

パラメータを持つ有理関数のハイブリッド積分

中川菜菜美

NANAMI NAKAGAWA*

愛媛大学大学院理工学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, EHIME UNIVERSITY

甲斐博

HIROSHI KAI†

愛媛大学大学院理工学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, EHIME UNIVERSITY

野田松太郎

MATU-TAROW NODA‡

愛媛キャンパス情報サービス

EHIME CAMPUS INFORMATION SERVICE Co.,LTD.

1 はじめに

近似代数計算の応用として、ハイブリッド積分アルゴリズム [1, 2] が提案され、その有効性が確認されている。一般に、被積分関数がある有理関数で与えられる場合には数式処理による不定積分のアルゴリズムを用いることができるが、工学上の応用では、有理関数の係数が定数で与えられるとは限らず、パラメータを含む場合が多く考えられる。そのため、ハイブリッド積分の応用として、本研究では不定積分に対するハイブリッド計算の適用範囲を、1 変数有理関数からパラメータを持つ 1 変数有理関数に拡張することを検討した。本研究では、ヘンセル構成によるべき級数根を用いてハイブリッド積分を拡張する。本研究の提案法による不定積分の計算は、工学や物理に現れるパラメータの微小摂動に関する計算に応用可能であり、科学技術計算において意義があると考えられる。

2 ハイブリッド積分

よく知られているように、5 次以上の多項式の根は一般に根号を用いては表せないため、不定積分を陽的な式で得ることは一変数有理関数の場合でさえ難しい。不定積分が求められる場合でも代数的な数を含んだ計算は時間がかかる。また、有理関数近似のような係数に浮動小数を含む場合、代数的なアルゴリズムは

*nakagawa@hpc.cs.ehime-u.ac.jp

†kai@hpc.cs.ehime-u.ac.jp

‡noda@ecis.co.jp

適用できない。このような問題に対して、近似代数の応用の一つとして一変数有理関数の近似不定積分を求めるアルゴリズムが提案された。このアルゴリズムをハイブリッド積分と呼ぶ。ハイブリッド積分のアルゴリズムの概略は以下の通りである。

入力 実係数の一変数有理関数 $P(x)/Q(x)$

出力 入力関数の近似不定積分

Step1 入力関数の不定積分を有理関数項と超越関数項に分離する。

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{n(x)}{d(x)} + \int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

ここで、近似 GCD を用いた 近似 Horowitz のアルゴリズムを適用する。もし $\text{AppGCD}(Q(x), Q'(x); \epsilon) = 1$ ならば $n/d = 0$ となる。

Step2 超越関数項の積分を行う。まず、 $q(x)$ の零点を Durand-Kerner 法で求める。 $q(x)$ の係数は全て実数なので、零点は実数または共役複素対となる。 m を実根の数及び n を共役複素根の数とすると $\deg(q(x)) = m + 2n$ である。ここで、 $q(x)$ の根を、

実の零点 : $a_1, a_2, \dots, a_m$

共役複素零点 : $b_1 \pm ic_1, \dots, b_n \pm ic_n$

と表す。

Step3 $p(x)/q(x)$ の部分分数分解を計算する。

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^m \frac{e_k}{x - a_k} + \sum_{k=1}^n \frac{2(f_k x - b_k f_k - c_k g_k)}{x^2 - 2b_k x + b_k^2 + c_k^2}$$

Step2 で求めた零点から、分母の各係数 e_k, f_k, g_k は留数定理により得られる。すなわち $r(x) = p(x)/q'(x)$ としたとき、 e_k, f_k, g_k を次式で計算する。

$$e_k = r(a_k)$$

$$f_k = \text{Re}\{r(b_k + ic_k)\}$$

$$g_k = \text{Im}\{r(b_k + ic_k)\}$$

Step4 積分公式を用いて解を得る。

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \sum_{k=1}^m c_k \log |x - a_k| \\ &+ \sum_{k=1}^n f_k \log |x^2 - 2b_k x + b_k^2 + c_k^2| - 2g_k \arctan \left(\frac{x}{c_k} - \frac{b_k}{c_k} \right) \end{aligned}$$

例として、次の有理関数の不定積分を求める。

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1.1x^2 + x + 0.001}{x^3 + 0.001x^2 + 1.001}$$

ハイブリッド積分のアルゴリズムを適用すると、近似的な不定積分は次の式になる。

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 0.69986675 \log |x - 1.0| + 2.000666 \log |x^2 + 1.001x + 1.001| \\ - 0.5763499 \arctan(1.1543160x + 0.5777352)$$

このように実係数の一変数有理関数の場合は結果を得ることができるが、ここで次式の Fateman の例題 [4] について考える。

$$\int \frac{1}{1 + 5x + ax^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5} dx \quad (1)$$

