-1} + 1.$$

$\sum_{(i, j)}^{(m, n)}$ の意味については, 次のように考えるとよい: 格子点

(k, l) ($k \geq 1, l \geq 1$) と $(k-1, l-1)$ 又は $(k, l-1)$ を結ぶ 2 本の線分を共に k -線分と名付けた時, (m, n) から (i, j) に至る (名付けられた線分を通る) 最短の折れ線を線分の名前を並べて $\{c_1, \dots$

$\dots c_{n-j}\}$ のように表わす. $\sum_{(i, j)}^{(m, n)}$ はその $\{c_p\}$ の全体

についての和である: 従って $\sum_{(i, j)}^{(m, n)}$ は $\binom{n-j}{m-i}$ 個の項を含む.



(4.1) は本質的には M. Crandall - A. Pazy [2] (2.19) と同じである.

[2] では $(I + \lambda A(x))^{-1}$ は縮小写像であったから, $norm$ 評価の形で (2.19) を得たが, 我々の場合線型性を用いて等式 (4.1) を得る.

ここで $y \in Y$ に注意して, 両辺の $norm$ を [2] と同様の手法によって評価すれば $U\{u, \sigma\}$ の存在が示される.

次の不等式を示すには,

$$(4.2) \quad \left\| \prod_{i=1}^n (I + \lambda_n A'[u_n(i\lambda_n, \sigma)])^{-1} y - \prod_{i=1}^n (I + \mu_n A'[u_n(i\mu_n, \sigma)])^{-1} y \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^n \left\| \prod_{i=j}^n (I + \lambda_n A' [u_n(i\lambda_n, \sigma)])^{-1} \prod_{i=1}^{j-1} (I + \mu_n A' [v_n(i\mu_n, \sigma)])^{-1} y \right. \\
&\quad \left. - \prod_{i=j+1}^n (I + \lambda_n A' [u_n(i\lambda_n, \sigma)])^{-1} \prod_{i=1}^j (I + \mu_n A' [v_n(i\mu_n, \sigma)])^{-1} y \right\| \\
&\leq M M_1 \|y\|_Y \sum_{j=1}^n \left\| \lambda_n A' [u_n(j\lambda_n, \sigma)] - \mu_n A' [v_n(j\mu_n, \sigma)] \right\|_{Y, X}
\end{aligned}$$

において $n \rightarrow \infty$, $n\lambda_n \rightarrow t$, $n\mu_n \rightarrow t$ とすればよい.

この等式(4.1)を用いれば, [5] Theorem 4.1 の引証明が可能である. 即ち次の定理を得る.

定理 4.2. $\{A(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ は Banach 空間 X で稠密な定義域 $D(A(t))$ を持つ閉線型作用素の族で, $\lambda > 0$ に対し $(I + \lambda A(t))^{-1}$ が存在して次の条件を満たすとする.

- (i) 任意有限個の $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$ と $\lambda > 0$ に対し
- $$\left\| \prod_{i=1}^n (I + \lambda A(t_i))^{-1} \right\|_X \leq K_1.$$
- (ii) X に稠密にかつ連続的に埋込まれた Banach 空間 Y が存在して, すべての $t \in [0, T]$, $\lambda > 0$ に対し
- $$(I + \lambda A(t))^{-1}(Y) \subset Y,$$
- かつ任意有限個の $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$ と $\lambda > 0$ に対し
- $$\left\| \prod_{i=1}^n (I + \lambda A(t_i))^{-1} \right\|_Y \leq K_2.$$
- (iii) $Y \subset D(A(t))$ がすべての $t \in [0, T]$ に対して成立し,
- $$\|A(t)\|_{Y, X} \text{ は } t \text{ について連続である.}$$

このとき次の様な X 上の発展作用素 $U(t, s)$ が存在する.

