

球形シエルの軸対称自由振動時の近似解

國 枝 治 郎

APPROXIMATE SOLUTION OF FLEXURAL AXISYMMETRIC FREE VIBRATION OF SPHERICAL SHELLS

By *Haruo* KUNIEDA

Synopsis

Regarding the axisymmetric free vibration of a spherical shell or dome, the exact expressions of its natural frequencies and mode shapes exist. However, they are not easily amenable to numerical calculation. The need for response analysis is increasing, nowadays, because of wide applications of the shell structure in large building roofs, containers, and vessels and of the serious concern on their structural resistance to such dynamic forces as earthquake and waves. And, the exact solution is even less practical for the response analysis under dynamic loading.

This paper proposes an approximate solution which is suitable for such response analysis and provides the natural frequencies and modal shapes easily which are accurate enough for engineering purposes. Referring to the exact solutions of free vibration, the deflection modes are set as the sums of Legendre polynomials, which satisfy the ordinary boundary conditions and orthogonality condition. The close resemblance of the natural frequencies and eigen modes obtained from this approximate expression of the solution with those obtained from the exact solution are shown.

1. 序

シエル構造の振動解析に関する研究は極めて多い。中でも球形シエルの自由振動に関する研究は円筒形シエルに次いで古くから取り扱われてきている古典的な課題である。既に1960年代の初期までに Reissner [1], Hoppman [2], Kalnins [3], Kalnins 他 [4] 等によって偏平な球形シエルの自由振動に対する解析解は与えられていた。その後、著者他 [5], Prasad [6], Wilkinson 他 [7] 等が非偏平な場合を含む球形シエル自由振動時の一般厳正解を与えて来た。したがって当問題は1960年代中頃には全て明らかにされたように思われるが必ずしもそうではないのである。これら厳正解に基づく固有振動数、モード等はほとんど与えられて来っていないのである。当時は大型計算機は未だ普及しておらず、それ故に最も簡単な場合についてすら固有振動数やモードを求めることは不可能に近かった。著者が厳正解に基づく逆対称形振動時固有振動数の一部を初めて求めたとき [13], 使用可能な計算機は 4K メモリーのもの(京大 KDC-1)であり、必然的に一部に近似を採用せねばならず、また時間的制約で精度の検討も不十分なままであった。一部の数値的研究 [9], [11] を除いて(精度は不明確であった), 球形シエルの自由振動性状は必然的に運動方程式の特性値と厳正解を構成する特殊関数の特性からさぐらねばならなかったのである [8]。

近年, 巨大な球形シエルが建物, 競技場, LNG タンク, 原子炉格納建物等の屋根, 海洋建築物等に多く使用され, 或いは使用が計画されるようになってきて, これら球形シエルの地震動, 波等の動的外力に対する応答性状がその強度や安全性から重要になってきた。応答解析を行なうには固有振動数やモードに対する知識が必要になる。その上, 数値計算が容易に遂行できるような解表現が望ましい。実設計に当っては応答解析は有限要素法等に基づく直接数値計算法が用いられることが多いが, その精度検証は厳正解による結果

との比較によらねばならない。

最近の有限要素法による数値計算結果では、[3]や[9]にその存在が記述されているいわゆる基本モードが得られないと云われている。このモードはこれら論文では第1次固有モードではないが、Glockner 他は極めて扁平な球形シェルにおいて実験的にこのモードを第1次固有モードとして見出ししている[10]。しかしこの実験における測定方法が詳述されていないので実験結果には疑点がある。著者は著者等の求めた一般厳正解に基づいて球形シェルの対称及び逆対称自由振動時の固有振動数を計算し、参照基準を整備すると共にモードもいくつか図示し、上記のいわゆる基本モード形が厳正解によると存在しないことを明らかにした[14]。また、これらの計算を通じ、著者等の厳正解の有効性、すなわちこれらの解の数値計算可能性、固有振動数、モード算出の可能性を示した。

