

Magnetic Properties of Superconducting Alloy II.

Abrikosov's Structure

真 木 和 美 (京大理)

(4月1日受理)

1° I では Δ について線型化した式を用いて H_{c2} を求めたけれども、磁場を理論の中に導入するのにいくつかの問題点がある。実際方程式の gauge 不変性の要求からだけでは一意的に式をきめることができず、先きの I の中で用いた式でなくても $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ を含むような任意の項をさらにつけ加えた場合にも、上の不変性の要求は満足している。私の大雑把な評価によると、 $\tau T_{c0} \ll 1$ の極限ではこうした項はすべて τT_{c0} の order になつて無視できるようであるが、この点はまた別の機会に議論することにして、ここでは、まず Δ について三次の項まで含んだような式をみちびくことにする。I に於けると同様にまず磁場がない場合の式をみちびき、磁場の影響はそれから $\vec{q} \rightarrow \vec{q} \pm 2e\vec{A}$ のおきかえによつて考慮することにする。 H_{c2} の近くで $4/\pi T_{c0}$ が小さい parameter と考えられる領域での Abrikosov¹⁾ の構造は上の式を用いると任意の温度でしらべることができる。

2° 磁場がない場合をまず考えるのであるけれども、不純物の効果はかんたんにくりこみの方法によつて理論の中にとり入れることができる。不純物散乱のないときには Δ についての式は Gor'kov²⁾ によると

$$\begin{aligned} \Delta^+(r) &= gT \sum_n \int G_\omega(r, r') G_{-\omega}(r, r') \Delta^+(r') d^3 r' \\ &- gT \sum_n \iiint G_\omega(s, r) G_{-\omega}(s, \ell) G_\omega(m, \ell) G_{-s0} \end{aligned}$$

$$A^+(s) A(\ell) A^+(m) d^3 s d^3 \ell d^3 m, \quad (1)$$

で $\omega = \pi T(2n+1)$, $A(r) = (g | \langle T \phi_{\uparrow}^+(r, t) \phi_{\downarrow}^+(r, t) \rangle$ のような式がえられる。 $G_{\omega}(r, r')$ は正常金属での電子のグリーン関数でその Fourier 変換は $(i\omega_n - \xi)^{-1}$ のようにかける。 $(\xi = \frac{p^2}{2m} - \mu)$,

上の式はダイアグラムを用いて下図の様にかくことができる。不純物が存在



ることができる。

a) 電子のグリーン関数の中の ω を $\tilde{\omega} = \omega \eta_{\omega}$ でおきかえること、ここで

$$\eta_{\omega} = \left(1 + \frac{1}{2\tau |\omega|} \right) \quad \text{で} \quad \tau \text{ は } \tau^{-1} = \frac{nmv^2}{(2\pi)^2} \int |u|^2 d\Omega.$$

b) 各既約な vertex について A_q (又は A_q^+) を $\eta_{\omega q} A_q$ (又は $\eta_{\omega q} A_q^+$) でおきかえること、

$$\text{ここで} \quad \eta_{\omega q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2\tau \tilde{\omega}} \left(1 - \frac{1}{3} \tau^2 v^2 q^2 \right)} \quad \text{で} \quad A_q \text{ は } A(x)$$

の Fourier transform (q は external momentum), v は fermi velocity である。このようにして次の式が得られる。

$$\begin{aligned} A^+(r) = & \frac{mp_0 |g|}{2\pi^2} \left[2\pi T \sum_n \frac{1}{2\omega + \frac{\tau}{3} v^2 q^2} A^+(r) \right. \\ & \left. - 2\pi T \sum_n \prod_{i=1}^4 \frac{1}{(2\omega + \frac{\tau}{3} v^2 q_i^2)} A^+(1) A(2) A^+(3) \right]_{1=2=3=r} \end{aligned} \quad (2)$$

で $\sum_{i=0}^4 \vec{q}_i = 0$ かつ $\vec{q}_i$ は $A(i)$ にだけしか operate しない。さらに、

$$1 = \frac{mp_0 |g|}{2\pi^2} \ln \left(\frac{r\omega_{\nabla}}{\pi T_{c0}} \right) \text{ の関係を用いると (2) 式は}$$

$$\left\{ \ell n \frac{T}{T_{C0}} + f_0 \left[-\frac{\tau v^2}{12\pi T} q^2 \right] \right\} \Delta^\dagger(x) + \frac{1}{8(\pi T)^2} \sum_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\prod_{i=0}^4 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\tau v^2}{12\pi T} q_i^2 \right)^{-1} \right) \Delta(1) \Delta(2) \Delta^\dagger(3) \Big|_{1=2=3=x} = 0 \quad (3)$$