- (a) $U(t, s)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (I + \frac{t-s}{n} A(s + i \frac{t-s}{n}))^{-1} x \quad x \in X,$
- (b) $U(t, r)U(r, s) = U(t, s) \quad 0 \leq s \leq r \leq t \leq T,$

$$U(t, t) = I, \quad \|U(t, s)\|_X \leq K_1,$$

(c) $U(t, s)$ は (t, s) , $0 \leq s \leq t \leq T$ について強連続,

$$(d) \quad D_t^+ U(t, s) y|_{t=s} = -A(s) y \quad y \in Y, \quad 0 \leq s < T,$$

$$(e) \quad (\partial/\partial s) U(t, s) y = U(t, s) A(s) y \quad y \in Y, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

ここに D_t^+ は X の強位相での右微分を表わす.

注意 4.3. Y が非回帰的のとき [5] Theorem 4.1 では (ii) のところで $(I + \lambda A(t))^{-1}(Y)$ が Y で稠密であることが更に仮定されていた (admissibility) が, 我々のように $U(t, s)$ を構成するには, この仮定は不要である. しかし, (b)-(e) を満たす発展作用素の一意性を得ようとするには, 矢張, 稠密性が必要であると思われる.

証明. (a)-(c) は等式 (4.1) と [2] の手法により示される. (d), (e) を示すには $\{\tilde{A}(t)\}$ を定理の仮定を満たすもう一つの族で, X, Y は共通, 定数を $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ とする. $\tilde{U}(t, s)$ を $\{\tilde{A}(t)\}$ から (a) の式で構成された発展作用素とする. $y \in Y$ に対して

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{i=1}^n \left(I + \frac{t-s}{n} A(s+i\frac{t-s}{n}) \right)^{-1} y - \prod_{i=1}^n \left(I + \frac{t-s}{n} \tilde{A}(s+i\frac{t-s}{n}) \right)^{-1} y \right\| \\ & \leq \sum_{j=1}^n \left\| \prod_{i=j}^n \left(I + \frac{t-s}{n} A(s+i\frac{t-s}{n}) \right)^{-1} \prod_{i=1}^{j-1} \left(I + \frac{t-s}{n} \tilde{A}(s+i\frac{t-s}{n}) \right)^{-1} y \right. \\ & \quad \left. - \prod_{i=j+1}^n \left(I + \frac{t-s}{n} A(s+i\frac{t-s}{n}) \right)^{-1} \prod_{i=1}^j \left(I + \frac{t-s}{n} \tilde{A}(s+i\frac{t-s}{n}) \right)^{-1} y \right\| \\ & \leq K_1 \tilde{K}_2 \|y\|_Y \frac{t-s}{n} \sum_{j=1}^n \|\tilde{A}(s+j\frac{t-s}{n}) - A(s+j\frac{t-s}{n})\|_{Y, X} \end{aligned}$$

であるから, $n \rightarrow \infty$ として

$$\|U(t, s) y - \tilde{U}(t, s) y\| \leq \text{const.} \int_s^t \|\tilde{A}(r) - A(r)\|_{Y, X} dr$$

を得る. これは [5], (4.5) であるから (d), (e) が示される.

さて, 本論にもとって,

補題 4.4. $u \in C(T)$ に対し, 補題 4.1 で定義された $U\{u, \sigma\}(t, 0)x$ は $x \in X$ に対して $C(T)$ に属する.

証明. $\sigma \in [0, 1]$ を固定するとき, $U\{u, \sigma\}(t, 0)x$ の t に関する連続性は定理 4.2 による. (4.2) と同様の評価をすれば, t に一様に σ について連続であることも容易である.

定義 4.5. $u \in C(T)$ とその近似列 $\{u_n\}$ に対して,

$$(G\{T, x\}u)(t, s) = \int_0^s U\{u, \sigma\}(t, 0)x \, d\sigma$$

$$(G_n\{T, x\}u)(t, s) = \int_0^s \prod_{i=1}^n (I + \lambda_n A'[u_n(i\lambda_n, \sigma)])^{-1} x \, d\sigma$$

と定義する. 補題 4.4 より $G\{T, x\}$ は $C(T)$ を $C(T)$ 自身に写す.