だが、[5]、[6]、[7]等による厳正解は応答解析に適用するには不適当な表現になっている。厳正解は複素数次数及び非整数次数の Legendre 陪関数で表現されているので、これらの解を応答解析に導入し、通常用いられる Galerkin 法等を適用すると座標変数による積分が閉形の関数では一般には表われないので数値計算が極めて困難になる。[8]等過去にもいくつかの自由振動時近似解は提案されたが、それらは大型計算機の無い時代に固有振動数を求めるためのものであって、応答解析には必ずしも適切な表現のものではない。

本報告の目的は最近得られた厳正な固有振動数、モード[14]を参照しつつ十分な精度と実用性をもって応答解析に適用可能な自由振動時近似解を得ることにある。この近似解を用いると応答解析において Gelenkin 法を適用すると必要な積分は全て閉形関数表現される。

2. 近似解の作成

厳正解に基づく固有振動数、モードの計算結果によると、対称振動時には接線方向変位成分 u による慣性項をも含めた normal 振動とこれを見捨てた flexural 振動とでは通常実設計に用いられる球形シェルの幾何寸法、材料的常数の範囲において極めて軽微な差異しか見られない[14]。他方 flexural 振動の仮定を導入すると応答解析が極めて簡略化されることはその支配式を見ればすぐわかる。したがってここでは flexural 振動の仮定を導入する。

flexural 振動の仮定に基づく軸対称時自由振動の支配式は[5]における支配式に必要な演算を行なうと次のように与えられる。

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) + \frac{ma^4}{gD} \ddot{w} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに

$$H_2(B) = \frac{\partial^2 B}{\partial \phi^2} + \cot \phi \frac{\partial B}{\partial \phi} + 2B, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

であり、 ϕ は経線に沿う方向の頂点からの開角、 a は半径、 h は板厚、 g は重力加速度、 m はシェル中立面単位面積当り重量、 ν はポアソン比、 w は法線方向変位成分であり、応力関数 ψ は断面力、変位成分 u と次の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \frac{1}{a^2} \left[-\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \psi - \frac{1}{a} D H_2(w) \right] \\ N_\phi &= \frac{1}{a^2} \left[\cot \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \psi - \frac{1}{a} D H_2(w) \right] \\ u &= -\frac{(1+\nu)}{Eha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

同様に適合条件は次式で与えられる。

$$H_2 H_1(\psi) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + E h a H_2(w) = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに

$$H_1(B) = H_2(B) - (1+\nu)B$$

ここで取り扱う球形シエルは頂点が閉じており、境界は一ヶ所だけのドーム形とする。(1)及び(3)式の解 w を Legendre 多項式を用いて次のように表わすものとする。

$$w = \sum_{i=1}^N B_i \tilde{W}_i(\phi) T_i(t) \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに

$$\begin{aligned} \tilde{W}_i(\phi) &= \sum_{j=J_i}^{K_i} F_{ji} P_{j-L}(\cos\phi) \quad \dots\dots\dots(5) \\ K_i &= J_i + i + 2 \end{aligned}$$

であり、 $P_n(\cos\phi)$ は n 次の Legendre 多項式である。

(4), (5)式に含まれるパラメータ J_i, L を厳正解に対する良き近似解となるように決定するのが本報告の主点である。厳正解と違って(4)式は Legendre 多項式で表現されるので、これを応答解析に導入して Galerkin 法を適用するとき表われる積分は以下に示すように閉形関数で表現されるので数値計算が容易になる。

パラメータを決定するために **Fig. 1**, **Fig. 2** を用意する。**Fig. 1** は厳正解に基づく固有振動数を固定境界条件の下に求め図示したもので、縦軸は一般化固有振動数、横軸は開角である。これは $a/h=100$ に対しての値であるが、 $a/h>100$ の場合にも実用上使用出来る。また、単純支持境界の場合にも差は十分に小さい [14]。応答計算に必要な固有振動数の上限 $\Omega_0 (\equiv \sqrt{ma^2/(Ehg)} \cdot \omega_0)$ が決定されるとこの図より Ω_0 までに含まれる固有振動数の個数 N が求められる。**Fig. 2** は厳正解を構成する Legendre 関数のうち最高実数次の関数の次数指標を Ω との関係で示したものである。固有モードはこの指標の値に大きく依存する。 Ω_0

