

Weak Convergence of accretive operators in Banach spaces and its Applications

Hideaki Iiduka (飯塚 秀明) Wataru Takahashi (高橋 渉)

Department of Mathematical and Computing Sciences

Tokyo Institute of Technology

(東京工業大学 大学院情報理工学研究科)

1 はじめに

H をノルム $\|\cdot\|$ と内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ実 Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. A を C から H への単調作用素とする. このとき, 変分不等式問題とは,

$$(v - u, Au) \geq 0, \quad \forall v \in C \quad (1.1)$$

となる点 $u \in C$ を見つけることである. 変分不等式は Stampacchia [16, 17] によって研究がはじめられ, それ以降, 幅広く研究がされている. 変分不等式問題の解集合を $VI(C, A)$ で表すことにする. $C = H$ のケースでは, $VI(H, A) = A^{-1}0$ が成り立つ. ただし, $A^{-1}0 = \{u \in H : Au = 0\}$ である. T を C から C への写像とする. もし $A = I - T$ ならば, $F(T) = VI(C, A)$ であることが知られている. ただし, I は H 上の恒等写像であり, $F(T)$ は T の不動点集合である. C から H への作用素 A が逆強単調 (inverse-strongly-monotone) であるとは,

$$(x - y, Ax - Ay) \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C \quad (1.2)$$

となる非負の実数 α が存在するときをいう [6, 18, 12]. このとき, A を α -inverse-strongly-monotone と呼ぶことにする.

ここで, Gol'shtein-Tret'yakov [10] によって証明された有限次元空間での逆強単調作用素に関する収束定理を述べる:

定理 1.1 (Gol'shtein-Tret'yakov [10]). $\mathbb{R}^N$ を N 次元 Euclid 空間とし, A を $\mathbb{R}^N$ から $\mathbb{R}^N$ への α -inverse-strongly-monotone operator とする. $x_1 = x \in \mathbb{R}^N$ とし,

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n Ax_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\{\lambda_n\}$ は $0 < a < b < 2\alpha$ となる a, b に対して $\lambda_n \in [a, b]$ を満たすものとする. このとき, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 z に収束する.

飯塚-高橋-豊田 [12] は定理 1.1 を拡張して, 次の Hilbert 空間での逆強単調作用素に関する弱収束定理を証明した:

定理 1.2 (飯塚-高橋-豊田 [12]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とし, A を C から H への α -inverse-strongly-monotone operator とする. $x_1 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = P_C(\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)P_C(x_n - \lambda_n A x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, P_C は H から C への上への距離射影であり, $\{\alpha_n\}$ と $\{\lambda_n\}$ は $-1 < a < b < 1$ となる a, b に対して $\alpha_n \in [a, b]$, $0 < c < d < 2(1+a)\alpha$ となる c, d に対して $\lambda_n \in [c, d]$ を満たすものとする. このとき, $VI(C, A) \neq \emptyset$ であるならば, 点列 $\{x_n\}$ は $VI(C, A)$ の元 z に弱収束する.

C から C への写像 T が狭義擬縮小 (strictly pseudocontractive) であるとは,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \quad \forall x, y \in C \quad (1.3)$$

となる k ($0 \leq k < 1$) が存在するときをいう [6]. このとき, T を k -strictly pseudocontractive と呼ぶことにする. 狭義擬縮小写像の不動点を見つけるために, Browder-Petryshyn [6] は次の弱収束定理を証明した:

定理 1.3 (Browder-Petryshyn [6]). K を Hilbert 空間 H の空でない有界閉凸集合とし, T を K から K への k -strictly pseudocontractive mapping とする. $x_1 = x \in K$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)Tx_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\alpha \in (k, 1)$ である. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する.

E をノルム $\|\cdot\|$ をもつ実 Banach 空間とし, E^* を E の双対空間とする. $x \in E$ での $f \in E^*$ の値を $\langle x, f \rangle$ で表すことにする. そして C を滑らかな Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし, A を C から E への増大作用素とする. 本研究においては, 我々は次のような変分不等式問題の拡張を扱う:

問題 1.4. C を滑らかな Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし, A を C から E への増大作用素とする. そのとき,

$$\langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C \quad (1.4)$$

となる点 $u \in C$ を見つけよ. ただし, J は E から E^* への双対写像である.

