

Branched Coverings and Algebraic Functions

東北大 理 難波 誠

M を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の、 n 次元既約非特異射影多様体とする。
。 M 上の finite branched covering とは、既約正規解析空間 X から M 上への proper finite holomorphic map $\pi: X \rightarrow M$ の事とする。この時、ramification locus $R_\pi = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{M, \pi(x)} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}_{X, x} \text{ が同型でない} \}$ と、branch locus $B_\pi = \pi(R_\pi)$ は、それぞれ X, M の超曲面となる。 $\pi^{-1}(B_\pi)$ の各既約成分 D' に対して ramification index $e_{D'}$ of π at D' なる自然数が定義される。それは、 $\pi(x)=y$ が B_π の非特異点となるような D' の非特異点 x をとると、 π が、 x, y の回りの近傍系 $(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n)$ を適当に用いて

$$\pi: (z_1, \dots, z_n) \longmapsto (w_1, \dots, w_n) = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n^e)$$

で与えられるからである。この $e = e_{D'}$ は x の取り方によらない。 π の covering transformation とは、 X の自己同型 φ で、 $\pi \varphi = \pi$ をみたすもの。その全体 G_π は群をなす。 π が Galois とは G_π が π の各 fiber に推移的に作用する事。 π が abelian とは、 π が Galois で、 G_π が abel 群なる

こととする。

定義. $D_1, \dots, D_s$ を M の既約超曲面. $B = D_1 \cup \dots \cup D_s$.
 $e_1, \dots, e_s$ を 2 以上の自然数とし. $D = e_1 D_1 + \dots + e_s D_s$ なる
 M 上の正因子を考える. $\pi: X \rightarrow M$ が 丁度 (resp. 高々)
 D で branch する とは. $B_\pi = B$ (resp. $B_\pi \subset B$) で. $\pi^{-1}(D_j)$
の各既約成分での ramification index が e_j (resp. e_j の約数)
となる事./

我々は今. 次のような二問題を考えよう。

問題 1. 丁度 D で branch する finite Galois (resp.
abelian) covering が存在するための条件を求めよ./

問題 2. 高々 D で branch する finite Galois (resp.
abelian) coverings (の isomorphism classes) 全体の集合を
(M の内部の言葉で) 記述せよ./

始めの問題は. Fenchel の問題 と言ってよい。元の Fenchel
の問題は. M が閉リーマン面の場合であって. Bundgaard-Nielsen [1] 及び Fox [3] によって解かれた (§3 参照)。

後の問題は. 類体論的である。非可換類体論は未だ完成していない. と言われているが. Weil [10] は. $\mathbb{C}$ 上の代数関数体を用いて. 非可換類体論のモデルを作っているように見える。我々は. Weil の論文を多変数に書き直すことによって. 上問題を攻略したいと思う。とは言え. 得られた結果は.

十分満足すべきものとは言えない。おおよその、あらすじとでも言うべきである。

§1. Abelian Coverings

M, D を上述のようにとる。

$$\text{Div}(M, D) = \left\{ \hat{E} = \frac{a_1}{e_1} D_1 + \cdots + \frac{a_s}{e_s} D_s + E' \mid a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Z} \right. \\ \left. , E' \text{ は (ぶつうの) integral divisor on } M \right\}$$

なる rational divisors の加群を考える。これの 2 元 $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ が linearly equivalent, $\hat{E}_1 \sim \hat{E}_2$, とは. $\hat{E}_1 - \hat{E}_2$ が integral divisor であって. principal である事とする。 $c: H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ を Chern class を与える写像. $j_*: H^{1,1}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{1,1}(M, \mathbb{Q})$ を係数群の拡大とする時.

$$\text{Div}_0^{\mathbb{Q}}(M, D) = \left\{ \hat{E} = \frac{a_1}{e_1} D_1 + \cdots + \frac{a_s}{e_s} D_s + E' \in \text{Div}(M, D) \mid \right. \\ \left. c^{\mathbb{Q}}(\hat{E}) = \frac{a_1}{e_1} j_* c([D_1]) + \cdots + \frac{a_s}{e_s} j_* c([D_s]) + j_* c([E']) = 0 \right\}$$

とおく。

定理 1. 高々 D で branch する finite abelian coverings

$\pi: X \longrightarrow M$ の (isomorphism classes) 全体の集合と.

$\text{Div}_0^{\mathbb{Q}}(M, D)/\sim$ の有限部分群 S 全体の集合の間に. 1 対 1 の対応 $\pi \longmapsto S = S(\pi)$ がある。そして. この対応は

次の条件をみたす。(1) $G_{\pi} \simeq S(\pi)$, (2) $\pi_1 \leq \pi_2$ なら $S(\pi_1) \subset S(\pi_2)$. /

この定理よりただちに.

