

現象の数値シミュレーション – 理論, スキーム, 実践 Numerical Simulation of Phenomena – Theory, Scheme, Practice

早稲田大学理工学術院 田端 正久¹

Masahisa Tabata

Faculty of Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

現象の数値シミュレーションは科学技術計算の中心課題である。我々の生きている世界が空間 3 次元, 時間 1 次元であり, これらを独立変数とする微分方程式 (系), すなわち偏微分方程式 (系) で種々の現象が記述される。連続体力学の基礎となっている方程式は 18, 19 世紀にはすでに得られていたが, もちろん, 当時は計算機は存在せず, 解の具体的な挙動を知ることではできなかった。21 世紀に生きる私たちは, 計算機と数値解析を用い, その挙動を具体的に知ることができる。数値シミュレーションの理論的背景, スキームの構築, その実践について, 変分原理と導かれる行列の対称性の観点から考察する。

2 最小型変分原理が適用できる問題

汎用性を意識して, 抽象的な枠組みから議論を始める。

V を実ヒルベルト空間とし, そのノルムを $\|\cdot\|_V$ で表す。 V' を V 上の連続線形一次形式の全体, すなわち V の双対空間とする。 $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を V 上の双一次形式であり, 連続

$$\|a\| \equiv \sup \left\{ \frac{a(u, v)}{\|u\|_V \|v\|_V}; u, v \in V, u, v \neq 0 \right\} < +\infty \quad (1)$$

かつ, 対称

$$a(v, u) = a(u, v), \quad \forall u, v \in V \quad (2)$$

とする。 $f \in V'$ を任意に与えられた元とする。 V 上の汎関数 $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$J[v] = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

で定義する。

次の抽象的変分問題と最小化問題を考える。

¹E-mail : tabata@waseda.jp

問題 1 $u \in V$ で

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (3)$$

を満たすものを求めよ.

問題 2 $u \in V$ で

$$J[u] \leq J[v], \quad \forall v \in V \quad (4)$$

を満たすものを求めよ.

双一次形式 a は V で強圧的

$$\alpha_0 \equiv \inf \left\{ \frac{a(v, v)}{\|v\|_V^2}; v \in V, v \neq 0 \right\} > 0 \quad (5)$$

であるとする. 次の結果が成立する.

定理 1 (1), (2), (5) を仮定する. 問題 1 の解と問題 2 の解 u は存在して一意であり, それらは一致する. さらに, 評価

$$\|u\|_V \leq c \|f\|_{V'} \quad (6)$$

が成立する. ここに, $c = \|a\|/\alpha_0$ である.

問題 1 と問題 2 の同値性を最小型変分原理という.

最小型変分原理に基づく有限要素近似は, ヒルベルト空間 V を有限次元部分空間 V_h で置き換えれば導ける. 対応する近似問題は次のとおりである.

問題 3 $u_h \in V_h$ で

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h \quad (7)$$

を満たすものを求めよ.

問題 4 $u_h \in V_h$ で

$$J[u_h] \leq J[v_h], \quad \forall v_h \in V_h \quad (8)$$

を満たすものを求めよ.

次の結果が成立する.

定理 2 定理 1 の条件下で, 問題 3 の解と問題 4 の解 u_h は存在して一意であり, それらは一致する. さらに, 誤差評価

$$\|u - u_h\|_V \leq c \inf \{ \|u - v_h\|_V; v_h \in V_h \} \quad (9)$$

が成立する. ここに, $c = \|a\|/\alpha_0$ である.

有限要素近似空間を設定すれば, (7) は有限要素近似スキームであり, 帰着する連立一次方程式の行列は対称正定値である. したがって, 前処理付き共役傾斜法などの非常に効率的な連立一次方程式の数値解法が使用できる.