のようになり、 T_{C0} は臨界温度、 $f_0(z) = \varphi\left(\frac{1}{2} + z\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\varphi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ である。(3)式の第一項は頂度 Werthamer³⁾ が proximity effect をしらべた微分方程式と一致している。電流についても同様な手続きで

$$\vec{j}(x) = -\frac{e\tau N}{4\pi T} \sum_n \left\{ \prod_{i=1}^2 \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\tau v^2}{12\pi T} q_i^2 \right)} \right\} (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \Delta(1) \Delta(2) \Big|_{1=2=x} \quad (4)$$

がえられる。I の場合と同様に磁場のある場合には(3)式(4)式は

$$\left\{ \ell n \frac{T}{T_{C0}} + f_0 \left[-\frac{\tau v^2}{12\pi T} (\vec{q} - 2\vec{\ell A})^2 \right] \right\} \Delta^\dagger(x) + \frac{1}{8(\pi T)^2} \sum_n \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\tau v^2}{12\pi T} (\vec{q}_i - 2(-1)^i \vec{e A})^2 \right)} \right\} \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta^\dagger(1) \Delta(2) \Delta^\dagger(3) \Big|_{1=2=3=x} = 0, \quad (5)$$

及び

$$j(x) = -\frac{e\tau N}{4\pi T} \sum_n \left\{ \prod_{i=1}^2 \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\tau v^2}{12\pi T} (q_i - 2(-1)^i e A)^2 \right)} \right\} (\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - 4\vec{e A}) \Delta(1) \Delta(2) \Big|_{1=2=x} \quad (6)$$

のようになる。 T_{C0} の近くでは $\frac{\tau v^2}{12\pi T} (q \pm 2eA)^2$ は小さく、上の式は Gor'kov¹⁾ によつて得られた Ginzburg Landau の方程式系に一致する。

3° Abrikosov¹⁾ が やつたと同様に(5), (6)式の解を変分によつて求めてみ

よう。 H_{c0} においては $\Delta(x) = e^{-eHx^2}$ が解になっていることを I に於いて見た。 H_{c2} の式を解として

$$\Delta(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ikny} \phi_n(x) , \quad (7)$$

$$\phi_n(x) = \exp \left\{ -eH_0 \left(x - \frac{kn}{2eH_0} \right)^2 \right\} , \quad (8)$$

のかたちを仮定しよう。ここで H_0 は external field である。(7)の表式を()式に代入してみると(6)式は

$$\vec{j}(x) = -\frac{e\tau N}{4m\pi T} g(\rho) \left\{ 4e\vec{A} |\Delta|^2 - \frac{1}{i} (\Delta^\dagger \vec{\partial} \Delta - \Delta \vec{\partial} \Delta^\dagger) \right\} , \quad (9)$$

のように簡単になることがわかる。ここに

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2} + z)^2} \quad \text{及び} \quad \rho = \frac{\tau v^2}{6\pi T} eH_0$$

さらに $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 4\pi \vec{j}$ の式をとくと

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = H = H_0 - \frac{e\tau N}{m T} g(\rho) |\Delta|^2 \quad (10)$$

がえられる。この表式及び(7)式を(5)式に代入して Abrikosov と同様な計算をやると

$$g(\rho) \frac{\tau e v^2}{6\pi T} (H_{c2} - H_0) |\Delta|^2 + \frac{1}{8(\pi T)^2} \left\{ \frac{4\pi N}{3m} (e\tau v g(\rho))^2 - f_1(\rho) \right\} |\Delta|^4 = 0 , \quad (11)$$

が得られ、 $f_1(z)$ は次のように定義される。

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2} + z)^2} - z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2} + z)^4} .$$

真木和美

上の式から $\beta = \overline{|A|}^4 / (\overline{|A|})^2 = 1.18$ を用いて、磁気誘導 B 及び自由エネルギーはそれぞれ

$$B = \overline{H} = H_0 - \frac{(H_{C2} - H_0)}{(2\kappa_2^2(T) - 1)\beta}, \quad (12)$$

及び

$$\Delta F_{SH} = \frac{1}{4\pi} \left[B^2 - \frac{(H_{C2} - B)^2}{(2\kappa_2^2(T) - 1)\beta + 1} \right], \quad (13)$$

のようにあらわされ κ_2 は

$$\kappa_2 = \left(\frac{3m f_1(\rho)}{8\pi N} \right)^{1/2} (e \tau v g(\rho))^{-1}, \quad (14)$$

で与えられる。 κ_2 は漸近的に

$$\kappa_2 = 0.69 \kappa \left(1 + 10 \left(\frac{\pi T}{4\phi_0} \right)^2 \right), \quad T \ll T_{C0} \quad (15)$$

$$= \kappa \left(1 - 0.4 \left(\frac{T_{C0} - T}{T_{C0}} \right) \right), \quad T_{C0} - T \ll T_{C0} \quad (16)$$

