

Deformed Cartan matrices and generalized preprojective algebras

村上 浩大
京都大学理学研究科数学教室

Kota Murakami
Kyoto University
Department of Mathematics

1. 口上

前射影代数とは簾に対する道代数の “double” として定義される体上の結合的代数であり、元の道代数上の前射影加群の直和として表され、その次数付けに関する構造は簾の表現論の Auslander-Reiten 理論に関する組み合わせ論的な情報を含んでいる。そして Dynkin 型簾の Auslander-Reiten 理論は Gabriel の定理により対応する A,D,E 型の単純 Lie 代数のルート系の組み合わせ論と深く関係していることから、前射影代数上の次数付き加群たちを研究することで A,D,E 型の単純 Lie 代数や付随する代数系の表現論に関する数値的帰結が得られることが自然に期待される。

一方で近年 Geiß-Leclerc-Schröer [GLS17, GLS18a, GLS16, GLS18b, GLS18c, GLS20] により対称化可能一般化 Cartan 行列に対する簾の表現論およびその前射影代数（一般化前射影代数）が導入された。本稿では京都大学の藤田遼氏との共同研究 [FM21] に基づき、Geiß-Leclerc-Schröer による一般化前射影代数の適切な次数付けに関する次数付き加群たちの構造と、量子 affine 代数の表現論および変形 $\mathcal{W}$ 代数への興味から Frenkel-Reshetikhin [FR98] により導入された変形 Cartan 行列に関する数値的な情報を関係付け、表現論的に行列の性質を証明する結果を紹介する。

2. 次数付き代数と次数付き加群の記法について

2.1. 二重次数付きベクトル空間. 二つの $\mathbb{Z}$ 次数付けをもつ $\mathbb{k}$ -ベクトル空間（二重次数付きベクトル空間） $V = \bigoplus_{u,v \in \mathbb{Z}} V_{u,v}$, について qV (resp. tV) でその次数シフト $(qV)_{u,v} := V_{u-1,v}$ ($\forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2$) (resp. $(tV)_{u,v} := V_{u,v-1}$ ($\forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2$)) を表す。非負係数 $a_{k,l}$ をもつ q, t に関する Laurent 多項式 $a(q, t) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} a_{k,l} q^k t^l$ に対して次のように定める：

$$V^{\oplus a(q,t)} := \bigoplus_{k,l \in \mathbb{Z}} (q^k t^l V)^{\oplus a_{k,l}}.$$

各次数成分 $V_{u,v}$ が $\mathbb{k}$ 上有限次元であるとき、その二重次数付き次元 $\dim_{q,t} V$ を $q^{\pm 1}, t^{\pm 1}$ に関する形式的冪級数として次で定める：

$$\dim_{q,t} V := \sum_{u,v \in \mathbb{Z}} (\dim_{\mathbb{k}} V_{u,v}) q^u t^v.$$

この記法の下で $\dim_{q,t}(X^{\oplus a(q,t)}) = a(q,t) \dim_{q,t} V$ である．最後に二重次数付き $\mathbb{k}$ -ベクトル空間 V の制限 $\mathbb{k}$ 双対 $\mathbb{D}(V)$ を $\mathbb{D}(V)_{u,v} := \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V_{-u,-v}, \mathbb{k})$ ($(u,v) \in \mathbb{Z}^2$) で定める．各次数成分 $V_{u,v}$ が $\mathbb{k}$ 上有限次元であるとき自然な同型 $\mathbb{D}^2(V) \cong V$ があり次の等式がある：

$$\dim_{q,t} \mathbb{D}(V) = \dim_{q^{-1},t^{-1}} V.$$

2.2. 二重次数付き簍とその関係式付き道代数の二重次数付き加群． 簍とは向き付けられたグラフのことであり，より形式的には頂点の集合 Q_0 ，矢印の集合 Q_1 ，矢印の始点 (resp. 終点) をさだめる写像 $s: Q_1 \rightarrow Q_0$ (resp. $t: Q_1 \rightarrow Q_0$) の四つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことである．簍 Q に写像 $\deg: Q_1 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ を備えたものを二重次数付き簍と呼ぶ．

簍 Q に対して $\mathbb{k}Q_0 := \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{k}e_i$ と $\mathbb{k}Q_1 := \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathbb{k}\alpha$ を定義する．この $\mathbb{k}Q_0$ に $\mathbb{k}$ -代数の構造が $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}e_i$ ($\forall i, j \in Q_0$) で定まり， $\mathbb{k}Q_1$ に $(\mathbb{k}Q_0, \mathbb{k}Q_0)$ -両側加群の構造が各 $i \in Q_0$ と各 $\alpha \in Q_1$ に対する $e_i \cdot \alpha = \delta_{i,t(\alpha)}\alpha$ および $\alpha \cdot e_i = \delta_{i,s(\alpha)}\alpha$ で定まる．簍 Q に対してその道代数を $\mathbb{k}Q := T_{\mathbb{k}Q_0}(\mathbb{k}Q_1)$ で定める．簍 Q が二重次数付きであるとき，その道代数 $\mathbb{k}Q$ は $\deg(e_i) = (0,0)$ ($\forall i \in Q_0$) なる二重次数付き $\mathbb{k}$ -代数の構造をもつ．