抽象的変分問題 1 は多くの問題に適用できる。その代表例はポアソン問題である。

例 1 $\mathbb{R}^d$ (d は空間次元) の有界領域 Ω で定義された関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f_0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_1, & x \in \Gamma_1, \\ u &= 0, & x \in \Gamma_0 \end{aligned}$$

を満たすものを求めよ。ここに、 $\Gamma_i, i = 0, 1$, は Ω の境界を構成し、

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad g_1 \in L^2(\Gamma_1)$$

は与えられた関数である。

例 1 の弱形式は問題 1 で

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega); v(x) = 0, x \in \Gamma_0\} \quad (\text{meas} \Gamma_0 > 0), \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v \, ds \end{aligned}$$

と置いたものになり、最小型変分問題になる。離散問題 3 を解いて数値解を得ることができる。

3 最小型変分問題に関連する非対称問題

前節の仮定 (2) がない場合を考える。このとき、変分問題 1 と最小化問題 2 の同値性は成立しないが、次の結果は得られる。

定理 3 (1), (5) を仮定する。問題 1 の解 u は存在して一意であり、評価 (6) が成立する。

このとき、定理 2 に対応して、次の離散問題の結果が成立する。

定理 4 定理 3 の条件下で、問題 3 の解 u_h は存在して一意であり、誤差評価 (9) が成立する。

有限要素近似空間を設定して、問題 3 から有限要素近似スキームが得られるが、帰着する連立一次方程式の行列 A は非対称である。強圧性条件 (5) から、行列 A の対称部分 $(A + A^T)/2$ は正定値対称であることが従うので、この性質を利用して、共役残差法などの非対称行列用の数値解法を使用することができる。

問題が非対称になると、定理 4 で誤差評価が得られているにも関わらず実用計算ができず、新たな工夫が必要なものがある。その例は次の移流拡散問題である。

例 2 $\mathbb{R}^d$ (d は空間次元) の有界領域 Ω で定義された関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + w \cdot \nabla u &= f, & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \Gamma \end{aligned}$$

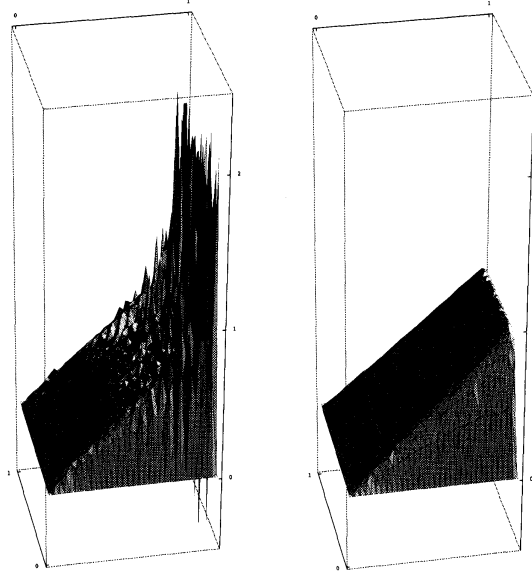


図 1: ガレルキン有限要素法による解 (左) と風上要素選択有限要素法による解 (右)

を満たすものを求めよ. ここに, ν は拡散係数, Γ は Ω の境界,

$$f \in L^2(\Omega), \quad w \in C^1(\bar{\Omega})^d$$

は与えられた関数であり, $\nabla \cdot w = 0$ を満たしているとする.

例 2 の弱形式は問題 1 で,

$$V = H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(w \cdot \nabla u)v - (w \cdot \nabla v)u\} \, dx, \quad (10)$$

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx$$

と置いたものになる. 強圧性 (5) が成立するので定理 4 により, ガレルキン有限要素解の誤差評価が得られるが, ペクレ数 $Pe \equiv UL/\nu$ が大きくなると実用に耐えない. ここに, U は代表速度 ($|w|$ の最大値), L は代表長 (Ω の直径) である. 図 1 は

$$d = 2, \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad w = (1, 0)^T, \quad f = 1, \quad \nu = 0.001$$

のときの数値結果である. 左図のガレルキン有限要素解は激しい振動をしている. 定理 4 が適用できるが評価 (9) に現れる定数 c がペクレ数に比例しているため非常に大きくなっており, 収束傾向を得るにはこの分割では粗すぎる. 高ペクレ数でも安定に計算でき, 収束性が示せる計算スキームも開発されている. 右図は風上要素選択有限要素法による同じ要素分割での数値計算結果である. 詳細は [7, 5] を参照して頂きたい.

