

セル構造オートマトンに基づく 並列アレイ生成システム

Parallel Array Generating Systems Based on Cellular Automata

上野 聡
Satoshi Ueno

森田 憲一
Kenichi Morita

山形大学工学部
Faculty of Engineering, Yamagata University

要旨 本稿では、2次元のセル構造オートマトンの一種である非決定性 Partitioned Cellular Automata (PCA) に基づいた2次元図形生成システム PCA Array Generator (PCAG) を提案し、その種々のサブクラスの生成能力について研究した。PCAG のうちで、特に可逆性の制約を満たすモデルである Reversible PCAG (RPCAG) は、システムの1時刻前の状態が唯一に定まるものである。遷移関数を逆に適用することにより、生成された図形の解析を決定的に行うことができる。ここでは RPCAG のサブクラスを2つ与え、各々のシステムの図形生成能力が2次元テープ受理機械によって正確に特徴づけられることを示した。また、各々のシステムの図形解析時間について調べた。

1 はじめに

2次元の記号配列(図形)の集合を生成するようなシステムの枠組みの1つにアイソメトリックアレイ文法(IAG) [2],[6] がある。IAG は書換規則の適用によって2次元図形の集合を生成するある種の生成文法である。IAG のサブクラスとして従来、文脈依存(単調)アレイ文法(CSAG) [2],[6]、文脈自由アレイ文法(CFAG) [1]、正規アレイ文法(RAG) [1] などが提案されており、それらは Chomsky 風階層構造を構成している。その最下位のクラスである RAG は比較的高い生成能力を持っている [8] が、その認識問題が NP 完全になることが証明されている [3] ので、RAG に対してでさえ生成された図形の効率的な認識(解析)を行うは大変困難である。

一方、IAG の別のサブクラスとして、一意解析可能アレイ文法(UPAG) [9],[10] が提案されている。UPAG は、解析がバックトラック無しに実行できるという性質を持つため、効率的に解析できるアレイ文法のクラスを見いだすのに有用と考えられる。実際、そのサブクラスである単調終端 UPAG (MTUPAG) は線形時間で解析できて、しかもある程度強力な生成能力を持っている。

本稿では、図形生成の新しい枠組みとして、非決定性

Partitioned Cellular Automata (PCA) [4],[5] というある種のセル構造オートマトンに基づく生成システム “PCA Array Generator” (PCAG) を提案した。PCA は一つのセルを近傍セル数だけの部分に分割した CA であり、一般の CA のサブクラスになっている。各セルの次の時刻の状態は、近傍セルの内のそれと接した部分と自分自身の分割部分の現在の状態によって定まる。ここで考える CA は非決定的なものである。一つのコンフィグレーションからさまざまなコンフィグレーションが得られる。PCAG は、PCA を定められた初期コンフィグレーションに設定した後、非決定的な状態遷移によって種々の図形を生成させるようなモデルである。

PCAG の1つの特徴は並列的な図形生成である。IAG のような枠組みでも並列的な生成モデルを考えることはできるが、PCAG はセル構造オートマトンに基づいているため、書換システムに比べて並列性がより自然に導入できる利点がある。

PCAG のもう1つの特徴は、「可逆性」という制約の付加である。可逆性とは、セル構造オートマトンのどのコンフィグレーションもその直前のコンフィグレーションを高々1つしか持たないという性質をいう。これは UPAG の「一意解析可能性」に相当する性質であり、この結果、可逆的 PCAG (RPCAG) は UPAG

と同様、図形生成の過程を一意的に逆にたどる、すなわち解析を決定的に行うことができる。PCA は、通常の CA とは異なり、局所遷移関数の可逆性が大域遷移関数の可逆性と等価になるという性質がある^[4] ため、可逆的なモデルを設計するのが容易であるという利点を持つ。また、局所遷移関数を逆に適用するだけで、簡単に 1 時刻前のコンフィグレーションが得られる。