代数 A を簍 Q の道代数 $\mathbb{k}Q$ の商代数として得られる $\mathbb{k}$ -代数とする．本稿では単に A -加群 M というと左 A -加群を指すことにする．左 A -加群 M は $M = \bigoplus_{i \in Q_0} e_i M$ なるベクトル空間としての直和分解をもつ．簍 Q が二重次数付きであり A にそこから誘導される二重次数付き $\mathbb{k}$ -代数の構造が入る状況を考える．二重次数付き A -加群 M と N に対して $\text{Hom}_A(M, N)$ で斉次な A -準同型の空間， $\text{Ext}_A^m(M, N)$ でその m -次のコホモロジーを指すことにする．これらを用いて二重次数付き $\mathbb{k}$ -ベクトル空間 $\text{hom}_A(M, N)$ と $\text{ext}_A^m(M, N)$ をそれぞれ各 $u, v \in \mathbb{Z}$ に対する次数成分が次のようになるように定める：

$$\text{hom}_A(M, N)_{u,v} := \text{Hom}_A(q^u t^v M, N) \quad \text{と} \quad \text{ext}_A^m(M, N)_{u,v} := \text{Ext}_A^m(q^u t^v M, N).$$

3. 一般化前射影代数の二重次数付き表現論と変形 CARTAN 行列

3.1. 一般化前射影代数． 複素有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して， $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ を Cartan 行列とし $n := \#I$ とおく．相異なる $i, j \in I$ に対して，同値関係 $i \sim j$ を $c_{ij} < 0$ で定める．単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して定数 r を次で定義する：

$$r := \begin{cases} 1 & (\mathfrak{g}: A_n, D_n, E_{6,7,8} \text{ 型}), \\ 2 & (\mathfrak{g}: B_n, C_n, F_4 \text{ 型}), \\ 3 & (\mathfrak{g}: G_2 \text{ 型}). \end{cases}$$

対角行列 $D = \text{diag}(d_i \mid i \in I)$ を C の左極小対角化行列とする．つまり $(d_i)_{i \in I}$ は I で添字づけられる組で $d_i c_{ij} = d_j c_{ji}$ を $i, j \in I$ に対して満たす互いに素な正整数の組とする．各 $i \in I$ に対して $d_i \in \{1, r\}$ であり，次の関係を満たす：

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j), \\ -[d_j/d_i] & (i \sim j), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

各 $i, j \in I$ に対して， $b_{ij} := d_i c_{ij}$ とおく．このとき $b_{ij} = b_{ji}$ であり次の等式を得る：

$$b_{ij} = -d_i [d_j/d_i] = -\max(d_i, d_j) \quad (i \sim j).$$

本稿で扱われる単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の型に応じて決まる定数たちを次の表 (Table 1) でまとめておく．定数 h は Coxeter 数， $h^\vee$ は双対 Coxeter 数と呼ばれる：

r	type of $\mathfrak{g}$	$(d_i)_{i \in I}$	h	$h^\vee$
1	A_n	$(1, \dots, 1)$	$n+1$	$n+1$
	D_n	$(1, \dots, 1)$	$2n-2$	$2n-2$
	$E_{6,7,8}$	$(1, \dots, 1)$	$12, 18, 30$	$12, 18, 30$
2	B_n	$(2, \dots, 2, 1)$	$2n$	$2n-1$
	C_n	$(1, \dots, 1, 2)$	$2n$	$n+1$
	F_4	$(2, 2, 1, 1)$	12	9
3	G_2	$(3, 1)$	6	4

TABLE 1. 単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する定数たち

任意の単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して籠 $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, s, t)$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_0 &= I, \quad \tilde{Q}_1 = \{\alpha_{ij} \mid (i, j) \in I \times I, i \sim j\} \cup \{\varepsilon_i \mid i \in I\}, \\ s(\alpha_{ij}) &= j, \quad t(\alpha_{ij}) = i, \quad s(\varepsilon_i) = t(\varepsilon_i) = i.\end{aligned}$$

また、籠 $\tilde{Q}$ に二重次数を次で定める：

$$\deg(\alpha_{ij}) := (b_{ij}, 1) = (-\max(d_i, d_j), 1), \quad \deg(\varepsilon_i) := (b_{ii}, 0) = (2d_i, 0). \quad (3.1)$$

符号 $\omega_{ij} \in \{1, -1\}$ を各 $(i, j) \in I \times I$ に対して $i \sim j$ なら $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ なるように選ぶ. これらの記号の下で $\mathbb{k}$ -代数 $\tilde{\Pi}$ を関係式付き籠として次で定める：

$$\begin{aligned}(\text{R1}) \quad & \varepsilon_i^{-c_{ij}} \alpha_{ij} = \alpha_{ij} \varepsilon_j^{-c_{ji}} \quad (\forall i \sim j); \\ (\text{R2}) \quad & \sum_{j \in I: j \sim i} \sum_{k=0}^{-c_{ij}-1} \omega_{ij} \varepsilon_i^k \alpha_{ij} \alpha_{ji} \varepsilon_i^{-c_{ij}-1-k} = 0 \quad (\forall i \in I).\end{aligned}$$

これらは斉次関係式なので $\tilde{\Pi}$ には (3.1) による二重次数付き $\mathbb{k}$ -代数の構造が定まる. ($\tilde{\Pi}$ は同型を除いて符号 $\{\omega_{ij}\}_{i \sim j}$ の取り方には依存しない). 関係式 (R1) によって次の元 ε は $\tilde{\Pi}$ の中心に入り、次数 $(2r, 0)$ を持つ斉次元である：

$$\varepsilon := \sum_{i \in I} \varepsilon_i^{r/d_i} e_i.$$

各正整数 ℓ に対して、次の商で定義される代数 $\Pi(\ell)$ を考える：

$$\Pi(\ell) := \tilde{\Pi} / \varepsilon^\ell \tilde{\Pi}.$$

代数 $\Pi(\ell)$ は $\mathbb{k}\tilde{Q}$ の次数付けから定まる自然な次数付けを持つ. この代数 $\Pi(\ell)$ を一般化前射影代数と呼ぶ. この $\Pi(\ell)$ は [GLS17, §11] による結果から $\mathbb{k}$ 上有限次元であることが知られている. 本稿では $\Pi(\ell)$ の表現論に関して一般の ℓ に関して成り立つ性質を主に扱うため、以降では簡単のため $\Pi(\ell)$ を Π で表すことにする.

