

LESにおけるレイノルズ応力の非等方表現

東大生研 堀内 潔 (Kiyosi Horiuti)

Large Eddy Simulation (以下LES)では、フィルタリングにより、ナビエ・ストークス方程式の非線形項から、Leonard 項 (1)、Cross 項 (2)、および、Subgrid scale (SGS) Reynolds応力項 (3) が生じる。

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (1)$$

$$C_{ij} = \overline{u_i \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u_j} \quad (2)$$

$$R_{ij} = \overline{u_i \overline{u_j}} \quad (3)$$

(1) は、フィルターを定義すれば直接計算できるので、モデル化は不要である。¹⁾ (2) にたいしては、Bardina モデル²⁾が、(3) については、Smagorinsky モデル³⁾ (4) が提案され、(4) は、全てのLESで用いられてきた。

$$\overline{u_i \overline{u_j}} = 2K_G / 3 \delta_{ij} - \nu_e e_{ij} \quad (4)$$

$$\nu_e = (C_s \Delta)^2 [e_{ij}^2 / 2]^{1/2}$$

$$e_{ij} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}$$

ここに、 $K_G = \overline{u_i \overline{u_i}} / 2$ は、SGS乱流エネルギーである。ところで、近年のスーパー・コンピュータの登場は、低レイノルズ数ながら、Direct Numerical Simulation (DNS) を可能にし、このデータを用いた (1) - (3) のモデルにたいする直接的な検証が行われている。^{2, 4-6)} 特に、(3) について、過去の検証は、SGS Reynolds応力項の厳密値とSmagorinsky モデルによるモデル値との相関係数 (C. C.) は低く、負値を示すこともあることを明らかにした。⁵⁻⁶⁾ Lilly⁷⁾ は、Kolmogorov則がSmagorinskyモデルと整合することを示し、Kolmogorov定数を1.7として、 C_s の理論値を約0.2であるとした。しかし、過去のLESの種々の剪断乱流への適用では、 C_s は流れ場に応じて最適化され、一様等方性乱流では、約0.2、⁴⁾ 乱流混合層では、約0.15、⁸⁾ チャンネル流では、約0.1、^{5-6, 9-10)} が採用されてきた。さらに、チャンネル流では、壁での粘着条件との整合性を図るために、経験的に、(4) の長さスケール Δ には、減衰関数 f_w が乗ぜられてきた。⁹⁻¹⁰⁾ f_w としては、Van Driest関数¹¹⁾ が一般的に用いられている。本研究の目的は、モデル定数の普遍性がより高く、経験的なVan Driest関数に代わる一般化のより容易な減衰関数が導入でき、DNSとの相関もより高い、SGS Reynolds応力にたいするモデルを提案することである。本報告での適用は、チャンネル流

に限るが、以下、その座標系は、下流方向を x または 1 方向、壁に垂直な方向を y または 2 方向、横断方向を z または 3 方向とする。

本研究で採用した基本的なアプローチは、Reynolds 応力の非等方表現の高次項¹²⁾ を SGS モデルに導入することである。Horiuti¹²⁾ では、渦粘性係数への高次補正項 (5) が渦粘性係数の効果的な減衰関数として使える可能性を示唆した。

$$\nu_e = \frac{3}{2} C_\nu \frac{k}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} k - \frac{2}{3} \frac{1}{C_\nu} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left\{ C_{A1} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} + C_{A2} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \right\} \right] \quad (5)$$

ところで、(5) 式 $[\cdot]$ 内は、乱流エネルギーの非等方表現に対応するが、レイノルズ平均モデルでの、チャンネル流における C_{A1} の最適値は normal 成分 $\overline{u_2'^2}$ の乱流強度に対応する値¹³⁾ に近いことがわかった。したがって、渦粘性係数中のエネルギー・スケールとしては Normal shear stress が適切であると結論された。本研究では、同じアイデアを LES に適用する。