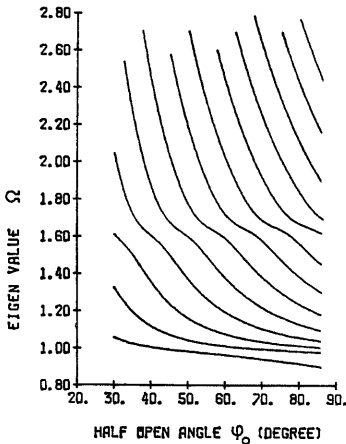


Fig. 1 Eigen value Ω versus half open angle relations in axisymmetric vibration : $a/h=100$ and clamped edge

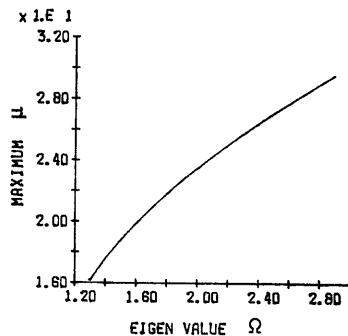


Fig. 2 Maximum real fractional order of Legendre functions versus eigen value Ω relation in exact solution

が与えられるとき、これに対応する実数次数指標に近い整数次数の Legendre 多項式が(5)式には含まれねばならない。さもないと(4), (5)式による近似解は固有振動数に対して良き近似値を与えても、モードが厳正解のそれと全く異なる場合がある。著者はかつて $J_i=i$ とし $L=1$ として F_{ji} を以下に示すと同じ手法で求め、厳正解の固有振動数と極めて良く一致する近似固有振動数を得たが、 $\Omega \approx 1.6$ に対応するモードはいわゆる基本モードに近いものであった。このモードの存在は厳正解では既述のように否定されている。これは上記のパラメータ値による近似解が厳正解によるモードを表現するに十分な項数の Legendre 多項式を含んでいなかったことによる。これが Fig. 2 を用いる理由である。

パラメータ J_i, L を決定する以下の手順は試行錯誤法によりかなり経験的に決定された部分がある。一般的な手法を以下に示す。

- (1) 求めるべき一般化固有振動数の上限 Ω_0 を定める。
- (2) Fig. 1 より考慮すべき固有モードの数 NA を Ω_0 に応じて求める。
- (3) Fig. 2 より Ω_0 に対応する Legendre 関数の最高次数指標 μ_{max} を求める。
- (4) 整数 M, J_{max} を次式より計算する。

$$M = \text{Int.} \left(\frac{\mu_{max} - NA + 3 \sim 6}{NA} \right)$$

$$J_{max} = \text{Int.}(\mu_{max})$$

- (5) パラメータ J_i を次のように置く。

$$J_i = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ J_{i-1} + i + 2 & (1 < i < M-2) \\ J_{i-1} + M & (M-2 \leq i) \end{cases}$$

- (6) もし $J_{i-1} + i + 1 \leq J_{max} + 1$ 且つ $J_i + i + 2 \geq J_{max} + 1$ ならば $N=i$ とする。
- (7) もし $N < NA$ ならば $N=N+1$ としながらステップ(5)を $N=NA$ になるまで繰り返し、ステップ(10)へ進む。
- (8) もし $NA < N \leq M-2$ ならばステップ(10)へ進む。
- (9) もし $N > NA$ 且つ $N > M-2$ ならば次のような J_i の上方移動を行なう。
 $(J_i = J_i + 1, (i = i_0, i_0 + 1, \dots, N)), i_0 = i_1, i_2, \dots$
 但し常に $J_i \leq J_{i-1} + i + 2$ を満たす必要がある。 i_1, i_2 等は適当に選ぶ。 i_0 のそれぞれについて毎回ステップ(6)をチェックし、 $N=NA$ になるまで繰り返す。
- (10) もし $M \geq N$ ならば $L=0$ 。それ以外は $L=1$ とする。