注 3.1. ここでの代数 Π は [GLS17] による一般化前射影代数の記法においては Langlands 双対に対応する型の代数 $\Pi({}^t C, \ell r D^{-1}, \Omega)$ と同一視される. ここで $\Omega := \{(i, j) \in I \times I \mid i \sim j, \omega_{ij} = 1\}$ は $\{\omega_{ij}\}_{i \sim j}$ に対応する向き付けである. ($r D^{-1} = \text{diag}(r/d_i \mid i \in I)$ は転置した Cartan 行列 ${}^t C = (c_{ji})_{i, j \in I}$ の左極小対角化行列である).

定義から $\tilde{\Pi}$ には次で与えられる $\mathbb{k}$ -代数の anti-involution $\phi: \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}^{\text{op}}$ がある：

$$\phi(e_i) := e_i, \quad \phi(\alpha_{ij}) := \alpha_{ji}, \quad \phi(\varepsilon_i) := \varepsilon_i.$$

二重次数付き $\tilde{\Pi}$ -加群 M に対して $\mathbb{D}(M)$ の二重次数付き左 $\tilde{\Pi}$ -加群の構造を自然な右加群の構造を ϕ で twist して与える．各次数成分 $M_{u,v}$ が有限次元のときは自然な二重次数付き $\tilde{\Pi}$ 加群としての同型 $\mathbb{D}^2(M) \cong M$ がある．この anti-involution ϕ とそこから誘導される加群の同型は自然に Π とその加群へも誘導される．有限次元二重次数付き Π -加群のなす圏を $\mathcal{C}(\Pi)$ で表す．制限 $\mathbb{k}$ 双対 $\mathbb{D}$ は $\mathcal{C}(\Pi)$ の反変 $\mathbb{k}$ 双対を与える．

各 $i \in I$ に対して、

- S_i を $(0, 0)$ に次数成分をもつ $\mathcal{C}(\Pi)$ の単純対象とする；
- $P_i := \Pi e_i = (\tilde{\Pi}/\tilde{\Pi}\varepsilon_i^{\ell r/d_i})e_i$ で $\mathcal{C}(\Pi)$ における S_i の射影被覆とする；
- $I_i := \mathbb{D}(P_i)$ で $\mathcal{C}(\Pi)$ における S_i の移入包絡とする；
- E_i で P_i の商加群であって各 $j \neq i$ に対して $e_j E_i = 0$ を満たすもので極大なものとする．この加群 E_i を $i \in I$ に対する一般化単純加群と呼ぶ；
- 同様に $\mathcal{C}(\Pi^{\text{op}})$ における一般化単純加群を定義し E'_i で表す．

各 $i \in I$ に対して多項式環 $\mathbb{k}[\varepsilon_i]$ に $\deg(\varepsilon_i) = (2d_i, 0)$ で与えられる二重次数付けを定める．各正整数 ℓ について $H_i(\ell) := \mathbb{k}[\varepsilon_i]/(\varepsilon_i^{\ell r/d_i})$ とおく．各 Π -加群 M と各 $i \in I$ について部分空間 $e_i M$ は自然に $H_i(\ell)$ -加群の構造を持つ．一般化前射影代数 Π の定義から $e_i E_i \cong H_i$ は二重次数付き $H_i(\ell)$ -加群である．本稿ではこれ以降 $H_i(\ell)$ を H_i で表すことにする．

3.2. 変形 Cartan 行列. 不定元 q と t を取る．整数 k に対して q -整数を次で定める：

$$[k]_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}].$$

Frenkel-Reshetikhin [FR98] は変形 Cartan 行列と呼ばれる次の $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ -値 $I \times I$ -行列 $C(q, t)$ を定義した．その (i, j) -成分 $C_{ij}(q, t)$ は次で与えられる：

$$C_{ij}(q, t) := \begin{cases} q^{d_i} t^{-1} + q^{-d_i} t & (i = j), \\ [c_{ij}]_q & (i \neq j). \end{cases}$$

特殊化 $(q, t) \rightarrow (1, 1)$ によって $C(1, 1) = C$ を得るという意味でこの定義は Cartan 行列の q, t -変形を与えている．任意の $\mathfrak{g}$ について $[d_i]_q C_{ij}(q, t) = [d_i c_{ij}]_q$ ($i \neq j$) が成り立ち、 $([d_i]_q C_{ij}(q, t))_{i,j \in I}$ は対称行列である．対角行列 $q^{\pm D} := \text{diag}(q^{\pm d_i} \mid i \in I)$ をおく．後で見ると $C(q, t)$ は $GL_I(\mathbb{Z}[[q, t^{-1}]]/(qt^{-1})^{-1})$ の元であるので $\tilde{C}(q, t)$ をその逆行列とする．その各 (i, j) -成分を $\tilde{C}_{ij}(q, t)$ とおき、

$$\tilde{C}_{ij}(q, t) = \sum_{u,v \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{ij}(u, v) q^u t^v$$

と係数 $\tilde{c}_{ij}(u, v) \in \mathbb{Z}$ によって表す．

例 3.2. $C_2 (= B_2)$ 型の例を見る．集合 $I = \{1, 2\}$ と $(d_1, d_2) = (1, 2)$ とおく．Cartan 行列と変形 Cartan 行列は次で与えられる：

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad C(q, t) = \begin{pmatrix} qt^{-1} + q^{-1}t & -(q + q^{-1}) \\ -1 & q^2 t^{-1} + q^{-2}t \end{pmatrix}.$$

サイズが2なので行列式を用いて逆行列を計算できる：

$$\tilde{C}(q, t) = \frac{q^3 t^{-2}}{1 + q^6 t^{-4}} \begin{pmatrix} q^2 t^{-1} + q^{-2} t & q + q^{-1} \\ 1 & q t^{-1} + q^{-1} t \end{pmatrix}.$$