定理2. J 度 D で branch する finite abelian covering of M が存在する為の必要十分条件は. $\text{Div}_0^{\mathbb{Q}}(M, D)/\sim$ の有限部分群 S で次の条件を満たすものが存在する事である. 各 j , $1 \leq j \leq s$, に対し $\hat{E} = \hat{E}(j) = \frac{a_1}{e_1} D_1 + \dots + \frac{a_s}{e_s} D_s + E'$, such that $(a_j, e_j) = 1$ (互いに素) なる $\hat{E}/\sim \in S$ がある./

Example. $M = \mathbb{P}^n$ (複素射影空間), D_j を次数 d_j の既約超曲面とする時. J 度 $D = e_1 D_1 + \dots + e_s D_s$ で branch する finite abelian covering of $\mathbb{P}^n$ が存在する為の必要十分条件は各 j に対し $e_j/(d_j, e_j)$ が $\langle e_1/(d_1, e_1), \dots, e_j/(d_j, e_j), \dots, e_s/(d_s, e_s) \rangle$ を割り切る事である. ここに $(,)$ は GCD, $\langle \rangle$ は LCM, $\vee$ は省く事. ($s = 1$ の時は. $\langle \vee \rangle = 1$ とする.)/

上定理1は. 岩沢「代数函数論」第5章の(分岐をこめた)多変数化によって得られる. 技術的には. Kodaira-de Rham [2] の currentsの理論を用いる.

§2. Galois Coverings

M, D を上述のようにとり. $M' = M - \text{Sing } B$, $D'_j = D_j - \text{Sing } B$, $D' = e_1 D'_1 + \dots + e_s D'_s$ とおく. M' 上の matrix D' -divisor $\hat{E}$ とは. $(r \times r)$ -matrix valued functions の collection :

$\hat{E} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{F_\nu\}_{\nu \in N}$ の事である。ここに、 $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{W_\nu\}_{\nu \in N}$ を M' の open covering で $B \cap W_\alpha = \emptyset$, $B \cap W_\nu \neq \emptyset$ なるものとし、 F_α は W_α 上の $\det(F_\alpha) \neq 0$ なる有理型関数、 F_ν は W_ν 上の座標系 $(w_1, \dots, w_n)$ を $B \cap W_\nu = D'_1 \cap W_\nu = \{w_n = 0\}$ (say) なるようにとり時、 $(w_1, \dots, w_{n-1}, \sqrt[n]{w_n})$ についての $\det(F_\nu) \neq 0$ なる有理型関数とする。 $(e = e_1)$ 。

ただし、 $F_\alpha F_\beta^{-1}$ 等は、 $\det$ が決して 0 にならない、正則関数。また

$$S_\nu(w_1, \dots, w_{n-1}, \sqrt[n]{w_n}) = F_\nu(w_1, \dots, w_{n-1}, \sqrt[n]{w_n}) F_\nu(w_1, \dots, w_{n-1}, \sqrt[n]{w_n})^{-1}$$

($\zeta = \exp 2\pi\sqrt{-1}/e$) は、 $\det(S_\nu)$ が決して 0 にならない、正則関数とする。

この時、collection $\{F_\alpha \cdot F_\beta^{-1}\} \cup \{F_\alpha \cdot F_\nu^{-1}\} \cup \{F_\nu \cdot F_\alpha^{-1}\} \cup \{F_\mu \cdot F_\nu^{-1}\}$ は vector bundle 的性質をもつ。 $(F_\mu \cdot F_\nu^{-1})$ は $(w_1, \dots, w_{n-1}, \sqrt[n]{w_n})$ の正則関数である。) この collection を $[\hat{E}]$ とおき、 $\hat{E}$ に associate する D' -vector bundle と言う。一般の D' -vector bundle の定義も、同様に出来る。r をその rank と言う。

定義. D' -vector bundle V が flat とは、matrix D' -divisor $\hat{E} = \{F_\alpha\} \cup \{F_\nu\}$ と、 M 上の matrix 有理型 1-form η が存在して、次をみたす事である。(1) $V = [\hat{E}]$, (2) $\hat{E} \eta \hat{E}^{-1} - (d\hat{E}) \hat{E}^{-1}$ が正則 (つまり、 $F_\alpha \eta F_\alpha^{-1} - (dF_\alpha) F_\alpha^{-1}$, $F_\nu \eta F_\nu^{-1} - (dF_\nu) F_\nu^{-1}$ が正則) (3) $d\eta + \eta \wedge \eta = 0$. さらに V が unitary