この場合、分母の係数にパラメータを持つため Durand-Kerner 法が使えない。係数にパラメータを持つ問題は工学など応用問題に表れる。そこで、パラメータをもつ有理関数にもハイブリッド積分のアルゴリズムが適用できるように拡張を考える。

3 ヘンゼル構成によるハイブリッド積分の拡張

3.1 ヘンゼル構成による多項式のべき級数根の計算

本研究では、多項式の零点を近似的に得るために、文献 [3] のヘンゼル構成の応用を検討した。

例として 2 変数多項式 $f(x, u) = x^2 - 1 - u$ を考える。 $f(x, u) = 0$ を x について解けば、 $x = \pm\sqrt{1+u}$ が解として得られる。この根を展開点 $u = s$ についてべき級数として表現できる。 $s = 0$ の場合、次のようなべき級数根になる。

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \dots$$

べき級数根を用いて次のように因数分解できる。

$$x^2 - 1 - u = \left(x - 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{16}u^3 + \frac{5}{128}u^4 + \dots \right) \left(x + 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \dots \right)$$

この計算にはヘンゼル構成を用いることができる。ヘンゼル構成では、展開点 s に対して、

条件 1 : $f(x, u)$ の主係数 $f_n(u)$ について $f_n(s) \neq 0$ である。

条件 2 : $f(x, s)$ が無平方である。

という 2 つの条件を仮定する。またこのような条件を満足しない展開点でもヘンゼル構成を計算する方法が提案されており、これを拡張ヘンゼル構成と呼ぶ。これに対し、上の条件を満足する展開点におけるものを一般ヘンゼル構成と呼ぶ。1 パラメータの場合について述べると、ヘンゼル構成により得られるべき級数は、収束半径内で収束する。

3.2 ハイブリッド積分の拡張

例として、(1) 式の例題を考える。分母の多項式は代数的に無平方である。展開点を原点としたときの分母のべき級数根はそれぞれ、

$$-0.1879265880 + 0.005952546678a + \dots$$

$$\pm 2.607204659 \pm 1.974492568i \pm (0.03964679224 + 0.06081333465i)a + \dots$$

$$\pm 0.2011679530 \pm 0.6760340071i \pm (0.03667051892 + 0.01463027495i)a + \dots$$

のような 1 つの実数根と 4 つの複素数根が得られる。近似 GCD のパラメータを $\epsilon = 10^{-8}$ とし、これらの根を用いてハイブリッド積分を求めると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{1+5x+ax^2+10x^3+5x^4+x^5} dx \\ = & \frac{\log|x+0.188+0.0059a|}{5.93-0.321a} + \frac{-12.4+0.307a}{159-11.7a} \log|x^2-2(0.201-0.0367a)x+0.497+0.00502a| \\ & + \frac{-4.98+1.67a}{159-11.7a} \arctan \frac{x-0.201+0.0367a}{-0.676-0.0146a} \\ & + \frac{141+14.9a}{21709-4760a} \log|x^2-(5.21-0.0792a)x+10.7-0.447a| \\ & + \frac{-88.0+13.2a}{21709-4760a} \arctan \frac{x+2.61-0.0396a}{-1.97+0.0608a} \end{aligned}$$

べき級数の次数を大きくすることにより近似不定積分から値代入により求めた定積分が真の解に近づく。但し、べき級数根の収束範囲内に限られる。収束半径は 1 パラメータの場合は根は 1 変数べき級数になるので収束領域は円になる。これは、べき級数根の展開点から最も近い特異点までの距離となる。従って、べき級数根により構成された近似的ハイブリッド積分の収束半径はべき級数根の収束半径のうち最も展開点に近い距離のものに制限される。2 パラメータ以上になると、多変数べき級数になるため、収束領域は円でなくなる領域になる。

ハイブリッド積分では、近似 Horowitz のアルゴリズムにより有理関数項と超越関数項に分解される。このとき超越関数項の分母は代数的に無平方である。従って、通常、パラメータに展開点を代入しても無平方である。しかし、パラメータに展開点を代入したとき無平方にならない場合もある。無平方にならない場合は、一般ヘンゼル構成によるべき級数展開が計算できない。

このような点はあらかじめ計算できる。分母の多項式とそれを微分した多項式の終結式が零になる点を求めることにより計算できる。この例では、終結式の値は、

$$108a^5 - 2275a^4 - 17000a^3 + 795000a^2 - 7100000a + 20450000$$

となり、零点を求めると $a = 10$, $a = -2045/108$ が得られる。 $a = 10$ の時、ハイブリッド積分は次のようになる。

$$\int \frac{1}{(1+x)^5} dx = \frac{-0.250}{4.00x^3 + 0.999 + 3.99x + 5.99x^2 + 1.00x^4}$$