上記の手順は一般的なものである。この方法は Fig. 1, Fig. 2 を用いる点で不便がある。

実用的な球形シェルの応答解析では $\Omega_0 = 1.75$ とすれば十分な場合が多い。 $30^\circ \leq \phi_0 (\text{半開角}) \leq 90^\circ$ の場合に適用できる手順を次に示す。これは上記開角の範囲で一般的に用いられ得るために、上述の手順に少し変更が必要となる。

- (i) $\mu_{max} = 21.33, J_{max} = 21$ とする。($\Omega_0 = 1.75$)
- (ii) NA は次式で推定する。 ϕ_0 : 単位 度
 $NA = \text{Int.}(A), \quad A = 0.14 \phi_0 - 0.8 \quad (30^\circ \leq \phi_0 \leq 45^\circ)$
 $\quad \quad \quad = 0.1305 \phi_0 - 0.8 \quad (45^\circ \leq \phi_0 \leq 90^\circ)$
- (iii) $M = \text{Int.}(21.33/A + 0.5)$
- (iv) 上記ステップ(5)~(9)を遂行する。但しステップ(9)で $i_1 = N/2, i_2 = N/2 + 1, i_3 = N/2 + 2, \dots$ とする。また $N = NA + 1 (NA \leq 8), N = NA (NA \geq 9)$ で J_i の移動操作を終了する。
- (v) $30^\circ \leq \phi_0 \leq 37.5^\circ$ の場合 $L=0$ 。それ以外 $L=1$ とする。
- (vi) 以下に述べる F_{ji} の決定の操作において、数値計算不能となった場合にはこのステップへ戻り、ステップ(iv)の J_i の移動操作を $NA \leq 6$ の場合には下方向 ($J_i = J_i - 1$ とする) へ、 $NA \geq 7$ の場合は上

方向へ必要回数行なえば計算不能の困難は取り除かれ、良い結果が得られる。ここで云う計算不能とは独立な固有振動数が求まらない状態をさしている。

上記の手順は一見煩雑に思われるが計算機用プログラム作成は極めて容易である。上記二手順はいずれも好ましい結果を与えるが、 Ω_0 に制約があるとは云え、後者の方が汎用性があり、また、**Fig. 1**, **Fig. 2** を用いないので望ましい。

次に上記手順の下に定まったパラメータを用いて、(5)式の係数 F_{ji} を決定する手順を示す。

(α) 次式

$$\tilde{W}_1(\phi) = \sum_{j=1}^4 F_{j1} P_{j-L}(\cos \phi)$$

は4個の未知係数 F_{j1} を含む。 $F_{11}=1$ と置き、 $F_{j1}(j \neq 1)$ を軸対称の場合における3個の境界条件から決定する。

(β) 次式

$$\tilde{W}_n(\phi) = \sum_{j=n}^{K_n} F_{jn} P_{j-L}(\cos \phi)$$

は $(n+3)$ 個の未知係数 F_{jn} を含んでいる。 $F_{jn}|_{j=n}=1$ と置き、 $F_{jn}(j \neq n)$ を同じ3個の境界条件と次の $(n-1)$ 個の条件式から決定する。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\theta_0} \left[H_2 H_2(\tilde{W}_p) - \frac{a}{D} H_2(\psi_p) \right] \tilde{W}_n \sin \phi d\phi \\ &= \int_0^{\theta_0} \left[H_2 H_2(\tilde{W}_n) - \frac{a}{D} H_2(\psi_n) \right] \tilde{W}_p \sin \phi d\phi \\ & \quad p=1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

積分を行なってこの式を書き換えると

$$\begin{aligned} & \sum_{q=n}^{K_n} F_{qn} \sum_{j=p}^{K_p} F_{jp} \{ \{2-r(r+1)\}^2 - \kappa \lambda_r \{2-r(r+1)\} \\ & \quad - \{2-s(s+1)\}^2 + \kappa \lambda_s \{2-s(s+1)\} \} S(r, s) = 0 \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