本稿では、PCAG, RPCAG を定義した上で、RPCAG のサブクラスとして、単調 RPCAG (MR-PCAG) と伝達記号数限定 RPCAG (BRPCAG) と呼ぶモデルを与える。そして、RPCAG, MRPCAG, BRPCAG の生成能力がそれぞれ、2 次元決定性 Turing 機械 (2DTM), 2 次元決定性線形有界オートマトン (2DLBA), 2 次元決定性 Erasing マーカーオートマトン (2DEMA) によって正確に特徴付けられることを示す。また、各々のシステムにおける図形の並列解析時間について調べる。

2 諸定義

定義 2.1 非決定性 2 次元 5 近傍 Partitioned Cellular Automata (PCA) は、

$$P = (Z^2, C, U, R, D, L, f_P)$$

によって定義される。但し、各項目は以下の通り。

Z は全ての整数の集合

C は各セルの中心部分の内部状態の有限集合

U は各セルの上側部分の内部状態の有限集合

R は各セルの右側部分の内部状態の有限集合

D は各セルの下側部分の内部状態の有限集合

L は各セルの左側部分の内部状態の有限集合

f_P は $C \times D \times L \times U \times R$ から $2^{C \times U \times R \times D \times L}$ への写像で局所関数と呼ばれる

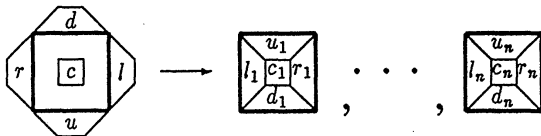
以下では $(c, d, l, u, r) \in C \times D \times L \times U \times R$ に対し、

$$f_P(c, d, l, u, r) = \{(c_1, u_1, r_1, d_1, l_1), \dots, (c_n, u_n, r_n, d_n, l_n)\}$$

となることを、

$$(c, d, l, u, r) \rightarrow (c_1, u_1, r_1, d_1, l_1), \dots, (c_n, u_n, r_n, d_n, l_n)$$

または、



のような図で書き表し、これを P の規則と呼ぶ。

また、以下では便宜上、右辺が空でないような規則全ての集合も f_P で表すことにする。

P のコンフィグレーション (configuration) は次のような写像 c である。

$$c: Z^2 \rightarrow C \times U \times R \times D \times L$$

$C \times U \times R \times D \times L$ 上の全てのコンフィグレーションの集合を $\text{conf}(C \times U \times R \times D \times L)$ によって表す。つまり、

$$\text{conf}(C \times U \times R \times D \times L) = \{c \mid c: Z^2 \rightarrow C \times U \times R \times D \times L\}$$

である。

ここで CENTER を $C \times U \times R \times D \times L \rightarrow C$ なる射影関数とする (UP , RIGHT , DOWN , LEFT も同様)。この時、大域関数

$$F_P: \text{conf}(C \times U \times R \times D \times L) \rightarrow 2^{\text{conf}(C \times U \times R \times D \times L)}$$

を次のように定義する。

$$F_P(c) = \{c' \mid \forall i, j \in Z [c'(i, j) \in f_P(\text{CENTER}(c(i, j)), \text{DOWN}(c(i, j+1)), \text{LEFT}(c(i+1, j)), \text{UP}(c(i, j-1)), \text{RIGHT}(c(i-1, j))))]\}$$

PCA P は、次の条件を満たすとき可逆的 PCA (RPCA) と呼ばれる。

$$\forall s_1, s_2 \in C \times D \times L \times U \times R \\ [s_1 \neq s_2 \rightarrow f_P(s_1) \cap f_P(s_2) = \emptyset]$$

c, c' を P の任意のコンフィグレーションとする。このとき、 $c' \in F_P(c)$ となることを c から c' が導出されるといい、 $c \xrightarrow{P} c'$ と略記する。関係 $\xrightarrow{P}$ の反射的推移的閉包を $\xrightarrow{*}_P$ と書く。さらに、 c, c' に対して $c \xrightarrow{P} c_1 \xrightarrow{P} c_2 \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} c_{n-1} \xrightarrow{P} c'$ となるような $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ が存在することを、 $c \xrightarrow{*}_P c'$ で表す。また、 $c \xrightarrow{P} c'$ が成り立つとき、 c' は c に還元されるともいい、 $c' \xleftarrow{P} c$ と書く。 $\xrightarrow{*}_P, \xleftarrow{*}_P$ の記号も導出の場合と同様に定義される。