問題 1.4 は, 非線形写像の不動点問題, 増大作用素のゼロ点問題等に関連がある. 本研究においては, 問題 1.4 の解の近似列として, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Q_C(x_n - \lambda_n A x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ を考察する. ただし, Q_C は E から C への上への sunny nonexpansive retraction であり, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$, $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ である. 次に, このようにして定義された点列 $\{x_n\}$ がある条件の下で, 問題 1.4 の解に弱収束することを証明する (定理 3.1). 定理 3.1 は, Gol'shtein-Tret'yakov の定理 (定理 1.1) と Browder-Petryshyn の定理 (定理 1.3) を Banach 空間に拡張したものである.

2 準備

E をノルム $\|\cdot\|$ をもつ実 Banach 空間とし, E^* を E の双対空間とする. E の元からなる点列 $\{x_n\}$ と E の点 x について, $\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \rightarrow x$ で表し, $\{x_n\}$ が x に弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す.

Banach 空間 E が一様凸 (uniformly convex) であるとは, E の元からなる点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して,

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2$$

ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ が成り立つことをいう. 一方, E が滑らか (smooth) であるとは, 任意の $x, y \in U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (2.1)$$

が存在するときをいう. また, E が一様に滑らか (uniformly smooth) であるとは, (2.1) が $x, y \in U$ について一様収束することをいう. E のノルムが Frechet 微分可能であるとは, 任意の $x \in U$ に対して, (2.1) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう. そして, E の modulus of smoothness と呼ばれる関数 $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を以下のように定義する:

$$\rho(\tau) = \sup \left\{ \frac{1}{2} (\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 : x, y \in E, \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}.$$

E が一様に滑らかであるための必要十分条件は $\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\tau)/\tau = 0$ であることが知られている. q を $1 < q \leq 2$ を満たす実数とする. このとき, Banach 空間 E が q -一様に滑らか (q -uniformly smooth) であるとは, 任意の $\tau > 0$ に対して $\rho(\tau) \leq c\tau^q$ となる定数 $c > 0$ が存在するときをいう.

q -uniformly smooth Banach 空間の基本的な特徴付けとして次のことが知られている:

命題 2.1 ([2], [3]). q を $1 < q \leq 2$ を満たす実数とし, E を Banach 空間とする. このとき, E が q -uniformly smooth であるための必要十分条件は, 任意の $x, y \in E$ に対して,

$$\frac{1}{2} (\|x + y\|^q + \|x - y\|^q) \leq \|x\|^q + \|Ky\|^q$$

となる定数 $K \geq 1$ が存在することである.

命題 2.1 での K は E の q -uniformly smoothness constant と呼ばれる (cf: [2]). q を $q > 1$ を満たす実数とする. E から 2^{E^*} への (generalized) duality mapping J_q は, 任意の $x \in E$ に対して,

$$J_q(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^q, \|x^*\| = \|x\|^{q-1}\}$$

と表される. 特に, $J = J_2$ は normalized duality mapping と呼ばれる. また, 任意の $x \in E$ に対して,

$$J_q(x) = \|x\|^{q-2} J(x) \quad (2.2)$$

が成り立ち, E が滑らかならば, J は一価写像にもなる (cf: [25]). そして, E が Hilbert 空間ならば, J は恒等写像 I となる.

さらに, q -uniformly smooth Banach 空間を特徴付けた次の結果 [3] も知られている:

命題 2.2 ([3]). q を $1 < q \leq 2$ を満たす実数とし, E を q -uniformly smooth Banach 空間とする. このとき, 任意の $x, y \in E$ に対して,

$$\|x + y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x) \rangle + 2\|Ky\|^q$$

が成り立つ. ただし, J_q は E の generalized duality mapping であり, K は E の q -uniformly smoothness constant である.

E を Banach 空間とし, C を E の部分集合とする. このとき, C から C への写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

が成り立つときをいう. T の不動点集合を $F(T)$ で表すことにする.