この行列を観察すると例えば次のような数値的な性質を読み取ることができる。

- 係数が周期的である： $(\tilde{c}_{ij}(u+6, -v-4) = -\tilde{c}_{ij}(u, -v) \ (\forall i, j \in I, \forall u, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ ；
- 行列 $(\det C(q, t))\tilde{C}(q, t)$ の成分が $(q, t) \leftrightarrow (q^{-1}, t^{-1})$ の入れ替えで不変であり、また各成分を多項式として見ると各項が係数の正値性を満たす。

一般化前射影代数の表現論による解釈を経由して、一般の単純 Lie 代数に付随する変形 Cartan 行列に対して上に挙げたような性質が満たされることを理解することが本稿の目標である。

3.3. Grothendieck 群と Euler-Poincaré 原理. アーベル圏 $\mathcal{C}(\Pi)$ に対してその Grothendieck 群を $K(\Pi)$ とおく。対象 $M \in \mathcal{C}(\Pi)$ に対して $[M] \in K(\Pi)$ でその同型類を表す。Grothendieck 群 $K(\Pi)$ には次数シフト関手によって自然な $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ -加群の構造が定まる： $q[M] := [qM]$ および $t[M] := [tM]$ と各 $M \in \mathcal{C}(\Pi)$ に対して定める。この下で $K(\Pi)$ は自由 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ -加群であり $\{[S_i]\}_{i \in I}$ を自由基底にもつ。係数の局所化を考える：

$$K(\Pi)_{loc} := K(\Pi) \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]} \mathbb{Q}(q, t).$$

簡単のために $[M]$ は $[M] \otimes 1 \in K(\Pi)_{loc}$ を表すことにする。一般化単純加群の定義から各 $i \in I$ に対して次が成り立つ：

$$[E_i] = \frac{1 - q^{2\ell_i}}{1 - q^{2d_i}} [S_i] \in K(\Pi).$$

こうして $K(\Pi)_{loc}$ の基底 $\{[E_i]\}_{i \in I}$ が得られる。

次に $\mathcal{C}(\Pi)$ の対象の組 (M, N) についてそれらの **Euler-Poincaré ペアリング**を次で well-defined に定義することができる：

$$\begin{aligned} \langle M, N \rangle_{q, t} &:= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \dim_{q, t} \text{ext}_{\Pi}^m(M, N) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{u, v \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^u t^v \dim_{\mathbb{k}} \text{Ext}_{\Pi}^m(q^u t^v M, N). \end{aligned}$$

変数 $q^{\pm 1}, t^{\pm 1}$ に関する形式的冪級数としてこのペアリングが意味をもつには、各 $u, v \in \mathbb{Z}$ に対して十分高い次数 m に対する各コホモロジー “ $\text{Ext}_{\Pi}^m(q^u t^v M, N)$ ” が常に消滅していれば十分であるが、この条件は我々の二つの次数を考えている状況ではいつでも満たされている。特にこのペアリングは Grothendieck 群でのクラス $[M], [N] \in K(\mathcal{C}(\Pi))$ のみによって決まる。

Euler-Poincaré ペアリングの定義により、各 $i, j \in I$ に対して $\langle P_i, S_j \rangle_{q, t} = \delta_{ij}$ が成り立つことが簡単に分かる。つまり直既約射影加群たちはペアリングを介して $\{S_i\}_{i \in I}$ と双対的である。Geiß-Leclerc-Schröer による一般化前射影代数の表現論とルート系に関するデータの結びつきは $\{E_i\}_{i \in I}$ を完全圏の意味での単純対象とするような部分圏の分析に基づいていることから、ペアリングに関して $\{E_i\}_{i \in I}$ と双対的だとみなされる対象を考えたい。それは次のような加群 $\tilde{I}_i$ たちによって与えられる：

各 $i \in I$, 二次数付き $\tilde{\Pi}$ -加群 $\tilde{I}_i$ を次で定める：

$$\tilde{I}_i := \mathbb{D}((\tilde{\Pi}/\tilde{\Pi}\varepsilon_i)e_i).$$

あるいは任意の $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ について $\varepsilon^\ell \tilde{\Pi} e_i \subset \tilde{\Pi} e_i \cap \tilde{\Pi} \varepsilon_i$ であることに注意すると、次のように移入加群によって定まる完全列によって定義を言い換えることもできる：

$$0 \rightarrow \tilde{I}_i \rightarrow I_i \xrightarrow{\cdot \varepsilon_i} q^{-2d_i} I_i. \quad (3.2)$$

ここで “ $\cdot \varepsilon_i$ ” は自然な全射 $q^{2d_i} \Pi e_i \xrightarrow{\cdot \varepsilon_i} \Pi \varepsilon_i$ と包含 $\Pi \varepsilon_i \hookrightarrow \Pi e_i$ の合成が双対 $\mathbb{D}$ で写ったものである。この表示から $\tilde{I}_i$ は $\mathcal{C}(\Pi)$ の対象であり、標準的な同型 $\text{hom}_\Pi(M, I_i) \cong \mathbb{D}(e_i M)$ を用いて、

$$\text{hom}_\Pi(M, \tilde{I}_i) \cong \mathbb{D}(e_i(M/\varepsilon_i M)) \cong \text{hom}_{H_i}(e_i M, \mathbb{k}) \quad (3.3)$$

が各 $M \in \mathcal{C}(\Pi)$ に対して成り立つ。この議論から

$$\text{ext}_\Pi^m(E_i, \tilde{I}_j) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & (m=0, i=j), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であり確かに $\langle E_i, \tilde{I}_j \rangle_{q,t} = \delta_{ij}$ が理解できる。