ここに

$$r=q-L, \quad s=j-L, \quad \kappa = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2}$$

$$\begin{aligned} S(r, s) &= \int_0^{\theta_0} P_r(\cos \phi) P_s(\cos \phi) \sin \phi d\phi \\ &= \begin{cases} \frac{1 - \cos\{(2r+1)\phi_0\}}{2r+1} - 2 \sum_{i=1}^r S(r-i, r+i) \dots\dots (r=s) \\ \frac{1}{r(r+1)-s(s+1)} [(r-s) \cos \phi P_r P_s + s P_r P_{r-1} - r P_{r-1} P_s] |_{\phi_0} \dots\dots (r \neq s) \end{cases} \\ P_r &\equiv P_r(\cos \phi), \quad P_s \equiv P_s(\cos \phi) \\ \lambda_i &= [(1-\nu) \{2-i(i+1)\} / \kappa - 1] / \{(1-\nu) - i(i+1)\} \end{aligned}$$

である。

(6)式は(1)式に Galerkin 法を適用し固有値問題に還元するとき、系の剛性行列を対称化する操作を意味している。即ち (γ) において $k_{ij} = k_{ji}$ とするためである。

(γ) (4), (5)式を(1)式に代入し、Galerkin 法を適用すると次の方程式が得られる。但し $T(t) = e^{i\omega t}$ としている。

$$-\Omega^2 [(m_{ij})] \{B_j\} + [(k_{ij})] \{B_j\} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ここに

$$m_{ij} = m_{ji} = \sum_{r=J_i}^{K_i} \sum_{s=J_j}^{K_j} F_{ri} F_{sj} S(r-L, S-L)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \sum_{r=J_i}^{K_i} \sum_{s=J_j}^{K_j} F_{ri} F_{sj} \{2 - (r-L)(r-L+1)\} \left[\frac{\{2 - (r-L)(r-L+1)\}}{\kappa} - \lambda_{r-L} \right] S(r-L, s-L)$$

関数 $S(r-L, s-L)$ は(6)式中のものと同一である。

(b) (7)式より固有値 Ω および固有ベクトル $\{B_j\}_i$ は容易に求められる。したがって法線方向変位成分 w は(4), (5)式を書き換えて次のように表現されることになる。

$$w = \sum_{i=1}^N W_i(\phi) T_i(t) \dots\dots\dots (8)$$

$$W_i(\phi) = \{B_j\}_i^T \cdot \{\tilde{W}_j(\phi)\} = \sum_{j=1}^{K_N} G_{ji} P_{j-L}(\cos \phi)$$

$$G_{ji} \equiv \sum_{s=1}^N (B_s)_i F_{js}$$

ここに $W_i(\phi)$ は第 i 番目の固有モードを表わしている。

(c) この近似解は直交系の Legendre 多項式を用いており, $\tilde{W}_j$ は完全系を構成するが, Legendre 多項式は有限個を用いていること, Galerkin 法を適用していること等により, (7)式で得られる固有値が全て適切なものである保証はない。すなわち複素固有値の求まる可能性がある。したがって得られた固有値の有効性, 適切性を検討する必要がある。これは次のように行なう。

次式より $\tilde{\Omega}_i$ を計算する。

$$\tilde{\Omega}_i = [\{B_j\}_i^T (m_{jj}) \{B_j\}_i]^{-1} [\{B_j\}_i^T (k_{jj}) \{B_j\}_i]$$

求まった $\tilde{\Omega}_i$ と(7)式による固有値 Ω_i を比較し, その差が無視できる程度に小さいとき, 対応する Ω_i は有効である。

3. 数値計算例の結論

$\Omega_0 = 1.75$ とし, 上記ステップ(i)~(vi)により必要パラメータを用いて求めた近似解による一般化固有振動数を Table 2 に与える。Table 1 は厳正解に ilexural 振動の仮定を導入して求めた一般化固有振動数であ

Table 1. Exact Eigen Values of Spherical Dome in state of axisymmetric Flexural Vibration (inertia of w only considered): $a/h=100$, $\nu=0.3$, *clamped edge*.