定理 3.1 を証明するために, 次の定理 [5] が必要である:

定理 2.3 (Browder [5]). K を一様凸 Banach 空間 E の空でない有界閉凸集合とし, T を K から K への非拡大写像とする. K の元からなる点列 $\{u_j\}$ が $u_j \rightarrow u_0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j - Tu_j\| = 0$ を満たすならば, u_0 は T の不動点である.

D を C の集合とし, Q を C から D への写像とする. このとき, Q が sunny であるとは, $x \in C$ に対して, $Qx + t(x - Qx) \in C$, $t \geq 0$ ならば

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

がつねに成り立つことである. C の部分集合 D が C の sunny nonexpansive retract であるとは, C から D への上への sunny nonexpansive retraction が存在するときをいう.

E を Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. C から E への作用素 A が増大 (accretive) であるとは,

$$\langle Ax - Ay, j(x - y) \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C$$

となる $j(x - y) \in J(x - y)$ が存在するときをいう. 我々は, 次の (1.4) の解集合と sunny nonexpansive retraction の関係 [1] を知ることができる:

命題 2.4 ([1]). C を滑らかな Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする. Q_C を E から C への上への sunny nonexpansive retraction とし, A を C から E への増大作用素とする. このとき, 任意の $\lambda > 0$ に対して,

$$S(C, A) = F(Q_C(u - \lambda Au))$$

が成り立つ. ただし, $S(C, A) = \{u \in C : \langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0, \forall v \in C\}$ である.

今, 逆強単調作用素 (1.2) の Banach 空間への拡張を定義する. C を滑らかな Banach 空間 E の部分集合とする. $\alpha > 0$ に対して, C から E への作用素 A が α -逆強増大 (α -inverse-strongly-accretive) であるとは,

$$\langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C \quad (2.3)$$

が成り立つときをいう。明らかに、逆強増大作用素の定義は逆強単調作用素の定義を基本にしている。(2.3) から、任意の $x, y \in C$ に対して、

$$\|Ax - Ay\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x - y\| \quad (2.4)$$

が成り立つ。 q を $q \geq 2$ を満たす実数とする。(2.2), (2.3), (2.4) から、任意の $x, y \in C$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle Ax - Ay, J_q(x - y) \rangle &= \|x - y\|^{q-2} \langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \\ &\geq \|x - y\|^{q-2} \alpha \|Ax - Ay\|^2 \\ &\geq (\alpha \|Ax - Ay\|)^{q-2} \alpha \|Ax - Ay\|^2 \\ &= \alpha^{q-1} \|Ax - Ay\|^q \end{aligned} \quad (2.5)$$

が得られる。一方で、 $q > 2$ における q -uniformly smooth Banach 空間は存在しない (cf: [23])。以上のことから、本研究では、一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間での逆強増大作用素に関する弱収束定理を研究する。Hilbert 空間、Lebesgue 空間 L^p ($p \geq 2$) は一様凸で 2-uniformly smooth であることが知られている。

2-uniformly smooth Banach 空間での逆強増大作用素の性質 [1] を知ることができる：

命題 2.5 ([1]). C を 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする。 $\alpha > 0$ とし、 A を C から E への α -inverse-strongly-accretive operator とする。 $0 < \lambda \leq \alpha/K^2$ ならば、 $I - \lambda A$ は C から E への非拡大写像である。ただし、 K は E の 2-uniformly smoothness constant である。

注意 2.6. $q \geq 2$ ならば、(2.5) から任意の $x, y \in C$ に対して、

$$\|(I - \lambda A)x - (I - \lambda A)y\|^q \leq \|x - y\|^q + \lambda(2K^q \lambda^{q-1} - q\alpha^{q-1}) \|Ax - Ay\|^q \quad (2.6)$$

が成り立つ。 $q > 2$ のとき、 q -uniformly smooth Banach 空間は存在しないので、2-uniformly smooth Banach 空間のみ考察する。 $1 < q < 2$ のとき、不等式 (2.5), (2.6) は成立しない。