4. 変形 CARTAN 行列の表現論的な解釈

4.1. 1 次の両側加群と鏡映関手。一般化前射影代数は我々の二種類の次数付けのうち t -次数に関して非負の次数にのみ次数成分を持ち $\prod_{i \in I} H_i$ 上のテンソル代数として表されることが知られている。したがってその 1 次の部分、すなわち各 $i, j \in I$ ($i \sim j$) に対して定義される二重次数付き (H_i, H_j) -両側加群 ${}_i H_j := H_i \alpha_{ij} H_j \subset \Pi$ たちの構造に基づいて射影分解などを理解することが第一歩である。関係式 (R1) から

$${}_i H_j = \bigoplus_{k=0}^{-c_{ji}-1} H_i(\alpha_{ij} \varepsilon_j^k) = \bigoplus_{k=0}^{-c_{ij}-1} (\varepsilon_i^k \alpha_{ij}) H_j$$

であり、 ${}_i H_j$ は左自由 H_i -加群であり右自由 H_j -加群である (cf. [GLS17, §5.1])。この自由加群の次数付けはよく見ると変形 Cartan 行列の成分によって与えられることが簡単に計算できる：

補題 4.1. 各 $i, j \in I$ ($i \sim j$) に対して、次の 2 つのそれぞれ二重次数付き左 H_i -加群、二重次数付き右 H_j -加群としての同型がある：

$$H_i({}_i H_j) \cong H_i^{\oplus(-q^{-d_j} t C_{ji}(q,t))}, \quad ({}_i H_j)_{H_j} \cong H_j^{\oplus(-q^{-d_i} t C_{ij}(q,t))}.$$

前節 3.3 での Euler-Poincaré ペアリングを用いて、加群圏での適切な完全列の存在と加群の次数付けに関する構造から変形 Cartan 行列に関係する等式を復元することがここで目指したい目標である。一般化前射影代数上の加群の構造を変形 Cartan 行列のデータと結びつけるために、表現論を上記の両側加群の構造を土台として理解したい。そのため次の二重次数付き両側イデアル $J_i := \Pi(1 - e_i)\Pi$ ($i \in I$) とそれによって定義される関手を考える。この両側イデアルは $J_i = (\bigoplus_{j \neq i} P_j) \oplus J_i e_i$ なる直既約分解をもち、一般化単純加群の極小射影表示の核を考えることで自然に現れる。すなわち

$$P_2^{(i)} \xrightarrow{\psi^{(i)}} P_1^{(i)} \xrightarrow{\varphi^{(i)}} P_0^{(i)} \rightarrow E_i \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

ただし

$$P_0^{(i)} = P_i, \quad P_1^{(i)} = \bigoplus_{j \sim i} P_j^{\oplus(-q^{-d_i} t C_{ij}(q,t))}, \quad P_2^{(i)} = q^{-2d_i} t^2 P_i$$

なる完全列があり, $\varphi^{(i)}$ の象として $J_i e_i$ が現れる. この種の完全列を右加群の圏で考えることで次を得る:

$$q^{-2d_i} t^2 e_i \Pi \rightarrow \bigoplus_{j \sim i} H_j \otimes_j e_j \Pi \rightarrow e_i J_i \rightarrow 0.$$

また加群 $M \in \mathcal{C}(M)$ による関手 $(-) \otimes_{\Pi} M$ を上記の完全列に施すと次を得る:

$$q^{-2d_i} t^2 e_i M \xrightarrow{\zeta} \bigoplus_{j \sim i} H_j \otimes_j e_j M \rightarrow e_i J_i \otimes_{\Pi} M \rightarrow 0.$$

この中の写像 ζ は一般には単射ではないが $M' = e_i M'$ を満たす M の部分加群 M' が $\{0\}$ しかない状況ではいつでも単射である. その加群 M の典型的な場合として一般化単純加群を考える. すなわち $i \neq j$ に対して $K(\Pi)_{loc}$ の中で次を得る:

$$[J_i \otimes_{\Pi} E_j] = [E_j] - q^{-d_j} t C_{ji}(q, t) [E_i].$$

この関係式は $[E_i]$ をコルートと見立てたときに Weyl 群の単純鏡映による格子への作用を変数変形したようなものとなっていることが分かる.

実際 n 次元 $\mathbb{Q}(q, t)$ -ベクトル空間

$$\mathfrak{h}_{q,t}^* := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}(q, t) \alpha_i$$

に対して $\alpha_i^{\vee} := q^{-d_i} t \alpha_i / [d_i]_q$ で与えられる基底 $\{\alpha_i^{\vee}\}_{i \in I}$ を考えると, 次で定義される $\mathfrak{g}$ の Coxeter 系に付随する braid 群 $B_{\mathfrak{g}}$ の作用が得られる:

$$T_i \alpha_j^{\vee} := \alpha_j^{\vee} - q^{-d_j} t C_{ji}(q, t) \alpha_i^{\vee}.$$

(ここで群 $B_{\mathfrak{g}}$ は $\{T_i\}_{i \in I}$ で生成され

$$\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i & (c_{ij} = 0), \\ T_i T_j T_i &= T_j T_i T_j & (c_{ij} c_{ji} = 1), \\ (T_i T_j)^r &= (T_j T_i)^r & (c_{ij} c_{ji} = r > 1) \end{aligned}$$

を関係式にもつ群である).