また、先に定義した射影 CENTER を $\text{CENTER}^*: \text{conf}(C \times U \times R \times D \times L) \rightarrow \text{conf}(C)$ なる写像として次のように拡張する。

$$\forall (i, j) \in Z^2 [\text{CENTER}^*(c)(i, j) = \text{CENTER}(c(i, j))]$$

以下ではこのように拡張した CENTER^* をあらためて CENTER と書くことにする。

Σ を記号の空でない有限集合とする。 Σ 上の (2 次元の) 語とは、 Σ の記号の 2 次元有限連結配列である。

Σ 上の全ての語の集合を Σ^{2+} で表す (但し, 空語は Σ^{2+} に含まれない). w を Σ 上の語とする. 空白記号 # の 2 次元無限配列中に w を埋め込んで得られる無限の語を $w_{\#}$ で表す.

定義 2.2 PCA アレイ生成システム (PCA array generator, PCAG) は

$$G = (A, T, P, S, \$, \#)$$

によって定義される. 但し, 各項目は以下の通り.

A はアレイ記号の空でない有限集合

T は伝達記号の空でない有限集合

S は開始記号 ($S \in T$)

$\$$ は終了記号 ($\$ \in T$)

$\#$ は空白記号 ($\# \notin A \cup T$)

$P = (Z^2, C, U, R, D, L, f_P)$ は PCA で次の 3 条件を満たす

$$(a) C = A \cup \{\#\}, U = R = D = L = T \cup \{\#\}$$

$$(b) f_P(\#, \#, \#, \#) = \{(\#, \#, \#, \#)\}$$

$$(c) \forall (c, d, l, u, r) \in C \times D \times L \times U \times R$$

$$[(d = \$) \vee (l = \$) \vee (u = \$) \vee (r = \$)$$

$$\rightarrow f_P(c, d, l, u, r) = \emptyset]$$

以下では, 上記 (b) の条件によって定まる規則 $(\#, \#, \#, \#) \rightarrow (\#, \#, \#, \#)$ の表記は省略する. また, 各規則の図による表現中では $\#$ は空白で表す.

P が可逆的であるような生成システム G を可逆的 PCAG (RPCAG) と呼ぶ.

ここで, 次の条件を満たすようなコンフィグレーション c_0 を初期コンフィグレーションと呼ぶ.

$$\exists (i_0, j_0) \in Z^2 \quad [c_0(i_0, j_0) = (\#, \#, S, \#, \#) \wedge \forall (i, j) \in Z^2 [(i, j) \neq (i_0, j_0) \rightarrow c_0(i, j) = (\#, \#, \#, \#, \#)]]$$

また, 次の条件を満たすようなコンフィグレーション c_f を最終コンフィグレーションと呼ぶ.

$$\begin{aligned} & \exists (i_f, j_f) \in Z^2 \\ & [\exists x \in A [c_f(i_f, j_f) = (x, \#, \$, \#, \#)] \wedge \\ & \forall (i, j) \in Z^2 \\ & [[j > j_f \vee (j = j_f \wedge i < i_f) \rightarrow \\ & \exists y \in A \cup \{\#\} \\ & [c_f(i, j) = (y, \#, \#, \#, \#)] \wedge \\ & [j < j_f \vee (j = j_f \wedge i > i_f) \rightarrow \\ & c_f(i, j) = (\#, \#, \#, \#, \#)]]] \end{aligned}$$

語 $w \in A^{2+}$ は, ある初期コンフィグレーション c_0 と最終コンフィグレーション c_f が存在し, $c_0 \xrightarrow{*} c_f$