Kirk の不動点定理 [14], 命題 2.4, 命題 2.5 を適用すると、 K が一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない有界閉凸集合で、かつ、 K が E の sunny nonexpansive retract であり、 A が K から E への逆強増大作用素ならば、解集合 $S(K, A)$ は空でないことがわかる。また、Reich [22] によって証明された次の定理も知られている (cf: Lau-高橋 [19], 高橋-Kim [24], Bruck [8]):

定理 2.7 (Reich [22]). C を Frechet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする。 $\{T_1, T_2, \dots\}$ を C から C への非拡大写像の列とし、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ とする。また、 $x \in C$, $S_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1$ ($n = 1, 2, \dots$) とする。このとき、集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}\{S_m x : m \geq n\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$$

は多くて 1 点から成る。ただし、 $\overline{\text{co}}D$ は D の凸包の閉包である。

3 弱収束定理

この節では、一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間での逆強単調作用素に関する問題 1.4 の解を見つける次の弱収束定理を研究する:

定理 3.1. E を一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間とし、 C を E の空でない閉凸集合とする。 Q_C を E から C への上への sunny nonexpansive retraction とし、 $\alpha > 0$ に対して、 A を C から E への α -inverse-strongly-accretive operator とする。 $x_1 = x \in C$ とし、

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする。ただし、 $\{\lambda_n\}$ と $\{\alpha_n\}$ は $a > 0$ に対して $\lambda_n \in [a, \alpha/K^2]$ であり、 $0 < b < c < 1$ となる b, c に対して $\alpha_n \in [b, c]$ を満たすものとする。このとき、 $S(C, A) \neq \emptyset$ であるならば、点列 $\{x_n\}$ は $S(C, A)$ の元 z に弱収束する。ただし、 K は E の 2-uniformly smoothness constant である。

証明の概略。任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $y_n = Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ とおく。 $u \in S(C, A)$ とする。はじめに、 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が有界であることを示す。命題 2.4, 命題 2.5 から、任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\|y_n - u\| \leq \|x_n - u\| \quad (3.1)$$

となることが示される。(3.1) から、任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\|x_{n+1} - u\| \leq \|x_n - u\|$$

が成り立つ。よって、 $\{\|x_n - u\|\}$ は単調減少なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ が存在する。そのことから、 $\{x_n\}$ は有界である。また、(3.1), (2.4) から、 $\{y_n\}$, $\{A x_n\}$ も有界である。

次に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0 \quad (3.2)$$

を示す。これは、 E が一様凸であり、関数 $\|\cdot\|^2$ が有界凸集合上で一様凸であることから示すことができる。

$\{x_n\}$ は有界なので、 z に弱収束するような $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ がとれる。そして、 $\lambda_{n_i} \in [a, \alpha/K^2]$ なので、 $\lambda_0 \in [a, \alpha/K^2]$ に収束する $\{\lambda_{n_i}\}$ の部分列 $\{\lambda_{n_{i_j}}\}$ が存在する。一般性を失うことなく $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda_0$ としてよい。ここで、 $z \in S(C, A)$ を示す。 Q_C は非拡大なので、 $y_{n_i} = Q_C(x_{n_i} - \lambda_{n_i} A x_{n_i})$ から、

$$\begin{aligned} \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - x_{n_i}\| &\leq \|(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - (x_{n_i} - \lambda_{n_i} A x_{n_i})\| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \\ &\leq M |\lambda_{n_i} - \lambda_0| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \end{aligned} \quad (3.3)$$

が成り立つ。ただし、 $M = \sup\{\|A x_n\| : n = 1, 2, \dots\}$ である。 $\{\lambda_{n_i}\}$ の収束性と (3.2), (3.3) から、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|Q_C(I - \lambda_0 A)x_{n_i} - x_{n_i}\| = 0 \quad (3.4)$$

が得られる. 一方, 命題 2.5 から, $Q_C(I - \lambda_0 A)$ は非拡大である. よって, (3.4), 命題 2.4, 定理 2.3 から, $z \in F(Q_C(I - \lambda_0 A)) = S(C, A)$ を得ることができる.