つまり話を一般化前射影代数の加群の世界に戻すと, n 次元 $\mathbb{Q}(q, t)$ -ベクトル空間 $K(\Pi)_{loc}$ と $\mathfrak{h}_{q,t}^*$ のそれぞれの基底 $\{[E_i]\}_{i \in I}$ と $\{\alpha_i^{\vee}\}_{i \in I}$ を同一視することで

$$T_i [E_j] = [J_i \otimes_{\Pi} E_j]$$

という等式が成り立っている. この種の加群圏の Coxeter 系 $(W_{\mathfrak{g}}, \{s_i\}_{i \in I})$ に関する対称性は Weyl 群の元の最短表示の長さを増やしていく方向には拡張することができる. すなわち Weyl 群 $W_{\mathfrak{g}}$ と両側イデアルの積で生成される半群 $\langle J_i \mid i \in I \rangle$ の間には $W_{\mathfrak{g}}$ の各元 w の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ を $J_{i_1} \cdots J_{i_l}$ に写すことで well-defined に定義される全単射 (cf. [FG19]) があり, $K(\Pi)_{loc}$ における等式

$$T_{i_1} \cdots T_{i_{l-1}} [E_{i_l}] = [J_{i_1} \cdots J_{i_{l-1}} \otimes_{\Pi} E_{i_l}] \quad (4.2)$$

が成り立っている.

また, 一般化単純加群は Πe_i の $J_i e_i$ による部分商で表されるが, braid 群作用を用いた関係式を利用してこの部分商を最短表示に応じて伸ばすある種の拡張を考えることもできる: まず

$W_{\mathfrak{g}}$ の最長元の最短表示 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ に対して $\{0\} = J_{i_l} \cdots J_{i_1} \subseteq \cdots \subseteq J_{i_k} \cdots J_{i_1} \subseteq \cdots \subseteq \Pi$ という二重次数付き両側イデアルの上昇列があり、各商が右加群として次を満たす：

$$J_{i_{k-1}} \cdots J_{i_1} / J_{i_k} \cdots J_{i_1} \cong E'_{i_k} \otimes_{\Pi} J_{i_{k-1}} \cdots J_{i_1} \quad \text{in } \mathcal{C}(\Pi^{\text{op}}).$$

今 $\mathfrak{h}_{q,t}^*$ に $(\alpha_i, \alpha_j)_{q,t} := [d_i]_q C_{ij}(q, t)$ なるペアリングを定めると、各 $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{q,t}^*$ と各 $i \in I$ に対して $(T_i \lambda, \mu)_{q,t} = (\lambda, T_i \mu)_{q,t}$ を満たす。等式 (4.2) (の右加群版) の $[E_i]$ の係数を $(-, -)_{q,t}$ を用いて表すことで左加群 $J_{i_{k-1}} \cdots J_{i_1} e_i / J_{i_k} \cdots J_{i_1} e_i$ の二重次数付き次元を計算できる。この加群がある $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ を用いて $E_{i_k}^{\oplus a}$ と同型であるという事実を今計算された二重次数付き次元に照らすことで a を求めることができ次を得る：

$$J_{i_{k-1}} \cdots J_{i_1} e_i / J_{i_k} \cdots J_{i_1} e_i \cong E_{i_k}^{\oplus (\varpi_i^{\vee}, T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \alpha_{i_k})_{q,t}}.$$

ここで $\{\varpi_i^{\vee}\}_{i \in I}$ は $(-, -)_{q,t}$ に関する $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ の双対基底である。こうした射影加群の部分構造の分析と Π がそれ自身左加群として移入的であるという事実と braid 群作用に関する事実 $T_{w_0} \alpha_i = -q^{-r h^{\vee}} t^h \alpha_{i^*}$ ($\forall i \in I$) から次を得る：

命題 4.2. 各 $i \in I$ に対して次がなりたつ：

(1) $K(\Pi)_{\text{loc}}$ において次の等式が成り立つ：

$$[P_i] = \sum_{k=1}^l (\varpi_i^{\vee}, T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \alpha_{i_k})_{q,t} [E_{i_k}] \quad (4.3)$$

である。ただし $(i_1, \dots, i_l)$ は Weyl 群 $W_{\mathfrak{g}}$ の最長元 w_0 の最短表示である。

(2) 直既約射影加群 P_i の部分加群で E_{i^*} の次数シフトと同型なものはただ一つであり、それは $q^{2d_i - r h^{\vee}} t^{-2+h} E_{i^*}$ と同型である。 i^* は単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基本ウェイトへの Weyl 群の最長元の作用 $w_0(\varpi_i) = -\varpi_{i^*}$ によりさだまる I の元である。

命題 4.2 から分かることを考えてみたい。特に我々は Euler-Poincaré ペアリングに関して一般化単純加群と双対的な加群 $\bar{I}_i$ を理解したのであった。同型 (3.3) において $M = P_i$ とすることで (1) とは独立な次の等式が得られる：

$$[P_i] = \sum_{j \in I} \dim_{q^{-1}, t^{-1}}(e_i \bar{I}_j) [E_j]. \quad (4.4)$$

等式 (4.3) と (4.4) を比較することで

$$\dim_{q^{-1}, t^{-1}}(e_i \bar{I}_j) = \sum_{k: i_k = j} (\varpi_i^{\vee}, T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \alpha_j)_{q,t} \quad (4.5)$$

を得る。また、(2) と $\bar{I}_i$ の特徴付けから $\bar{I}_i$ が次数成分をどこに持つのかを理解することができる：一般化単純加群の定義から次の二つの完全列がある：

$$q^{2d_i} E_i \rightarrow E_i \rightarrow S_i \rightarrow 0; \quad (4.6)$$

$$0 \rightarrow q^{2(\ell r - d_i)} S_i \rightarrow E_i \rightarrow q^{-2d_i} E_i. \quad (4.7)$$