とは. 周期表現

$$R_\eta: \pi_1(M-B, p_0) \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

(p_0 は定点.) が unitary 表現と同値なる事とする。ここに、

$$R_\eta(\gamma) = \int_\gamma \eta \quad \text{for } \gamma \in \pi_1(M-B, p_0).$$

$\int_\gamma \eta$ は $d\zeta = \sum \eta$ なる微分方程式の解で p_0 で 1 なるものを γ によって解析接続したものである。(これは, Toyama [9] の記号である。)/

そこで, $UFV(M', D', r)$ を rank = r の unitary flat D' -vector bundles (の同値類) 全体の集合とする。

$$UFV(M', D') = \bigcup_{r=1}^{\infty} UFV(M', D', r)$$

は、直和、テンソル積、 $*$ -作用素 (ここに、 $*$: $V \mapsto {}^t V^{-1}$) のもとで、associative, distributive, commutative, symmetric algebraic system をなす。このような algebraic system を抽象化して Tannaka system と呼びことにする。 $UFV(M', D')$ の元が既約とは、 $UFV(M', D')$ の2元の直和にかけない事とする。(D' -vector bundle として indecomposable なら既約だが、逆は不明。) $UFV(M', D')$ の各元は、既約元の和に、unique にかける: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ 。これを V の既約分解 と呼び、各 V_k を V の既約成分 と言う。 $UFV(M', D')$ の sub-system S が module とは、任意の $V \in S$ に対し、 V の各既約成分も S の元であること。module S の表現 Ψ とは、各

$V \in S$ に unitary 行列 $\Psi(V) \in U(\text{rank } V)$ を対応させる. 和, 積, $*$ -作用素に (quasi-) compatible な写像 $V \mapsto \Psi(V)$ の事である. (Tannaka [8] 参照.) その全体 $G(S)$ は自然に群をなす. これを S の表現群 と言う.

定義. $UFV(M', D')$ の module S が finite とは. (1) S が有限個の元で生成され (2) $G(S)$ が有限群なる事./

以上の準備のもとで

定理3. 高々 D で branch する finite Galois coverings $\pi: X \rightarrow M$ (の isomorphism classes) 全体の集合と, $UFV(M', D')$ の finite modules S 全体の集合の間に, 次の条件をみたす 1 対 1 の対応 $\pi \mapsto S = S(\pi)$ が存在する. (1) $G_\pi \simeq G(S(\pi))$. (2) $\pi_1 \leq \pi_2$ ならば $S(\pi_1) \subset S(\pi_2)$.

この定理より, ただちに

定理4. 丁度 D で branch する finite Galois covering $\pi: X \rightarrow M$ が存在する爲の必要十分条件は, $UFV(M', D')$ の finite module S で, 次の条件をみたすものが存在する事である. 各 j , $1 \leq j \leq s$, に対し $V = V(j) \in S$ があって, $V = [\hat{E}]$ なる $\hat{E}$ と 1-form η が, unitary flat D' -vector bundle の定義における条件をみたし, さらに $R_\eta(\gamma_j)$ の位数が丁度 e_j となるようにとれる事. ここに, γ_j は $M-B$ 内の閉曲線で, D'_j を正の向きに 1 回転する もの./

このようにして、問題 1, 2 が答えられたが、unitary flat D' -vector bundle の定義は、 M の内部の言葉で与えられていない。($\pi_1(M-B, p_0)$ は M の内部の言葉でない。) その意味で、定理 3, 4 は不十分である。 M が閉リーマン面で、 $B = \emptyset$ (つまり不分岐) なる時には、次の美しい定理が知られている。

定理 (Narasimhan-Seshadri [7]). genus $g \geq 2$ の閉リーマン面 M 上の vector bundle V が unitary flat なるための必要十分条件は、 V の各 indecomposable 成分 V' が、degree 0 で stable なることである。

なお、定理 3 の証明には、高々 D' で branch する (必ずしも finite でない) coverings of M' 中 maximal なもの

$$\pi: \tilde{M}(D') \longrightarrow M'$$

を考え、これに対して Weil-Tôyama 理論を適用するのである。高々 D' で branch する finite Galois coverings $\pi': X' \rightarrow M'$ (の isomorphism classes) の set と、 $\tilde{G} = G_{\pi}$ の normal subgroups of finite index の set とは、1 対 1 に対応し、さらに後者は $\mathbb{C}(M') = \mathbb{C}(M)$ (関数体) の有限 Galois 拡大体 K で $\mathbb{C}(\tilde{M}(D'))$ の部分体なるものの set と 1 対 1 対応している。 M の K -normalization $\pi: X \rightarrow M$ をとると、これは高々 D で branch する finite Galois covering となり、上の π' を

extend したものとなる。この対応関係、及び $\tilde{G}$ の unitary 表現の同値類全体 $\text{Uni}(\tilde{G})/\sim$ が Tannaka system として、 $\text{LFFV}(M', D')$ と同型な事に注意する事によって、定理3の証明がなされる。