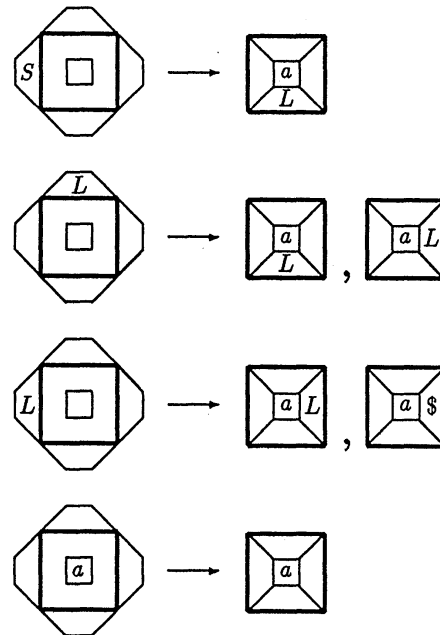
かつ $w_{\#} = \text{CENTER}(c_f)$ が成り立つとき, PCAG G によって生成されると言う. G によって生成される語すべての集合を, G によって生成される言語と呼び, $L(G)$ と書く. アレイ生成システムのクラス C によって生成されるアレイ言語のクラスを $\mathcal{L}[C]$ で表す.

定義 2.3 RPCAG $G = (A, T, P, S, \$, \#)$ において, P のどの規則もセンターのアレイ記号を空白記号に書き換えず, かつ空白記号から空白記号になる場合, 伝達記号が必ず来た方向に戻るようなものであるとき, G を単調 RPCAG (Monotone RPCAG: MRPCAG) と呼ぶ.

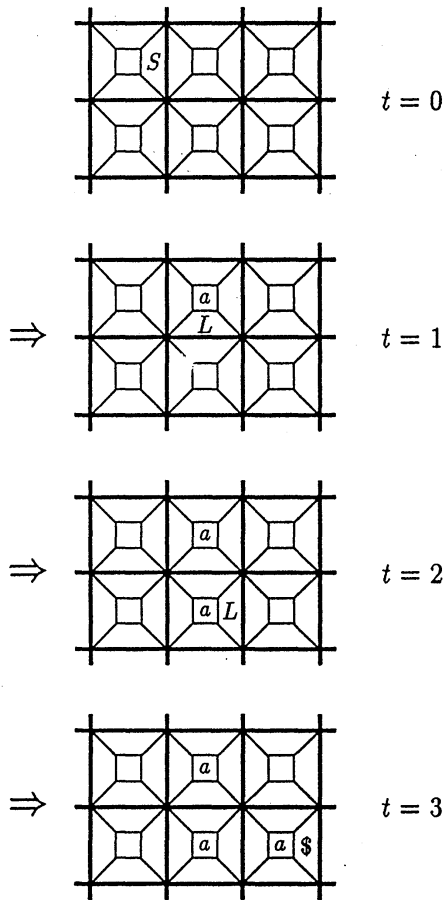
定義 2.4 MRPCAG $G = (A, T, P, S, \$, \#)$ において, G のどの局所関数もセンターの空白記号 $\#$ を除くアレイ記号を書き換えず, かつ空白記号から空白記号になる場合, 伝達記号が必ず来た方向に戻るようなものであり, かつある定数が存在して, どのコンフィグレーションもその中の伝達記号の総数とその定数で抑えられるならば, G を伝達記号数限定 RPCAG (Bounded transmission signal RPCAG: BRPCAG) と呼ぶ.

3 PCAG の図形生成例

・ a からなる L 形図形を生成する規則



・図形生成過程



4 決定性 2 次元テープ受容器による RPCAG とそのサブクラスの特徴付け

4.1 RPCAG の生成能力

RPCAG の生成能力が 2 次元決定性チューリング機械 (2DTM) によって正確に特徴づけられることを示す。

定義 4.1 2DTM は正方格子状に分割された 2 次元無限テープと有限状態制御部からなり, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, a_0, q_0, q_f)$ によって定義される。但し, 各項目は以下の通り。

Q は内部状態の空でない有限集合

Σ は入力記号の空でない有限集合

$\Gamma (\Sigma \subseteq \Gamma)$ はテープ記号の空でない有限集合

$a_0 (\in \Gamma - \Sigma)$ は空白記号

q_0 は初期状態

q_f は受理状態 (停止状態)