最後に, 点列 $\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の元 z に弱収束することを示す. 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$T_n = \alpha_n I + (1 - \alpha_n) Q_C(I - \lambda_n A)$$

とおくと, $x_{n+1} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 x$, $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}\{x_m : m \geq n\}$ が成り立つ. 命題 2.5, 命題 2.4, 定理 2.7 から,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}\{x_m : m \geq n\} \cap S(C, A) = \{z\}$$

が得られる. 以上により, 点列 $\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の元 z に弱収束する. $\square$

4 応用

この節では, 定理 3.1 から得られる一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間におけるいくつかの弱収束定理を証明する. はじめに, 逆強増大作用素のゼロ点を見つける問題を研究する. 次の定理は Gol'shtein-Tret'yakov の定理 (定理 1.1) の一般化である:

定理 4.1. E を一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間とする. $\alpha > 0$ に対して, A を E から E への α -inverse-strongly-accretive operator とする. $x_1 = x \in E$ とし,

$$x_{n+1} = x_n - r_n A x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\{r_n\}$ は $0 < s < t < \alpha/K^2$ となる s, t に対して $r_n \in [s, t]$ を満たすものとする. このとき, $A^{-1}0 = \{u \in E : Au = 0\} \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 z に弱収束する. ただし, K は E の 2-uniformly smoothness constant である.

証明. 明らかに, 恒等写像 I は E から E への上への sunny nonexpansive retraction である. この結果を用いて,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Q_E(x_n - \lambda_n A x_n) \\ &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)(x_n - \lambda_n A x_n) \\ &= x_n - \lambda_n(1 - \alpha_n) A x_n \end{aligned}$$

が得られる. また, $S(E, A) = A^{-1}0$ が成り立つ. $r_n = \lambda_n(1 - \alpha_n)$ において, 定理 3.1 を用いれば, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 z に弱収束する. $\square$

次に, 狭義擬縮小写像の不動点を見つける問題を研究する. $0 \leq k < 1$ とする. E を Banach 空間とし, C を E の部分集合とする. このとき, C から C への写像 T が k -strictly pseudocontractive であるとは,

$$\langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \frac{1 - k}{2} \|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \quad \forall x, y \in C \quad (4.1)$$

となる $j(x-y) \in J(x-y)$ が存在するときをいう [6, 20]. このとき, 不等式 (4.1) は,

$$\langle (I-T)x - (I-T)y, j(x-y) \rangle \geq \frac{1-k}{2} \|(I-T)x - (I-T)y\|^2 \quad (4.2)$$

に書きかえられる. E が Hilbert 空間ならば, 不等式 (4.1) (つまり, (4.2)) は (1.3) と同値である. 次の定理は Browder-Petryshyn の定理 (定理 1.2) と関連がある:

定理 4.2. E を一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合で, かつ, E の sunny nonexpansive retract とする. T を C から C への k -strictly pseudocontractive mapping とする. $x_1 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. ただし, $\{\beta_n\}$ は $0 < \beta < \gamma < (1-k)/2K^2$ となる β, γ に対して $\beta_n \in [\beta, \gamma]$ を満たすものとする. このとき, $F(T) \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する. ただし, K は E の 2-uniformly smoothness constant である.

証明. T を C から C への k -strictly pseudocontractive mapping とする. (4.2) から, $A = I - T$ ならば, A は $(1-k)/2$ -inverse-strongly-accretive である. また,

$$S(C, I - T) = F(T)$$

が成り立つ. $\{\lambda_n\}$ を定理 3.1 で用いた点列とする. $\alpha = (1-k)/2$, $k \in [0, 1)$, $K \geq 1$ なので, $\lambda_n \in (0, 1)$ が得られる. このとき, Q_C は retraction なので,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n(I - T)x_n) \\ &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Q_C((1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n) \\ &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)((1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n) \\ &= (1 - \lambda_n(1 - \alpha_n))x_n + \lambda_n(1 - \alpha_n)T x_n \end{aligned}$$

が成り立つ. $\beta_n = \lambda_n(1 - \alpha_n)$ とおいて, 定理 3.1 を用いれば, 点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する. $\square$