次の補題は容易に示すことができる.

補題 4.6. $u \in C(T)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(t, s) \in [0, T] \times [0, 1]} \|(G\{T, x\}u)(t, s) - (G_n\{T, x\}u)(t, s)\| = 0.$$

補題 4.7. $(t, s) \in [0, T] \times [0, 1]$ と $y \in Y$ に対し

$$u(t, s) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n\lambda_n \rightarrow t}} (I + \lambda_n A)^{-n} sy$$

とおく. $u(t, s)$ が存在して $C(T)$ に属することは定理 2.1 に依る. このとき

$$(G\{T, y\}u)(t, s) = u(t, s)$$

が成立する.

証明.

$$g_n(t, \sigma) = (I + \lambda_n A)^{-i} \sigma y \quad \text{if } \begin{matrix} i\lambda_n \leq t < (i+1)\lambda_n \\ 0 \leq \sigma \leq 1 \end{matrix}$$

とおく. $g_n(t, \sigma)$ を σ で微分して $[0, S]$ で積分すれば

$$\begin{aligned} g_n(t, \sigma) &= \int_0^S \prod_{j=1}^i (I + \lambda_n A'[(I + \lambda_n A)^{-j} \sigma y])^{-1} y \, d\sigma \\ &= (G_n\{T, y\} g_n)(t, S) \end{aligned}$$

を得る. この両辺で $n \rightarrow \infty$ とすればよい.

この表現式が最初目指したものであったから, 以上の準備の下に定理 3.1 を証明することが出来る. まず,

$$(4.3) \quad A y = \int_0^1 A'[\sigma y] y \, d\sigma \quad y \in Y,$$

が成立することを示す. 実際, $A_\lambda = (1/\lambda)(I - (I + \lambda A)^{-1})$

(Yosida 近似) とおくと

$$\begin{aligned} A_\lambda y &= \int_0^1 (A_\lambda)'[\sigma y] y \, d\sigma \\ &= \int_0^1 (1/\lambda)(I - (I + \lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1}) y \, d\sigma \\ &= \int_0^1 (I + \lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} A'[\sigma y] y \, d\sigma \\ &\quad + \int_0^1 (I + \lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} (A'[J_\lambda \sigma y] - A'[\sigma y]) y \, d\sigma \end{aligned}$$

を得る. 右辺第二項は $\lambda \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する. 一斉, $z \in Y$ に対して

$$\|(I + \lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} z - z\| \leq \text{const. } \lambda$$

であることと, Y の稠密性によって

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} (I + \lambda A'[J_\lambda \sigma y])^{-1} x = x \quad x \in X$$

が成り立つから右辺第一項は収束する. A は閉作用素だから

(4.3) が示される。次に, $y \in Y$ に対し

$$D_t^+ \cup \{u, \sigma\}(t, 0)y \big|_{t=0} = -A'[\sigma y]y$$

が成立する。これは定理 4.2(d) に他ならない。故に

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (G(t)y - y) = \int_0^1 -A'[\sigma y]y d\sigma$$

$$= -Ay \quad y \in Y,$$

を得る。これで定理 3.1 は証明された。

References

- [1] M. G. Crandall and T. M. Liggett: Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math., 93, 265 - 298 (1971).
- [2] M. G. Crandall and A. Pazy: Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Israel J. Math., 11, 57 - 94 (1972).
- [3] M. Iannelli: Opérateurs dérivables et semi-groupes non-linéaires non-contractifs, J. Math. Anal. Appl., 46, 700 - 724 (1974).
- [4] M. Iannelli: Quelques remarques sur les semi-groupes non-linéaires non-contractifs, Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat., 54, 452 - 456 (1973).
- [5] T. Kato: Linear evolution equations of "hyperbolic" type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 17, 241 - 258 (1970).
- [6] N. Yamada: On a nonlinear noncontractive semigroup, to appear.