4 鞍点型変分原理が適用できる問題

V と Q を実ヒルベルト空間とし、そのノルムをそれぞれ、 $\|\cdot\|_V$ と $\|\cdot\|_Q$ で表す。その双対空間をそれぞれ、 V' と Q' で表す。

$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を第2節で定義した連続な双一次形式でかつ対称、 $b: V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ を双一次形式で連続

$$\|b\| \equiv \sup \left\{ \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q}; v \in V, q \in Q, v \neq 0, q \neq 0 \right\} < +\infty \quad (11)$$

であるとする。 $(f, g) \in V' \times Q'$ が任意に与えられている。 $V \times Q$ 上の汎関数 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}(v, q) = \frac{1}{2}a(v, v) + b(v, q) - \langle f, v \rangle - \langle g, q \rangle \quad (12)$$

で定義する。次の抽象的変分問題と鞍点問題を考える。

問題 5 $(u, p) \in V \times Q$ で

$$a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (13a)$$

$$b(u, q) = \langle g, q \rangle, \quad \forall q \in Q \quad (13b)$$

を満たすものを求めよ。

問題 6 $(u, p) \in V \times Q$ で

$$\mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(v, p), \quad \forall (v, q) \in V \times Q \quad (14)$$

を満たすものを求めよ。

双一次形式 b が $V \times Q$ で下限上限条件を満たすとは

$$\beta_0 \equiv \inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} > 0 \quad (15)$$

であるときをいう。次の結果が成立する。

定理 5 (1), (2), (5), (11), (15) を仮定する。問題 5 の解と問題 6 の解 (u, p) は存在して一意であり、それらは一致する。さらに、評価

$$\|u\|_V + \|p\|_Q \leq c\left(\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\beta_0}, \|a\|, \|b\|\right)(\|f\|_{V'} + \|g\|_{Q'}) \quad (16)$$

が成立する。ここに、 c は引数に関して単調増加な正の関数である。

問題 5 と問題 6 の同値性を鞍点型変分原理という。

鞍点型変分原理に基づく有限要素近似は、ヒルベルト空間 V, Q を有限次元部分空間 V_h, Q_h で置き換えれば導ける。対応する近似問題は次のとおりである。

問題 7 $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ で

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h \quad (17a)$$

$$b(u_h, q_h) = \langle g, q_h \rangle, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (17b)$$

を満たすものを求めよ.

問題 8 $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ で

$$\mathcal{L}(u_h, q_h) \leq \mathcal{L}(u_h, p_h) \leq \mathcal{L}(v_h, p_h), \quad \forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h \quad (18)$$

を満たすものを求めよ.

双一次形式 b が $V_h \times Q_h$ で下限上限条件

$$\beta_1 \equiv \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V \|q_h\|_Q} > 0 \quad (19)$$

を満たすとする. 次の結果が成立する.

定理 6 (1), (2), (5), (11), (15), (19) を仮定する. 問題 7 の解と問題 8 の解 (u_h, q_h) は存在して一意であり, それらは一致する. さらに, 誤差評価

$$\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_V \leq c \left[\inf\{\|u - v_h\|_V; v_h \in V_h\} + \inf\{\|p - q_h\|_Q; q_h \in Q_h\} \right] \quad (20)$$

が成立する. ここに, $c = c(1/\alpha_0, 1/\beta_1, \|a\|, \|b\|)$ は引数に関して単調増加な正の関数である.

注意 1 (a) 条件 (19) は (15) から導くことはできない. (19) は有限要素空間 V_h と Q_h の選択に制限を課している.