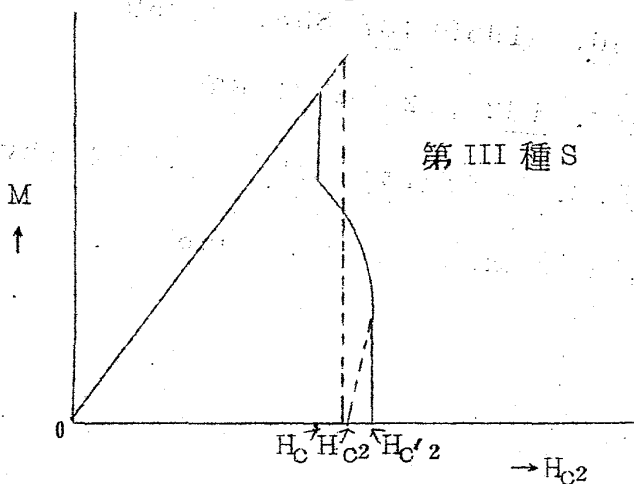
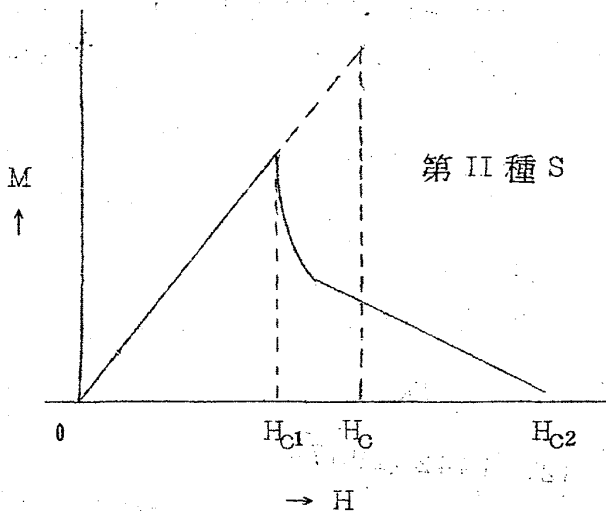
のようはあらわされる。 κ は Ginzburg-Landau のパラメーターである。

κ_1 として $\kappa_1 = \frac{H_{C2}(T)}{\sqrt{2} H_C(T)}$ で定義されたものを用いると、一般の温度での H_{C1} の近くでの Abrikosov の構造は二つのパラメーター κ_1, κ_2 を用いて記述できることがわかる。我々は

$$\kappa_1(T) \geq \kappa \geq \kappa_2(T) \quad (17)$$

の関係が存在し 等式は $T = T_{C0}$ のときのみ成立することを示すことができる。このことから次のような興味ある Abrikosov の理論 からずれを指摘することができる。今 $\kappa_1(T) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \kappa_2(T)$ をみたすような超伝導体を考えよう。第二種の相変化の理論によると²⁾(11) 式から明らかのようにこの種の

超伝導体（仮りに第三種の超伝導体とよぶことにする）はmixed stateから正常状態への転移は非連続的に第一次の相変化によつて起こることがわかる。（このときIで求めた H_{C2} はある種のsuper cooling fieldに対



応する）この様子は左図の磁化曲線のかたちによつて明らかである。

特に面白いのは $\kappa \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の超伝導体で、このときには T_C の近くでは第二種に属しているが、

温度を下げていくにしたがつて

$\kappa_2(T)$ は小さくなりついにある温度

T_1 でcriticalな値 $\kappa_2(T_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

を通ることになる。 T_1 以下ではこ

の超伝導体は第三種のふるまいを

する。 T_{C0} から温度を低くしてい

くと、転移点に於ける比熱のとび

はだんだん大きくなつてきて、 T_1

の近くでは $(T - T_1)^{-\frac{1}{2}}$ の型の発

散を経験することも一般的な議論から言えることである。

Pauli paramagnetionの効果を理論にとり入れることはIにやつたと殆んど同様にしてできるのでこゝではやらない。（これはいずれ別のかたちで発表されるであろう）

4° 以上のように電子の平均自由行路 ℓ がコヘレントな長さ ξ_0 にくらべて短いとき ($\ell/\xi_0 \ll 1$) のときにはかなり簡単な式がIについて得られ、特殊

真木和美

な場合 ($\kappa \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$) を除けば温度に関係なく Abrikosov の理論がかなりよく成立することがわかった。この series の第 III 部では量子化された flux が最初超伝導体に侵入する様子及び Δ とエネルギー, スペクトラムのギャップ ω_0 の関係が議論される予定である。

文 献

- 1) A.A. Abrikosov, J E T P 32, 1442 (1957)
- 2) L.P. Gor'kov, J E T P 36, (1959) ; 37 833. (1959)
- 3) R. Werthamer, Phys. Rev. 132 , 2440 (1963)
- 4) 例えば L.D. Landau & E.M. Lifshitz, Statistical Physics, (English translation, Pergamon Press, (958)