C を滑らかな Banach 空間 E の部分集合とする. $\alpha > 0$ とする. C から E への作用素 A が α -強増大 (α -strongly accretive) であるとは,

$$\langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

が成り立つときをいう. $\beta > 0$ とする. C から E への作用素 A が β -Lipschitz 連続 (β -Lipschitz continuous) であるとは,

$$\|Ax - Ay\| \leq \beta \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

が成り立つときをいう. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする. 点 $u \in VI(C, A)$ を見つける一つの手法として, projection algorithm がある. それは, $x_1 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A x_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

と定義される手法である。ただし, P_C は H から C への上への距離射影であり, A は C から H への単調 (増大) 作用素であり, $\lambda > 0$ である。 A が C から H への α -strongly accretive かつ, β -Lipschitz continuous, $\lambda \in (0, 2\alpha/\beta^2)$ ならば, 写像 $P_C(I - \lambda A)$ は C から C への縮小写像になることはよく知られている。それゆえ, Banach contraction principle により, (4.3) で定義された点列は $VI(C, A)$ の一意解に強収束する (cf: [4])。この結果に動機付けられて, 強増大かつ Lipschitz 連続作用素に関する弱収束定理を証明する:

定理 4.3. E を一様凸で 2-uniformly smooth Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする。 Q_C を E から C への上への sunny nonexpansive retraction とする。 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ に対して, A を C から E への α -strongly accretive かつ, β -Lipschitz continuous operator とする。 $x_1 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする。ただし, $\{\lambda_n\}$ と $\{\alpha_n\}$ は $a > 0$ に対して $\lambda_n \in [a, \alpha/K^2\beta^2]$, $0 < b < c < 1$ となる b, c に対して $\alpha_n \in [b, c]$ を満たすものとする。そのとき, $S(C, A) \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $S(C, A)$ の一意解 z に弱収束する。ただし, K は E の 2-uniformly smoothness constant である。

証明. A を C から E への α -strongly accretive かつ, β -Lipschitz continuous operator とする。このとき, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つ。よって, A は α/β^2 -inverse-strongly-accretive である。 A は strongly accretive, $S(C, A) \neq \emptyset$ なので, 解集合 $S(C, A)$ は 1 点 z から成る。定理 3.1 を用いて, 点列 $\{x_n\}$ は $S(C, A)$ の一意解 z に弱収束する。 $\square$

参考文献

- [1] K. Aoyama, H. Iiduka and W. Takahashi, *Weak convergence of accretive operators in Banach spaces*, submitted.
- [2] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Invent. Math. **115** (1994), 463-482.
- [3] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*, 2nd Ed., North Holland, 1985.
- [4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Editeur, Paris, 1983.
- [5] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Sympos. Pure Math. **100-2**, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1976).

- [6] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197-228.
- [7] R. E. Bruck, Jr., *Nonexpansive retracts of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 384-386.
- [8] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107-116.
- [9] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces -Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics, 485. Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).
- [10] E. G. Gol'shtein and N. V. Tret'yakov, *Modified lagrangians in convex programming and their generalizations*, Math. Prog. Study **10** (1979), 86-97.
- [11] H. Iiduka and W. Takahashi, *Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space*, submitted.
- [12] H. Iiduka, W. Takahashi and M. Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, PanAmer. Math. J. **14** (2004), 49-61.
- [13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence to solutions of accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361-374.
- [14] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004-1006.
- [15] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations for sunny non-expansive retractions*, Topol. Method Nonlinear Anal. **2** (1993), 333-342.
- [16] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [17] J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 493-517.
- [18] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-Valued Anal. **6** (1998), 313-344.
- [19] A. T. Lau and W. Takahashi, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **126** (1987), 277-294.
- [20] M. O. Osilike and A. Udomene, *Demiclosedness principle and convergence theorems for strictly pseudocontractive mappings of Browder-Petryshyn type*, J. Math. Anal. Appl. **256** (2001), 431-445.
- [21] S. Reich, *Asymptotic behavior of constructions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 57-70.

- [22] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274-276.
- [23] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, *On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities*, J. Nonlinear and Convex Analysis **3** (2002), 267-281.
- [24] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica **48** (1998), 1-9.
- [25] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [26] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127-1138.
- [27] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344-374.