(b) 定理 5 で条件 (5) は弱い条件

$$\inf \left\{ \frac{a(v, v)}{\|v\|_V^2}; v \in V_0, v \neq 0 \right\} > 0, \quad V_0 \equiv \{v \in V; b(v, q) = 0, \forall q \in Q\} \quad (21)$$

で置き換えることができる. このとき, 定理 6 が成立するためには, (21) で V, Q を V_h, Q_h で置き換えた条件が追加される.

(19) を満たす有限要素空間 V_h, Q_h を設定すれば, (17) は有限要素近似スキームであり, 帰着する連立一次方程式の行列は, 正定値ではないが対称である. したがって, 前処理付き MINRES などの効率的な対称行列用連立一次方程式ソルバーを使うことができる.

抽象的変分問題 5 は拘束条件付き最小化問題など多くの問題に適用できる. その代表例はストークス問題である.

例 3 $\mathbb{R}^d$ (d は空間次元) の有界領域 Ω で定義された関数 $(u, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f, & x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \Gamma \end{aligned}$$

を満たすものを求めよ。ここに、 Γ は Ω の境界であり、 $f \in L^2(\Omega)^d$ は与えられた関数である。

例 3 の弱形式は問題 5 で

$$V = H_0^1(\Omega)^d, \quad Q = L_0^2(\Omega) \equiv \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, dx = 0\} \quad (22a)$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx, \quad b(v, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \, dx \quad (22b)$$

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx, \quad g = 0 \quad (22c)$$

と置いたものになり、鞍点型変分問題になる。定理 5 の条件が満たされ、解の一意存在が得られる。下限上限条件 (19) を満たす有限要素空間の組 (V_h, Q_h) 、例えば、2 次元で三角形 2 次要素と三角形 1 次要素、を選んで、離散問題 7 を解いて数値解を得ることができる。

5 鞍点型変分問題に関連する非対称問題

前節で仮定 (2) がないとき、すなわち、双一次形式 a が対称でない場合を考える。このとき、変分問題 5 と鞍点問題 6 の同値性は成立しないが、次の結果は得られる。

定理 7 (1), (5), (11), (15) を仮定する。問題 5 の解 (u, p) は存在して一意であり、評価 (16) が成立する。

このとき、定理 6 に対応して、次の離散問題の結果が成立する。

定理 8 (1), (5), (11), (15), (19) を仮定する。問題 7 の解 (u_h, q_h) は存在して一意であり、誤差評価 (20) が成立する。

有限要素近似空間を設定して、問題 7 から有限要素近似スキームが得られる。帰着する連立一次方程式の行列は非対称であるので、GMRES などの非対称行列用のソルバーを使って解かれる。

第 3 節の移流拡散問題に対応する問題はオセーン問題である。

例 4 $\mathbb{R}^d$ (d は空間次元) の有界領域 Ω で定義された関数 $(u, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + (w \cdot \nabla) u + \nabla p &= f, & x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \Gamma \end{aligned}$$

を満たすものを求めよ。ここに、 Γ は Ω の境界であり、 ν は拡散係数、

$$f \in L^2(\Omega)^d, \quad w \in C^1(\bar{\Omega})^d$$

は与えられた関数であり、 $\nabla \cdot w = 0$ を満たしているとする。

例 4 の弱形式は、(22) で a を

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^d \left[\nu \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ (w \cdot \nabla u_i) v_i - (w \cdot \nabla v_i) u_i \} \, dx \right]$$

で取り換えて問題 5 を適用したものになる。強圧性 (5) が成立するので、下限上限条件 (19) を満たす有限要素空間 (V_h, Q_h) を使うと、定理 8 によりガレルキン有限要素解の誤差評価が得られる。 U を代表速度 ($|w|$ の最大値)、 L を代表長 (Ω の直径) とする。この数値解はレイノルズ数 $Re \equiv UL/\nu$ が高いとき、より精確には h を代表要素長として、セルレイノルズ数 Uh/ν が高いとき、振動する。高レイノルズ数で安定に計算するには、風上型の近似や次節で述べる特性曲線法に基づく近似が使われる。