二重次数付き自己準同型環 $(\text{end}_{\Pi} \Pi e_i)^{\text{op}}$ の中で $\cdot \varepsilon_i$ で生成される代数は H_i^{op} と二重次数付き代数として同型であり、 Πe_i は (Π, H_i) -両側加群である。 Π はそれ自身移入的でありその中山置換が $*$ で与えられるという事実から、完全列 (4.7) と (2) より $\Pi e_i \cong q^{r(2\ell - h^{\vee})} t^{h-2} \mathbb{D}(\Pi e_{i^*})$ である。この同型を介して $\mathbb{D}(\Pi e_{i^*})$ には (Π, H_i) -両側加群の構造が入る。よって完全列 (4.7) に

$\mathbb{D}(\Pi e_{i^*}) \otimes_{H_i} -$ を施し, 完全列 (3.2) と比較して $\bar{I}_{i^*} \cong q^{2(\ell r - d_i)} \mathbb{D}(\Pi e_{i^*}) \otimes_{H_i} S_i$ である. まとめると

$$\mathbb{D}(\bar{I}_i) \stackrel{(3.2)(4.6)}{\cong} \Pi e_i \otimes_{H_i} S_i \cong q^{r(2\ell - h^\vee)} t^{h-2} \mathbb{D}(\Pi e_{i^*}) \otimes_{H_i} S_i \cong q^{2d_i - rh^\vee} t^{h-2} \bar{I}_{i^*} \quad (4.8)$$

を得る. 等式 (4.5) と同型 (4.8) から, 各 $i, j \in I$ について $(\varpi_i^\vee, T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \alpha_j)_{q,t} \in q^{d_j - d_i} \mathbb{Z}[q^{-1}, t]$ というペアリングに関する事実より次を得る:

$$q^{d_j} t^{-1} \dim_{q,t} e_i \bar{I}_j \in (q^{d_i} t^{-1} \mathbb{Z}[q, t^{-1}]) \cap (q^{rh^\vee - d_i} t^{-h+1} \mathbb{Z}[q^{-1}, t]). \quad (4.9)$$

4.2. 一般化単純加群の射影分解と Euler-Poincaré 原理の帰結. 命題 4.2(1) から完全列 (4.1) において $\ker \psi^{(i)} \cong q^{-rh^\vee} t^h E_{i^*}$ である. 特に完全列 (4.1) は $P_{k+3}^{(i)} = q^{-rh^\vee} t^h P_k^{(i^*)}$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を用いて次のように拡張される:

$$\cdots \rightarrow P_3^{(i)} \rightarrow P_2^{(i)} \rightarrow P_1^{(i)} \rightarrow P_0^{(i)} \rightarrow E_i \rightarrow 0.$$

このことから各 $i, j \in I$ と各 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つ:

- $\dim_{q,t} \text{ext}_{\Pi}^{m+3}(E_i, S_j) = q^{rh^\vee} t^{-h} \dim_{q,t} \text{ext}_{\Pi}^m(E_{i^*}, S_j).$
- $\dim_{q,t} \text{ext}_{\Pi}^m(E_i, S_j) = \begin{cases} \delta_{ij} & (m=0), \\ (\delta_{ij} - 1) q^{d_i} t^{-1} C_{ij}(q, t) & (m=1), \\ \delta_{ij} q^{2d_i} t^{-2} & (m=2). \end{cases}$

これらによって次のように Euler-Poincaré ペアリングが計算できる:

$$\langle E_i, S_j \rangle_{q,t} = \frac{q^{d_i} t^{-1}}{1 - (q^{rh^\vee} t^{-h})^2} \left(C_{ij}(q, t) - q^{rh^\vee} t^{-h} C_{i^*j}(q, t) \right) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}][[t^{-1}]].$$

この等式を行列で表すと

$$(\langle E_i, S_j \rangle_{q,t})_{i,j \in I} = \frac{q^D t^{-1} (\text{id} - q^{rh^\vee} t^{-h} \nu)}{1 - (q^{rh^\vee} t^{-h})^2} C(q, t) \quad (4.10)$$

である. ここで $\nu := (\delta_{ij^*})_{i,j \in I}$ なる置換行列を用いている. ここで各 $i, j \in I$ について

$$\delta_{ij} = \langle P_i, S_j \rangle_{q,t} \stackrel{(4.4)}{=} \sum_{k \in I} (\dim_{q,t} e_i \bar{I}_k) \langle E_k, S_j \rangle_{q,t}$$

であるから $(\langle E_i, S_j \rangle_{q,t})_{i,j \in I} \in GL_I(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}][[t^{-1}]])$ に関する次の等式を得る:

$$\begin{aligned} \text{id} &= (\dim_{q,t} e_i \bar{I}_j)_{i,j \in I} (\langle E_i, S_j \rangle_{q,t})_{i,j \in I} \\ &\stackrel{(4.10)}{=} \frac{1}{1 - (q^{rh^\vee} t^{-h})^2} (\dim_{q,t} e_i \bar{I}_j)_{i,j \in I} q^D t^{-1} (\text{id} - q^{rh^\vee} t^{-h} \nu) C(q, t). \end{aligned}$$

この等式から逆行列 $\tilde{C}(q, t)$ を表す:

$$\tilde{C}(q, t) = \frac{1}{1 - (q^{rh^\vee} t^{-h})^2} (\dim_{q,t} e_i \bar{I}_j)_{i,j \in I} q^D t^{-1} (\text{id} - q^{rh^\vee} t^{-h} \nu).$$

以上から次を得る:

- 各 $i, j \in I$ に対して

$$\tilde{C}_{ij}(q, t) = \frac{q^{d_j} t^{-1}}{1 - (q^{rh^\vee} t^{-h})^2} \left(\dim_{q,t} e_i \bar{I}_j - q^{rh^\vee} t^{-h} \dim_{q,t} e_i \bar{I}_{j^*} \right); \quad (4.11)$$

• 各 $i, j \in I$ に対して $\dim_{q,t} e_i \bar{I}_j \stackrel{(4.9)}{=} q^{-d_j t} \sum_{u=0}^{rh^\vee} \sum_{v=0}^h \tilde{c}_{ij}(u, -v) q^u t^{-v}$.
 ここのまでの本稿の議論から次の主定理を得る：