(5) の渦粘性係数 ν_e は、

$$\nu_e = C_\nu C_\varepsilon \tau E \quad (6)$$

と書ける。ここに、 E はエネルギー・スケール、 $\tau = k/\varepsilon$ は、タイム・スケールで、LES では、通常、 $\tau = \Delta / C_\varepsilon / K_G^{1/2}$ と置換えられる。最初に、 K_G としては DNS データからの厳密値を採用し、 E の適切な選択を探る。まづ、 $E = K_G$ とした場合の $\overline{u_1'^2} \overline{u_2'^2}$ の $x-z$ 平面内の平均値 $\langle \overline{u_1'^2} \overline{u_2'^2} \rangle$ の y 分布を図 1 に示した。モデル値は DNS からの厳密値にくらべ壁近くで値が大きすぎる。通常、Van Driest 減衰関数 $((1 - \exp(-y_+/25)))$; y_+ は壁座標) が Δ に乗ぜられている理由の一つはここにある。したがって、(5) 式に見るような補正が必要である。最も直接的な E の計算方法は、(5) を直接適用する方法であるが、これには各項の計算と総計 3 定数の最適化が必要になり、LES に用いるには、いたづらにモデルを煩雑化する。ここでは、Leonard 項と Bardina モデルの総和が $[\cdot]$ 内第 2 項の一部に相当すること¹⁴⁾ に注目し、 $[\cdot]$ 内第 2 項を $C_{A3} \Delta^2 (\overline{u_j'^2} \overline{u_j'^2} - \overline{u_j'^2} \overline{u_j'^2})$ で近似してみる。図 2 は、この場合の平均値の分布であるが、モデル値は厳密値にくらべかなり大きく、項の一部を取り込んだだけでは、減衰が不十分であり、LES に用いるには、(5) の展開は不適切である。同時に、(5) の展開は特に $y_+ < 5$ の領域で、負の渦粘性係数を与える場合もあることを付記しておく。そこで、直接 $\overline{u_2'^2} \overline{u_2'^2}$ の DNS からの厳密値を E として用いた場合の平均値分布が図 3 である。ここでは、効果的な ν_e の減衰が特に新たな減衰関数を導入しなくとも行われ、厳密値とよく一致している。紙面の都合で、図は省くが、DNS データとの相関も Smagorinsky モデルに比べ、かなり改善されている。したがって、Normal shear stress がより適切なエネルギー・スケールであることが、LES でも確認された。

以上は、DNS データを用いた 'A priori' なテストであるが、実際の LES 計算に導

入するには、Normal shear stress および K_σ を Grid scale (GS) 変数で表現しなければならない。数種類のモデルをLES計算に導入して調べた結果、下記のモデル(7)が、最も有効に機能することがわかった。

$$\nu_e = (C_s^A \Delta)^2 [e_{ij}^2 / 2]^{1/2} f_d^A \quad (7)$$

$$f_d^A = 3 (\overline{u_2 u_2} - \overline{u_2} \overline{u_2}) / \sum_i (\overline{u_i u_i} - \overline{u_i} \overline{u_i})$$