6 非対称問題の対称化解法とその応用

例 2 に対応する非定常移流拡散問題を考える。 $T(>0)$ を時刻とする。

例 5 $u: \Omega \times (0, T) \rightarrow \Re$ で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u - \nu \Delta u = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (23a)$$

$$u = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T) \quad (23b)$$

$$u = u^0, \quad x \in \Omega, \, t = 0 \quad (23c)$$

を満たすものを求めよ。ここに、

$$f \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad w \in C([0, T], C^1(\bar{\Omega})), \quad u^0 \in L^2(\Omega)$$

は与えられた外力、流速、初期関数であり、 ν は拡散係数である。流速 w は

$$\nabla \cdot w = 0 \quad (x \in \Omega), \quad w = 0 \quad (x \in \Gamma) \quad (24)$$

を満たしているとする。

関数空間 $V = H_0^1(\Omega)$ を使って (23a), (23b) から、 $u: (0, T) \rightarrow V$ を未知関数とする弱形式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) + a(u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V, \, t \in (0, T) \quad (25)$$

が導かれる。ここに,

$$a(u, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (w \cdot \nabla u) v \, dx$$

であり, $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega)$ の内積である.

Δt を時間刻みとし, $N_T \equiv \lfloor T/\Delta t \rfloor$ とおく. V_h を V を近似する有限要素空間とする. 例5のガレルキン有限要素解 $\{u_h^n \in V_h; n = 0, \dots, N_T\}$ を

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) + a(u_h^n, v_h) = (f^n, v_h), \quad v_h \in V_h, \quad n = 1, \dots, N_T \quad (26a)$$

$$u_h^0 = \Pi_h u^0 \quad (26b)$$

で求める. ここに, $f^n = f(\cdot, n\Delta t)$, Π_h は V_h 空間への補間作用素である. u_h^{n-1} が既知のとき, u_h^n は (26a) から導かれる連立一次方程式を解いて求められる. その行列は, 双一次形式 a が非対称なので, 非対称行列になる.

例5を対称行列の枠内で解くことを考える. (23a) 左辺第1項と第2項の和は物質微分と呼ばれ, 関数 $\phi: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ として,

$$\frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + w \cdot \nabla \phi \quad (27)$$

で定義される. $X: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ が常微分方程式

$$\frac{dX}{dt}(t) = w(X(t), t), \quad t \in (0, T) \quad (28)$$

を満たしているなら, 物質微分 (27) は

$$\frac{D\phi}{Dt}(X(t), t) = \frac{d}{dt}\phi(X(t), t) \approx \frac{\phi(X(t), t) - \phi(X(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t}$$

と表現できる. $t_n = n\Delta t$, x を Ω の任意の点とし, 初期条件

$$X(t_n) = x \quad (29)$$

の下で (28) の解の t_{n-1} での値 $X(t_{n-1})$ はオイラー法を使って

$$X_1^n(x) \equiv x - w(x, t_n)\Delta t \quad (30)$$

と近似できる. したがって,

$$\frac{D\phi}{Dt}(x, t_n) \approx \frac{\phi(x, t_n) - \phi(X_1^n(x), t_{n-1})}{\Delta t} \quad (31)$$

となる. 例5のガレルキン特性曲線有限要素近似スキームは, $\{u_h^n \in V_h; n = 0, \dots, N_T\}$ を

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1^n}{\Delta t}, v_h \right) + \nu(\nabla u_h^n, \nabla v_h) = (f^n, v_h), \quad v_h \in V_h, \quad n = 1, \dots, N_T \quad (32a)$$

$$u_h^0 = \Pi_h u^0 \quad (32b)$$

で求める. ここに, $u_h^{n-1} \circ X_1^n$ は合成関数 $(u_h^{n-1} \circ X_1^n)(x) = u_h^{n-1}(X_1^n(x))$ を意味している. (32a) で u_h^n を求める際に現れる行列は対称なので, 対称行列用のソルバーを用いることができる. ガレルキン特性曲線有限要素法は高ペクレ数に対しても有効で, 安定性, 収束性も示されている.