δ は $Q \times \Gamma$ から $Q \times \Gamma \times \{U, R, D, L\} \cup \{H\}$ への動作関数。

但し, U, R, D, L はヘッドの移動方向であり, それぞれ上, 右, 下, 左移動を表す。

また, H は停止を表す。

$x \in \Sigma^{2+}$ を任意の入力連結記号配列とする。空白記号の無限配列中に x を埋め込んだ 2 次元テープが M に与えられた時, M は x の最下行の最右列のます目から状態 q_0 でスタートするとする。もし, M が最終的に状態 q_f で停止するならば, x は M によって受理されるという。 M によって受理される配列の集合 (即ち, 言語) を $L(M)$ と書く。また, 2DTM によって受理される言語のクラスを $\mathcal{L}[2DTM]$ と書く。

補題 4.1

$$\mathcal{L}[RPCAG] \supseteq \mathcal{L}[2DTM]$$

[証明概略] 任意に与えられた 2DTM を

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, a_0, q_0, q_f)$ とする。 $L(G) = L(M)$ であるような $G = (A, T, P, S, \$, \#)$ を組み立てるための方法を以下に示す。任意の語 $x \in \Sigma^{2+}$ に対し, G は x 上の M の動きを逆方向にシミュレートする。すなわち G は, $CENTER(c_f) = x\#$ であるような最終コンフィグレーション c_f から P の動作を時間的に逆にたどったときに, M の順方向の動作が模倣されるような RPCAG である。そして, もし M が x を受理するならば, 初期コンフィグレーションに行き着く。 M は決定性であるので, 任意の $x \in \Sigma^{2+}$ に対する G によるこの還元操作は決定的になされる。(具体的な RPCAG の規則の表記は省略する。)

$CENTER(c_f) = x\#$ であるような最終コンフィグレーション c_f は, M に x を与えたときの計算の初期時点表示に対応させる ($\$$ が初期状態 q_0 に対応)。これを P の規則によって順次還元していくことによって M の時点表示が次々と得られるようにする。つまり, P による 1 ステップの還元によって, M の 1 ステップの動作を模倣して行き, M が x を受理するならば, 還元過程 $c_f \xrightarrow{P}^* c_0$ が存在するようにする。

また, M が決定性であるので, P の 2 つの規則の右辺に同一の要素が含まれないようにすること, つまり可逆性を満たすことができる。以上により, $L(G) = L(M)$ となる RPCAG G が得られる。 □

補題 4.2

$$\mathcal{L}[\text{RPCAG}] \subseteq \mathcal{L}[\text{2DTM}]$$

[証明概略] 任意に与えられた RPCAG を $G = (A, T, P, S, \$, \#)$ とする。 M はテープ上に仮想的な平面を2枚持ち（これはテープ記号数を増やすことで実現できる）、その1枚に入力 $x \in A^{2+}$ が与えられるとする。 x に対応する G の最終コンフィギュレーションを M が作り出すのは容易である。また、 M の有限制御部には P に対応する規則集合を持たせておく。 M は1枚の平面のます目を適当な順番で走査しながら各ます目に P の規則を逆に適用し、その結果をもう1枚の平面に書き込む。 P が RPCA であるのでこのプロセスは決定的に進行する。1枚の平面がすべて書き換えられたならば、平面の役割を交替する。 M はこのようにして P の還元過程を模倣し、最終的にどちらかの平面が G の初期コンフィギュレーションに相当する記号配列に到達できたとき、入力を受理して停止する。

従って、もし $c_0 \xrightarrow{P} c_f$ かつ $x_{\#} = \text{CENTER}(c_f)$ ならば、上記の方法で P の還元過程を模倣することにより、 G の初期コンフィギュレーションにまで必ず到達でき、また、その逆も成り立つ。 $\square$

補題 4.1 と補題 4.2 から次の定理が導ける。

定理 4.1

$$\mathcal{L}[\text{RPCAG}] = \mathcal{L}[\text{2DTM}]$$

4.2 MRPCAG の生成能力

MRPCAG の生成能力が2次元決定性線形有界オートマトン (2DLBA) によって正確に特徴づけられることを証明する。

定義 4.2 2次元決定性線形有界オートマトン (2DLBA) は、2次元決定性チューリング機械 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, a_0, q_0, q_f)$ で次の制約を満たすようなものをいう。