モデル(7)では、通常のSmagorinskyモデルに、 f_d^A が damping factor として掛かる。図4は、 $\langle C_s^A (f_d^A)^{1/2} \rangle$ をチャンネル中央での実効的なSmagorinsky定数で正規化した値を、Van Driest関数と合わせて示すが、効果的な減衰がされていることがわかる。さらに、Van Driest関数では、同じレベルの y_+ では、均一に減衰が掛かり、LESには重要な局所性が表現できないが、モデル(7)は表現できる。ところで、Normal shear stressをエネルギー・スケールとして用いることによって、効果的な減衰関数の役割を果たせることは、Launder et al.¹⁵⁾でも指摘されている。そこでは、Second order closure を用いているが、Normal shear stressの近似の精度がまだ低いため、減衰関数としての精度も低い。また、Yakhot et al.¹⁶⁾は、(7)式 f_d^A と同様なfactorの導入をしているが、理論的な根拠は示されておらず、また、本報告で用いたSGS乱流エネルギーの比のかわりに、GS乱流エネルギーの比としているため、格子の解像度を上げていったとき、 f_d^A の影響が消えない欠点がある。本研究では、LESの利点、すなわち、ある程度の精度の情報をもったGS成分がすでに解かれていることを活用して、SGSへの一種の外挿を行った。前述の一樣等方性乱流、乱流混合層、チャンネル流の3つの流れ場を比較すると、GSの乱流強度の非等方性は、この順に強くなり、最適化された C_s もこの順で小さくなっている。したがって、 C_s の大きさの相違は、乱流強度の非等方性を反映したものと考えられ、モデル(7)は、この効果を取り入れることができる。ところで、モデル(7)の定数 C_s^A の最適値は約0.15となり、これはLilly⁷⁾の理論値0.2よりは小さいが、Smagorinskyモデルの0.1よりは大きめであり、より高い普遍性をもっていることが期待できる。Mason et al.¹⁷⁾は、チャンネル流でも、格子の解像度を上げていくと C_s の最適値は0.2に近づいていくと報告しているが、(7)は、この報告も裏付けることができる。ただし、(7)は、壁での漸近挙動は満足しない。Van Driest関数も同様に満足しないが、LESでは、このことは結果にあまり悪い影響は与えないようであるが、モデル(7)のより複雑な流れ場への適用は今後の課題として残る。本モデルの詳細については、Horiuti¹⁸⁾を参照されたい。

本研究の一部は文部省科学研究費 No.01613002、No.02302043 および、東京大学・日立製作所共同研究によっている。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Leonard, A. (1974) Adv. Geophys. 18A, 237.
- 2) Bardina, J. J. H. Ferziger and W. C. Reynolds (1980) AIAA Paper 80-1357.
- 3) Smagorinsky, J. (1963) Mon. Weather Rev. 91, 99.
- 4) Clark, R. A., J. H. Ferziger and W. C. Reynolds (1977) Report TF-9, Dept. Mech. Eng., Stanford Univ.
- 5) Piomelli, U., P. Moin and J. H. Ferziger (1988) Phys. Fluids 31, 1884.
- 6) Horiuti, K. (1989) Phys. Fluids A1, 462.
- 7) Lilly, D. K. (1966) NCAR Manuscript 123.
- 8) Mansour, N. N., J. H. Ferziger and W. C. Reynolds (1978) Report TF-11, Dept. of Mech. Eng., Stanford Univ.
- 9) Moin P. and J. Kim (1982) J. Fluid Mech. 118, 341.
- 10) Horiuti, K. (1987) J. Comp. Phys. 71, 343.
- 11) Van Driest, E. R. (1956) J. Aeronaut. Sci. 23, 1007.
- 12) Horiuti, K. (1990) Phys. Fluids A2, 1708.
- 13) Nisizima, S. and A. Yoshizawa (1987) AIAA J. 25, 414.
- 14) Horiuti, K. (1989) Proc. Int. Symp. Comp. Fluid Mech. Nagoya.
- 15) Launder, B. E. and D. P. Tselepidakis (1990) Near-Wall Turbulence, Hemisphere Publ. Co., 818.
- 16) Yakhot, A., S. A. Orszag, V. Yakhot and M. Israel (1989) J. Sci. Comp. 4, 139.
- 17) Mason, P. J. and N. S. Callen (1986) J. Fluid Mech. 162, 439.
- 18) Horiuti, K. (1990) Proc. Int. Workshop "Large Eddy Simulation... Where Do We Stand?", St. Petersburg, Florida, also submitted to Phys. Fluids A.