ϕ_0	$\Omega \left(= \sqrt{\frac{ma^2}{Ehg}} \omega \right)$									
30.0	1.0592	1.3279	1.6133							
35.0	1.0252	1.1972	1.5027	1.7206						
40.0	1.0063	1.1186	1.3564	1.6054						
45.0	0.9934	1.0721	1.2395	1.5019	1.6762					
50.0	0.9830	1.0434	1.1619	1.3703	1.5994					
55.0	0.9737	1.0249	1.1108	1.2673	1.4945	1.6557				
60.0	0.9642	1.0124	1.0765	1.1942	1.3780	1.5907	1.7167			
65.0	0.9543	1.0033	1.0528	1.1425	1.2868	1.4855	1.6450			
70.0	0.9435	0.9963	1.0361	1.1055	1.2189	1.3826	1.5782	1.6872		
75.0	0.9317	0.9905	1.0239	1.0786	1.1684	1.3012	1.4768	1.6372		
80.0	0.9187	0.9854	1.0148	1.0587	1.1306	1.2384	1.3856	1.5634	1.6717	
85.0	0.9045	0.9806	1.0077	1.0437	1.1019	1.1899	1.3123	1.4692	1.6283	1.7146

る。両者を比較すると極めて良く一致していることがわかる。次にモードの比較を示す。**Fig.3**, **Fig.4** はそれぞれ **Table 1**, **Table 2** に対応する固有モードの一例である。**Fig.3** と **Fig.4** が極めてよく一致することが認められる。すなわちここに示した近似解の有効性が示された。尚、固定境界である。

近似解法では Galerkin 法を導入したが近似解のモードと厳正解のそれと良く一致しているので、近似解

Table 2. Approximate Eigen Values of Spherical Dome in state of Axisymmetric Flexural Vibration (inertia of w only considered) : $a/h=100$, $\nu=0.3$, *clamped edge*.

ϕ_0	$\Omega \left(= \sqrt{\frac{ma^2}{Ehg}} \omega \right)$									
30.0	1.0594	1.3249	1.6134							
35.0	1.0258	1.1987	1.5070	1.7196						
40.0	1.0064	1.1206	1.3577	1.6087						
45.0	0.9934	1.0719	1.2480	1.5101	1.6845					
50.0	0.9833	1.0443	1.1660	1.3844	1.6168					
55.0	0.9737	1.0250	1.1109	1.2671	1.4949	1.6538				
60.0	0.9645	1.0127	1.0775	1.1974	1.3867	1.6072	1.7173			
65.0	0.9547	1.0035	1.0538	1.1452	1.2953	1.5278	1.6527			
70.0	0.9437	0.9964	1.0365	1.1062	1.2202	1.3864	1.5881	1.6903		
75.0	0.9322	0.9906	1.0242	1.0794	1.1706	1.3059	1.4960	1.6437		
80.0	0.9226	0.9870	1.0164	1.0670	1.1539	1.3984	1.5831	1.6216		
85.0	0.9054	0.9808	1.0080	1.0444	1.1034	1.1929	1.3179	1.4799	1.6399	1.7159