1. M がヘッドを上方（下方、左方、右方）に移動して空白記号 a_0 を読んだ場合には、 a_0 をそのままにして、次ステップでヘッドを下方、（上方、右方、左方）に移動させなければならない

より直観的に言えば、2DLBA は入力 x の範囲内のます目に書き込みができる以外には補助記憶を持たない2DTM である。

補題 4.3

$$\mathcal{L}[\text{MRPCAG}] \supseteq \mathcal{L}[\text{2DLBA}]$$

[証明概略] 与えられた任意の 2DLBA M に対して $L(G) = L(M)$ となる MRPCAG G を構築する方法は、本質的には $\mathcal{L}[\text{RPCAG}] \supseteq \mathcal{L}[\text{2DTM}]$ の証明と同じである。異なっているのは、 P の規則には C 部分のアレイ記号を空白記号にする規則がない点である（なぜなら 2DLBA は空白記号を非空白記号に変えることがないので）。これにより、 G は MRPCAG の条件を満たす。 $\square$

補題 4.4

$$\mathcal{L}[\text{MRPCAG}] \subseteq \mathcal{L}[\text{2DLBA}]$$

[証明概略] RPCAG をシミュレートする 2DLBA の構成も $\mathcal{L}[\text{RPCAG}] \subseteq \mathcal{L}[\text{2DTM}]$ の証明の場合と同様にできる。ここでは、MRPCAG においてはアレイ記号が消去されることがなく、また、伝達記号がアレイ記号の書かれたセルの範囲から2セル以上離れることがないという点に注意すればよい。 $\square$

補題 4.3 と補題 4.4 から次の定理が導かれる。

定理 4.2

$$\mathcal{L}[\text{MRPCAG}] = \mathcal{L}[\text{2DLBA}]$$

4.3 BRPCAG の生成能力

BRPCAG の生成能力が2次元決定性 Erasing マーカーオートマトン (2DEMA) によって正確に特徴づけられることを証明する。2DEMA は、通常のラベルつきマーカーオートマトンに、テープ上の記号を消去する能力を付加したものである。

定義 4.3 2DEMA は正方格子上に分割された2次元無限テープと有限状態制御部からなり、7 項組 $M = (Q, \Sigma, k, \delta, a_0, q_0, q_f)$ によって定義される。但し、各項目は以下の通り。

Q は内部状態の空でない有限集合

Σ は入力記号の空でない有限集合

k はマーカー数（有限）

$a_0 (\notin \Sigma)$ は空白記号

q_0 は初期状態

q_f は受理状態（停止状態）

δ は $Q \times \Sigma \times \{0, \dots, k\}$ から

$$Q \times \{e, n\} \times \{0, \dots, k\} \times \{U, R, D, L\} \cup \{H\}$$

への動作関数

但し、 U, R, D, L はヘッドの移動方向であり、それぞれ上、右、下、左移動を表す。

H は停止を表す。

e は a_0 への書き換え、 n は書き換えなしを表す。

0 はマーカーが置かれていないこと、 $1, \dots, k$

はマーカーの番号を表す。

$x \in \Sigma^{2+}$ を任意の入力連結記号配列とする。空白記号の無限配列中に x を埋め込んだ 2 次元テープが M に与えられた時、 x の最下行の最右列のます目から状態 q_0 でスタートするとする。もし、 M が最終的に x 上のあるます目において、その他のます目をすべて空白記号に書き換えて状態 q_f で停止するならば、 x は M によって受理されるという。 M によって受理される配列の集合（即ち、言語）を $L(M)$ と書く。また、2DEMA によって受理される言語のクラスを $\mathcal{L}[2DEMA]$ と書く。