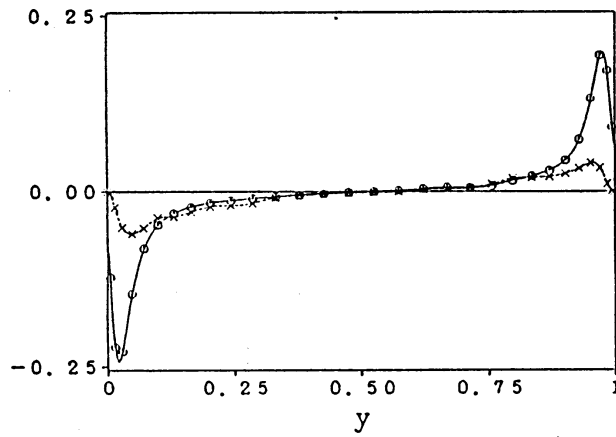


図1 $\overline{u_1 u_2}$ の y 分布
 —○— : (6) で $E = K_\alpha$ とした場合のモデル値
 ---X--- : DNSデータからの厳密値

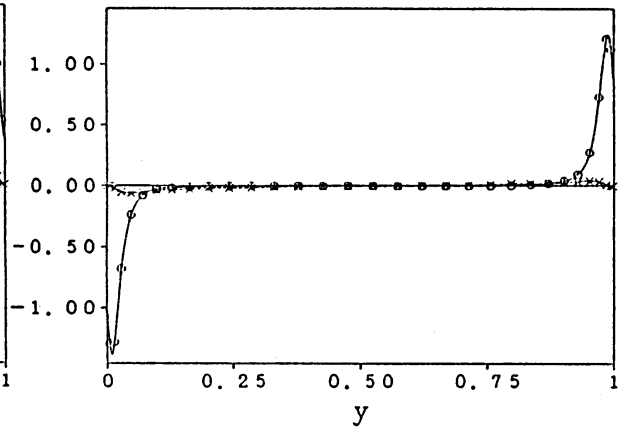


図2 $\overline{u_1 u_2}$ の y 分布
 —○— : (5) によるモデル値
 ---X--- : DNSデータ

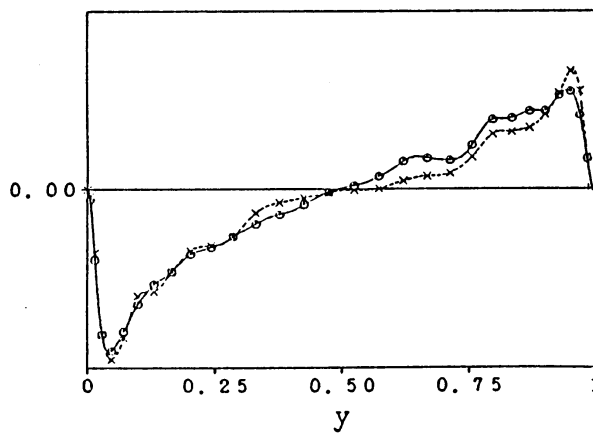


図3 $\overline{u_1 u_2}$ の y 分布
 —○— : (6) で $E = \overline{u_2 u_2}$ とした場合のモデル値
 ---X--- : DNSデータ

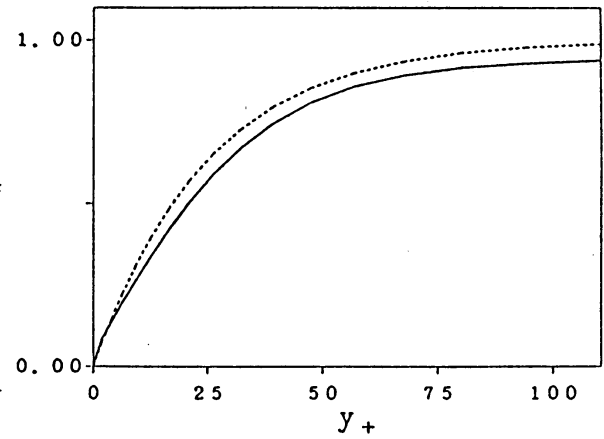


図4 減衰関数の分布
 — : モデル(7)
 - - - : Van Driest関数