ガレルキン特性曲線有限要素法は非定常オセーン問題だけでなく, w を求めるべき未知流速 u で置き換えた非定常ナビエ・ストークス問題に対しても有効に適用される.

その応用として, 表面張力を考慮した二流体問題を特性曲線有限要素法で数値シミュレーションした結果を図2に示す. 砂時計形状容器内にある重い流体が重力で下に落ちていく様子を計算している. それぞれの流体がナビエ・ストークス方程式に支配され, 密度の異なる二流体の問題にガレルキン特性曲線有限要素法を適用している. 各時間ステップでは, 対称行列を持つ連立一次方程式を解いて得られた結果である. その詳細は [8, 10] を参照して頂きたい.

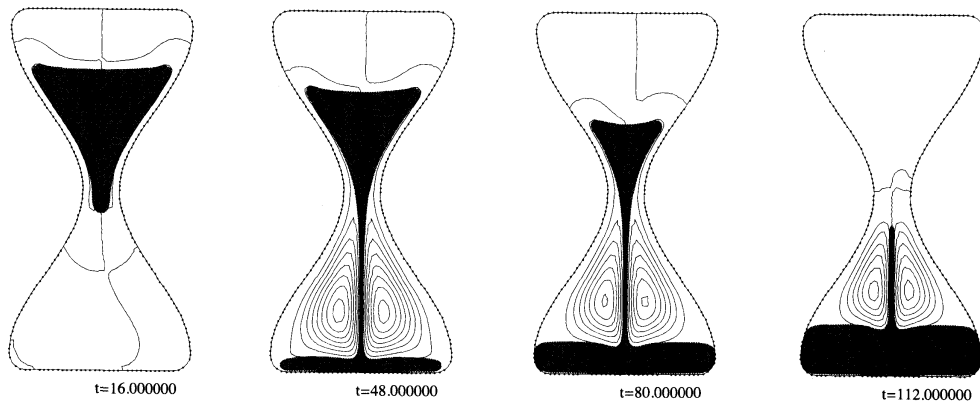


図 2: 界面と流線, $t = 16, 48, 80, 112$.

7 おわりに

偏微分方程式で記述される現象を数値的に解く際に重要な働きをする二つの原理, 最小型変分原理と鞍点型変分原理, それらに関連する非対称問題, それぞれから導かれるスキームとその解法と応用について論じた. 省略した証明等は, 最小型変分原理に関しては [1] を, 鞍点型変分原理に関しては [2, 9] を, 連立一次方程式のソルバーに関しては [3, 11] を, 特性曲線有限要素法に関しては [6, 4] を参照して頂きたい.

参考文献

- [1] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, New York, 2002.

- [2] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, New York, 1991.
- [3] 森正武, 杉原正顕, 室田一雄. 線形計算. 岩波応用数学講座, 1994.
- [4] H. Rui and M. Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Numerische Mathematik*, Vol. 92, pp. 161–177, 2002.
- [5] H. Rui and M. Tabata. A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 43, pp. 416–432, 2010.
- [6] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 53, pp. 459–483, 1988.
- [7] M. Tabata. A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing. *Memoirs of Numerical Mathematics*, Vol. 4, pp. 47–63, 1977.
- [8] M. Tabata. Numerical simulation of fluid movement in an hourglass by an energy-stable finite element scheme. In M. N. Hafez, K. Oshima, and D. Kwak, editors, *Computational Fluid Dynamics Review 2010*, pp. 29–50. World Scientific, Singapore, 2010.
- [9] 田端正久. 偏微分方程式の数値解析, 第4章, 混合型有限要素近似. 岩波書店, 東京, 2010.
- [10] 田端正久. ガレルキン・特性曲線有限要素法—理論と応用. 科学技術計算における理論と応用の新展開計, 数理解析研究所講究録, Vol. 1791, pp. 76–86, 2012.
- [11] H. A. van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.