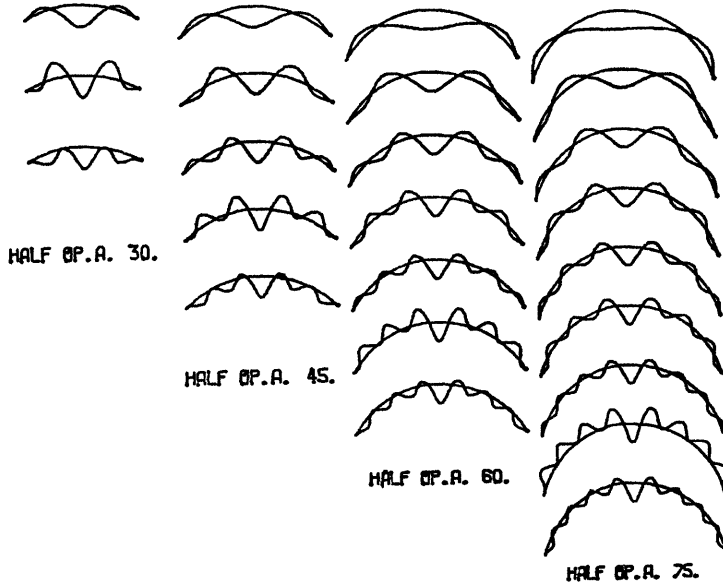


Fig. 3 Axisymmetric eigen modes of spherical dome by exact solution : $a/h=100$ and *clamped edge*

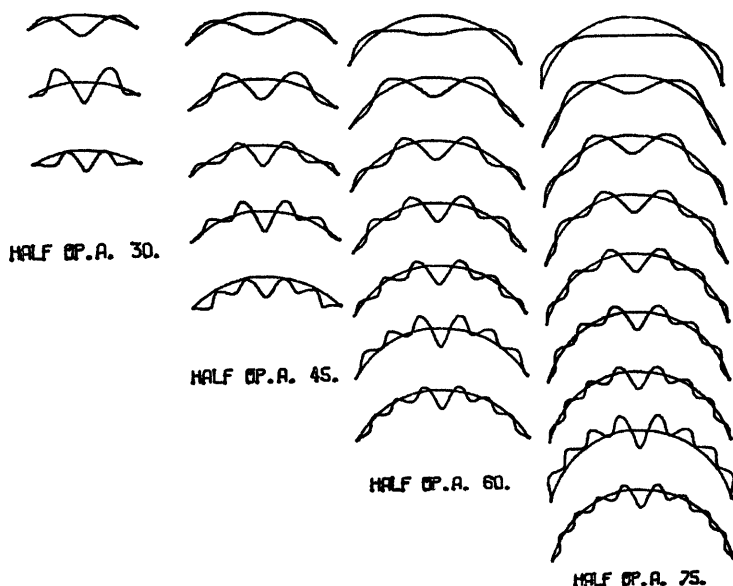


Fig. 4 Axisymmetric modes by approximate solution proposed here:
 $a/h=100$ and clamed edge

は支配式を十分な精度で満していると考えられるがその確認を行なう。(8)式を(1)式に代入して次式より $\bar{\Omega}_i$ を求める。

$$\bar{\Omega}_i(\phi) = \frac{\sum G_H \{2 - (j-L)(j-L+1)\}^2 - \lambda_i \{2 - (j-L)(j-L+1)\}}{W_i(\phi)} P_{j-L}(\cos \phi)$$

$\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ として $\bar{\Omega}_i(\phi)$ を求め、 Ω_i との比が常に1であれば近似解は支配式を充分の精度で満していると云える。 $\phi_0 = 75^\circ$ の場合について比 $\bar{\Omega}_i/\Omega_i$ を Table 3 に示す。比は実用的には1と見なしても

Table 3. Degree of satisfaction of approximate eigen value for governing equation: $\bar{\Omega}_i/\Omega_i$, $\phi_0 = 75^\circ$

Mode ϕ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°	0.9548	1.0138	0.9849	1.0252	0.9674	1.0346	0.9505	1.0448	0.9948
7.5°	1.0113	0.9959	1.0054	0.9868	1.0243	0.8897	1.7054	1.0185	0.9829
15.0°	0.9933	1.0041	1.3290	0.9899	1.0106	0.9886	1.0432	0.9865	0.9824
22.5°	1.0047	1.0172	0.9975	1.0053	1.0356	0.9909	1.0086	1.0086	1.0305
30.0°	0.9954	0.9985	1.0027	1.0055	0.9957	0.9798	1.0081	0.9991	1.2637
37.5°	1.0097	1.0010	1.0021	0.9964	0.9935	1.0043	1.0062	0.9998	1.0104
45.0°	1.0095	0.9983	0.9991	0.9970	1.0077	1.0039	0.9293	1.0008	1.0212
52.5°	0.9964	0.9953	1.0030	1.0024	1.0030	1.0060	0.9508	0.9934	1.0092
60.0°	1.0024	1.0012	1.0013	1.0055	0.9716	0.9958	0.9922	1.0054	1.0328
67.5°	1.0006	1.0011	1.0023	1.0009	1.0003	1.0031	0.9867	0.9749	1.0352