補題 4.5

$$\mathcal{L}[\text{BRPCAG}] \supseteq \mathcal{L}[2DEMA]$$

[証明概略] 任意に与えられた 2DEMA を $M = (Q, \Sigma, k, \delta, a_0, q_0, q_f)$ とする。 $L(G) = L(M)$ であるような $G = (A, T, P, S, \$, \#)$ を組み立てる際、マーカーを伝達記号によって模倣する必要があるという点が異なるが、模倣の基本的な考え方は $\mathcal{L}[\text{RPCAG}] \supseteq \mathcal{L}[2DTM]$ の証明と同じである。（マーカーは、マーカーが存在するセルの R と、そのセルの右側のセルの L を往復する伝達信号によって表現される。） □

補題 4.6

$$\mathcal{L}[\text{BRPCAG}] \subseteq \mathcal{L}[2DEMA]$$

[証明概略] この証明も $\mathcal{L}[\text{RPCAG}] \subseteq \mathcal{L}[2DTM]$ の証明と基本的に同じである。任意に与えられた BRPCAG を $G = (A, T, P, S, \$, \#)$ とする。 M のテープ上に入力 $x \in A^{2+}$ が与えられたとする。 M は G の最終コンフィグレーションに対応する状況から開始して、 G による還元過程を逐次模倣する。そのとき M は、 G のコンフィグレーションにおける伝達信号の位置をマーカーによって、また、その種類を M の有制限制御部で記憶する（伝達記号が複数の場合でも同様）。 M が G の還元過程を模倣するには、テープをくまなく走査せねばならないが、このようなテープの全面走査はマーカーを余分に 5 つもたせることで可能となることが既に知られている。^[7] これにより、 M は順番にます目を走査しながら P の規則を逆に適用し、その結果を書き込む。但し、その結果は、まだ P の規則が逆適用されていないセルに影響を及ぼす可能性があるので、マーカーには規則が適用された前か後かの印を付けておく必要がある。更に、 C に空白記号を持つセルに伝達信号が与えられる規則については、その規則が適用される（ C にアレイ記号を持つ）セルに対応するます目にマーカーを置かねばならない。 M はこのようにして P の還元過程を模倣し、最終的に G の初期コンフィグレーションに相当する記号配列に到達できたとき、入力を受理して停止する。 □

補題 4.5 と補題 4.6 から、次の定理が導ける。

定理 4.3

$$\mathcal{L}[\text{BRPCAG}] = \mathcal{L}[2DEMA]$$

5 RPCAG family の解析時間

RPCAG family (RPCAG, MRPCAG, BRPCAG) の並列解析時間がそれぞれ、決定不能、多項式領域、多項式時間となることを示す。但し、ここでいう並列解析時間とは、RPCAG を時間的に逆に動作させることによって図形を解析するのに要する時間をいう。

5.1 RPCAG によって生成された図形の並列解析時間

RPCAG によって生成された図形の並列解析時間は、定理 4.1 より RPCAG の図形生成能力が 2DTM の図形受理能力と等価であることから決定不能となる。

5.2 MRPCAG によって生成された図形の並列解析時間

MRPCAG によって生成された図形の並列解析時間は、定理 4.2 より MRPCAG の図形生成能力が 2DLBA の図形受理能力と等価であり、図形の面積の範囲以外には補助記憶を持たないことから多項式領域となる。

5.3 BRPCAG によって生成された図形の並列解析時間

伝達記号限定数 k の BRPCAG によって生成された面積 n (最終コンフィグレーションのアレイ記号の総数) の図形に対する並列解析時間が多項式時間 $O(n^{k+1})$ であることを示す。ここで、並列解析時間とは BRPCAG の逆動作によって図形を解析したときの時間、言い替えば、最終コンフィグレーションから初期コンフィグレーションにいたる（唯一の）還元過程のステップ数である。