定理 4.3. 各係数たち $\{\tilde{c}_{ij}(u, v)\}_{i,j \in I, u, v \in \mathbb{Z}}$ は次を満たす：

- (1) $\tilde{c}_{ij}(u, v) = -\tilde{c}_{ij^*}(u + rh^\vee, v - h) \quad (\forall u \geq 0, \forall v \leq 0);$
- (2) $\tilde{c}_{ij}(u, v) \geq 0 \quad (\forall 0 \leq u \leq rh^\vee, \forall -h \leq v \leq 0);$
- (3) $\tilde{c}_{ij}(rh^\vee - u, -h - v) = \tilde{c}_{ij^*}(u, v) \quad (\forall 0 \leq u \leq rh^\vee, \forall -h \leq v \leq 0).$

定理 4.3 の変形 Cartan 行列の逆行列の成分の性質はそれぞれおよそ、(1) 一般化単純加群の極小射影分解の周期性；(2) 変形 Cartan 行列の逆行列の成分が二重次数付き加群の二重次数付き次元として生じること；(3) 二重次数付き加群 $\bar{I}_i$ の $\mathbb{D}$ に関する“双対性”(4.8) の数値的帰結だと思えることができる。

注 4.4. 定理 4.3 の $q \rightarrow 1$ の特殊化をおこなった場合の結果は柏原-Oh[KO22] によって一般化前射影代数の表現論を用いない手法で独立に示されている。

以上の議論の応用として一般化前射影代数の表現論に依存しない組み合わせ論的な公式を証明することができる：Weyl 群 $W_{\mathfrak{g}}$ の最長元 w_0 の最短表示 $(i_1, \dots, i_l)$ を取る．この最短表示を $i_{k+l} = i_k^* \ (\forall k \in \mathbb{Z}_{>0})$ となるように形式的に拡張した無限列 $(i_k)_{k \in \mathbb{Z}_{>0}}$ を考える．このとき $a(q, t) := a(q^{-1}, t^{-1})$ の下で $(\varpi_i^\vee, T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \alpha_j)_{q,t} = (\varpi_i^\vee, T_{i_1}^{-1} \cdots T_{i_{k-1}}^{-1} \alpha_j)_{q,t} \ (\forall k \in \mathbb{Z}_{>0})$ に注意して次を得る：

$$\tilde{c}_{ij}(q, t) \stackrel{(4.5)(4.11)}{=} q^{d_j} t^{-1} \sum_{k>0, i_k=j} (\varpi_i^\vee, T_{i_1}^{-1} \cdots T_{i_{k-1}}^{-1} \alpha_j)_{q,t} \quad (\forall i, j \in I). \quad (4.12)$$

等式 (4.12) は $\mathfrak{g}$ が $A_n, D_n, E_{6,7,8}$ 型で $(i_1, \dots, i_l)$ が Dynkin 籐に adapted であるという特別な最短表示である場合に Hernandez-Leclerc [HL15, Proposition 2.1] によって Dynkin 籐の導来圏の Auslander-Reiten 理論を用いて証明されている。

謝辞

研究集会「表現論とその周辺分野における諸問題」でお世話になった世話人の直井克之先生，参加者の皆様に感謝申し上げます．また共同研究において筆者に多くのことを学ばせてくださった藤田遼さんに感謝申し上げます．本研究は JSPS 科研費 JP21J14653, JSPS 二国間交流事業 JPJSBP120213210, 京都大学スーパーグローバル大学創成支援事業の助成を受けています．

REFERENCES

- [FG19] C. Fu and S. Geng, *Tilting modules and support τ -tilting modules over preprojective algebras associated with symmetrizable Cartan matrices*, *Algebr. Represent. Theory* **22** (2019), no. 5, 1239–1260. MR4026632
- [FM21] R. Fujita and K. Murakami, *Deformed Cartan Matrices and Generalized Preprojective Algebras I: Finite Type*, 2021. Preprint, [arXiv:2109.07985v3](https://arxiv.org/abs/2109.07985v3), to appear in *Int. Math. Res. Not. IMRN*, doi:10.1093/imrn/rnac054.
- [FR98] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *Deformations of $\mathcal{W}$ -algebras associated to simple Lie algebras*, *Comm. Math. Phys.* **197** (1998), no. 1, 1–32. MR1646483
- [GLS16] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices III: Convolution algebras*, *Represent. Theory* **20** (2016), 375–413. MR3555157

- [GLS17] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, *Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices I: Foundations*, Invent. Math. **209** (2017), no. 1, 61–158. MR3660306
- [GLS18a] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices II: change of symmetrizers*, Int. Math. Res. Not. IMRN **9** (2018), 2866–2898. MR3801499
- [GLS18b] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, *Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices IV: crystal graphs and semicanonical functions*, Selecta Math. (N.S.) **24** (2018), no. 4, 3283–3348. MR3848021
- [GLS18c] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices V: Caldero-Chapoton formulas*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **117** (2018), no. 1, 125–148. MR3830892
- [GLS20] ———, *Rigid modules and Schur roots*, Math. Z. **295** (2020), no. 3-4, 1245–1277. MR4125687
- [HL15] D. Hernandez and B. Leclerc, *Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras*, J. Reine Angew. Math. **701** (2015), 77–126. MR3331727
- [KO22] M. Kashiwara and S. Oh, *The (q, t) -cartan matrix specialized at $q = 1$* , 2022. Preprint, [arXiv:2201.11918v2](https://arxiv.org/abs/2201.11918v2).

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町京都大学 理学研究科/理学部数学教室 (理学部 3 号館)
 Email address: k-murakami@math.kyoto-u.ac.jp