§3. Kato's Theorem

Fenchel の問題の解答としての定理4は、良いものとは言えない。「よくわからないもの」を「さらにわからないもの」でおきかえた感がある。使いやすい条件がほしい。M が閉リーマン面の場合は

定理. (Bundgaard-Nielsen-Fox). M を genus g の閉リーマン面、 $D = e_1 p_1 + \dots + e_s p_s$ ($e_j \geq 2$) を M 上の divisor とする。丁度 D で分岐する finite Galois covering が存在しないための必要十分条件は、either (1) $g=0, s=1$ or (2) $g=0, s=2, e_1 \neq e_2$. /

この定理を用いて、加藤十吉氏は $M = \mathbb{P}^2$ で D_j ($1 \leq j \leq s$) が直線の場合に、Fenchel の問題についての興味深い十分条件を与えた。

定理 (Kato [4]). $M = \mathbb{P}^2$, D_j ($1 \leq j \leq s$) を直線とする。 $\Delta = \{ p \in B = D_1 \cup \dots \cup D_s \mid m_p(B) \geq 3 \}$ とおく。
($m_p(B)$ は B の p での重複度。) 今、各 j に対し $D_j \cap \Delta \neq \emptyset$

とする。この時、任意に与えられた自然数 $e_1, \dots, e_s$ (≥ 2) に対し、丁度 $D = e_1 D_1 + \dots + e_s D_s$ で branch する finite Galois covering $\pi: X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ が存在する。

この定理は次のように拡張出来る。

定理5. M を n (≥ 2) 次元既約非特異射影多様体、 $D_1, \dots, D_s$ を M の既約超曲面、 $\Lambda_1, \dots, \Lambda_t$ を fixed component free linear pencils で次の条件をみたすとする。(1) 各 D_j はどれかの Λ_k にふくまれる。(2) 各 Λ_k は少くとも3個の D_j をふくむ。この時、任意に与えられた自然数 $e_1, \dots, e_s$ (≥ 2) に対し、丁度 $D = e_1 D_1 + \dots + e_s D_s$ で branch する finite Galois covering $\pi: X \longrightarrow M$ が存在する。

実際、 Δ の各点中心の projection を Λ_k とすると、Kato の定理は定理5に帰着される。定理5の証明は、 M を $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ の base locus にとって何度か blow up して、base point free linear pencil を得、Bundgaard-Nielsen-Fox の定理より作られる Galois coverings との fiber product を作り、さいごにつぶせばよい。なお、fiber product を作る時、既約性、正規性がくずれ得る（そのような例が作れる）が、ひとつの既約成分の正規化を考えればよい。

以上、定理1～5 のくわしい証明は、Namba [6] を参照されたい。

§. Appendix.

丸山氏に、次の定理を教えてください。氏に感謝します。

定理 (Mehta-Ramanathan [5]). M を n 次元既約非特異射影多様体. H を M 上の ample line bundle. V を M 上の vector bundle で, $c_1(V)=0$, $c_2(V) \cdot H^{n-2}=0$ なるものとする. この時, V が indecomposable unitary flat するための必要十分条件は, V が (H に関して) stable な事である./

文献.

- [1] S. Bundgaard-J. Nielsen, On normal subgroups with finite index in F -groups, Math.Tidsskrift B, 1951, 56-58.
- [2] G. de Rham - K. Kodaira, Harmonic integrals, Lec. Inst. Advanced Study, 1950.
- [3] R. Fox, On Fenchel's conjecture about F -groups, Math. Tidsskrift B, 1952, 61-65.
- [4] M. Kato, On the existence of finite principal uniformizations of $\mathbb{CP}^2$ along weighted line configurations, to appear.
- [5] V. B. Mehta - A. Ramanathan, Restriction of stable sheaves and representations of the fundamental group, to appear.
- [6] M. Namba, Lectures on branched coverings and algebraic functions, to appear.

- [7] M.S. Narasimhan—C.S. Seshadri, Stable and unitary bundles on a compact Riemann surface, *Ann. Math.* 82 (1965), 540–567
- [8] T. Tannaka, Über den Dualitätssatz der nicht-kommutativen topologischen Gruppen, *Tohoku Math. J.* 45 (1938), 1–12.
- [9] H. Tōyama, Über eine nicht-Abelsche Theorie der algebraischen Funktionen, Thesis, Tohoku Univ.
- [10] A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, *J. de Liouville* 17 (1938), 47–87.