BRPCAG の制約条件（アレイ記号が書き換えられない、伝達記号がアレイ記号から 2 つ以上離れたセルに存在しない）より、面積 m 、伝達記号限定数 k 、伝達記号の種類 t のコンフィグレーションの総数は、次の式で押さえられる。

$$\sum_{j=1}^k 6m+2C_j \cdot t^j$$

BRPCAG によって生成された図形の還元過程では、同じコンフィグレーションが現れることはなく、アレ

イ記号が減るのみであるから、そのステップ数は面積 n から 0 までのコンフィギュレーションの総数 S_n で抑えられる（これは、与えられた図形が初期コンフィギュレーションに到達しない場合にも言える）。

$$S_n = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^k 6m+2 C_j \cdot t^j$$

$$< k \cdot t^k \cdot (6n+2)^{k+1}$$

故に、伝達記号限定数 k の BRPCAG の解析時間は多項式時間 $O(n^{k+1})$ となる。

6 むすび

本稿では、RPCAG, MRPCAG, BRPCAG の生成能力が 2 次元決定性テープ受理機械によってどのように特徴付けられるかを調べ、次の結果を得た。

$$\mathcal{L}[\text{RPCAG}] = \mathcal{L}[\text{2DTM}]$$

$$\mathcal{L}[\text{MRPCAG}] = \mathcal{L}[\text{2DLBA}]$$

$$\mathcal{L}[\text{BRPCAG}] = \mathcal{L}[\text{2DEMA}]$$

また、各々のシステムにおける図形の並列解析時間について次の結果を得た。

$$\begin{array}{ll} \text{RPCAG} & : \text{決定不能} \\ \text{MRPCAG} & : \text{多項式領域} \\ \text{BRPCAG} & : \text{多項式時間} \end{array}$$

文献 [9] では、UPAG とそのサブクラスである CSUPAG の長方形言語（生成される語の形がすべて長方形である言語）の生成能力がそれぞれ 2DTM と 2DLBA によって正確に特徴づけられることが示されている。PCAG ファミリーに対する上の結果が長方形言語族に限定した場合にも成り立つことは容易に分かるので、これらのことより下の関係が得られる。

$$\mathcal{L}^R[\text{RPCAG}] = \mathcal{L}^R[\text{UPAG}] = \mathcal{L}^R[\text{2DTM}]$$

$$\mathcal{L}^R[\text{MRPCAG}] = \mathcal{L}^R[\text{CSUPAG}] = \mathcal{L}^R[\text{2DLBA}]$$

参考文献

- [1] Cook, C.R., and Wang, P.S.P., "A Chomsky hierarchy of isotonic array grammars and languages," *Computer Graphics and Image Processing*, 8: 1, 144-152 (1978)
- [2] Milgram, D.L., and Rosenfeld, A., "Array automata and array grammars," *Information Processing* 71, 69-74 (1972).
- [3] Morita, K., Yamamoto, Y., and Sugata, K., "The complexity of some decision problems about two-dimensional array grammars," *Information Sciences*, 30, 241-262 (1983).
- [4] Morita, K., and Harao, M., "Computation universality of one-dimensional reversible (injective) cellular automata," *Trans. IEICE*, E-72: 6, 758-762 (1989).
- [5] Morita, K., and Ueno, S., "Computation-universal models of two-dimensional 16-state reversible cellular automata," *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E57-D: 1, 141-147 (1992)
- [6] Rosenfeld, A., *Picture Languages*, Academic Press, New York (1979).
- [7] 梅尾, 森田, 菅田, "2 次元入力テープ形状に関する諸問題", *電子通信学会論文誌*, 60-D: 8, 570-577 (1977).
- [8] Yamamoto, Y., Morita, K., and Sugata, K., "Context-sensitivity of two-dimensional regular array grammars," *Int. J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 3: 3 & 4, 295-319 (1989), and in *Array Grammars, Patterns and Recognizers*, Ed. P.S.P. Wang, World Scientific Publ., Singapore, pp.17-41 (1989).
- [9] 山本, 森田, "決定性 2 次元テープ受理機械と等価なアレイ文法のクラスについて", *京都大学数理解析研究所講究録* 754, 115-124 (1991 年冬の LA シンポジウム予稿) (1991)
- [10] Yamamoto, Y., and Morita, K., "Two-dimensional uniquely parsable isometric array grammars", *Proc. Int. Colloq. Parallel Image Processing*, Paris, pp.271-282 (1991)