よいと考えられる。

この近似解の利点は応答解析にこれを導入し、Galerkin 法を適用するとき、計算すべき積分が(6)式中の関数 S で示す閉形関数で表現されることである。したがって数値計算が極めて容易になる。この近似解を用いた動的外力に対する応答解析は稿を改めて論じる。

著者は既に非線形曲げ理論に基づく軸対称応答解析について論じている [12]。そこでは flexural 振動の仮定を用いており、 w は 4 個の Legendre 多項式の結合として表現した。これは通常の境界条件は満すが固有モードである保証がない。しかし Galerkin 法の適用において、必要な積分は全て閉形関数で表現できた。ここに示した近似解をこの非線形応答解析に導入するならば、非線形応答計算も極めて容易に遂行され得る。

参 考 文 献

- 1) E. Reissner: On axisymmetrical vibrations of shallow spherical shells, J. Appl. Math. Vol. 13, 1955, pp. 279-290.
- 2) W. H. Hoppmann II: Frequencies of vibration of shallow spherical shells, J. Appl. Mech. ASME, Vol. 28, 1961, pp. 305-307.
- 3) A. Kalnins: Free nonsymmetre vibrations of shallow spheriacd shell, Proc. Natio. Cong. Appl. Mech. 4th U. S., 1963, pp. 225-233.
- 4) P. M. Naghdi and A. Kalnins: On vibration of elastic spherical shells, J. Appl. Mech. ASME, Vol. 29, 1962, pp. 65-72.
- 5) 横尾義貫, 松岡理, 國枝治郎: 球殻振動時の一般解, (その 1) 理論式誘導と厳正解, 日本建築学会論文報告集, 第83号, 昭和38. 3, pp. 7-14.
- 6) C. Prasad: On vibrations of spherical shells, J. Acous. Soci. Ameri. Vol. 36, 1964, pp. 489-494.
- 7) J. P. Wilkinson and A. Kalnins: On nonsymmetric dynamic problems of elastic spherical shells, J. Appl. Mech. ASME, Vol. 32, 1965, pp. 525-531.
- 8) 横尾義貫, 松岡理, 國枝治郎: 球殻振動時の一般解, (その 2) 振動性状・近似解, 日本建築学会論文報告集, 第84号, 昭38. 4, pp. 22-29.
- 9) A. Kalnins and H. Kraus: Effect of transverse shear and rotatory inertia on the vibration of spherical shells, Proc. Natio. Cong. Appl. Mech. 5th U. S., 1966, pp. 134.
- 10) P. G. Glockner and K. Z. Tawadros: Experiments on free vibration of shells of revolution, Experi. Mech., 1973, pp. 411-421.
- 11) A. Kalnins: Effect of bending on vibrations of spherical shells, J. Acous. Soci. Ameri., vol. 36, 1964, pp. 74-81.
- 12) H. Kunieda: Nonlinear axisymmetric flexural vibration of spherical shells, NASA Tech. Note D-6776, 1972, pp. 1-47.
- 13) 國枝治郎: 球殻自由振動時固有振動数 ($n=1$ の場合, 脚部固定, ピン支持に対して), 日本建築学会論文報告集号外, 昭41. 10, pp. 194.
- 14) H. Kunieda: Solutions of free vibrations of spherical shells, Part 3 natural frequencies and modes in axi- and anti-symmetric state, Transc. AIJ, No. 325, 1983, pp. 57-66.