また、 $a = -2045/108$ の時は次のような結果になる。

$$\begin{aligned} \int \frac{108}{(2x^3+76x^2+216x+27)(3x-2)^2} dx = & \frac{-0.0576}{-0.666+0.999x} - 0.0922 \log|x-0.667| \\ & + 0.0959 \log|x+0.131| + 0.00175 \arctan(0.363x+1.13) \\ & - 0.00187 \log(x^2+6.20x+17.2) \end{aligned}$$

このように、無平方にならない点では、主変数 x に関する積分の形が大きく異なる。よってこのような点での積分は特別に扱う必要があると考えられる。

以上よりハイブリッド積分のアルゴリズムは、以下のようにまとめられる。

入力 1 パラメータを持つ有理関数 $P(x,a)/Q(x,a)$, 展開点 s , べき級数根の次数

出力 $a = s$ 近傍での $P(x, a)/Q(x, a)$ の近似不定積分

Step1 近似 Horowitz のアルゴリズムを行い、有理関数項と超越関数項に分解する.

Step2 展開点 s に値を代入した超越関数項の分母の多項式が無平方でないなら、その展開点でのハイブリッド積分を計算する. 特別な点であることを表示し、アルゴリズムを終了する.

Step3 展開点 s でのべき級数根をヘンゼル構成で求め、超越関数項部分の近似不定積分を計算する. その結果と有理関数項との和が近似解である.

4 ハイブリッド積分の誤差

4.1 絶対誤差による評価

本節では、ハイブリッド積分により得られた近似不定積分に値を代入することにより得られた定積分値の誤差評価を数值的に行う.

1. Fateman の例題

$$\int_0^1 \frac{1}{1+5x+ax^2+10x^3+5x^4+x^5} dx \quad (2)$$

2. 乱数によって係数を生成した関数

$$\int_0^1 \frac{-a^2 + (53 + 23a^3)x + (94 + 83a)x^2 - 86x^3 + x^4}{-42 - 76a^4 - 65a^3x + (88a + 25a^2)x^2 + 28x^4 + x^5} dx \quad (3)$$

これらの関数について、展開点 $a = 0$ 、べき級数の次数 $k = 10$ 、近似 GCD のパラメータ $\epsilon = 10^{-8}$ 、有効桁数 15 桁として Maple 10 で計算を行った. 真の値が不明であるが、パラメータの値があらかじめ決まっている場合は、そのパラメータの値を代入し十分な有効桁数を取って数値積分すれば高精度の結果を得ることができる. それを真の値として Maple 10 の数値積分で行った結果を表にあわせて表示する. その値とハイブリッド積分との誤差は絶対誤差により評価した. 例に挙げた 2 つの問題について、収束半径につい

表 1: (2) のハイブリッド積分の誤差

a	数値積分	ハイブリッド積分	誤差
0.0	0.283329067791291	0.283329067791289	0.2×10^{-14}
0.25	0.281664967430937	0.281664967430940	0.3×10^{-14}
0.5	0.280032486063120	0.280032486063122	0.2×10^{-14}
9.0	0.238080341327114	0.312182074876377	0.74×10^{-1}

ては正確に評価できないが、 $a = 0$ をべき級数の展開点に近い範囲において高精度で定積分値を求めることができた.

表 2: (3) のハイブリッド積分の評価

a	数値積分	ハイブリッド積分	誤差
0.0	-1.21973419806242	-1.2197341980623	0.12×10^{-12}
0.05	-1.45291401376140	-1.4529140137604	0.1×10^{-11}
0.1	-1.86935648378566	-1.8693564816701	0.21×10^{-8}
0.7	-1.02835399949333	-1.3473422895593	0.32

4.2 拡張ヘンゼル構成を用いた不定積分の誤差

次式は, $a = 0$ において分母の多項式が無平方ではなくなるため原点では積分の形式が異なりヘンゼル構成が適用できない.

$$\int_0^{0.1} \frac{75x - 50 + 23a}{x^2 - a - a^3} dx \quad (4)$$

従って, 前節のアルゴリズムでは, 特別な点として評価されてしまう. この周辺の振る舞いをみるためには, この周辺の展開点で不定積分を計算する必要があり, 展開点の周辺の振る舞いはみることが困難になる. しかし, 拡張ヘンゼル構成を用いれば, 他の点と同様にべき級数根を求めることができる. 複数パラメータをもつ場合も同様に拡張ヘンゼル構成を用いれば可能である.

しかし, 無平方でない点とその周辺では主変数に関する不定積分の式の形が大きく異なるため, 得られた近似不定積分を用いて定積分を求めた場合の誤差が問題になる.

つまり拡張ヘンゼル構成を用いた場合は, 次のようなより単純なアルゴリズムになる.

入力 パラメータを持つ有理関数 $P(x, a)/Q(x, a)$

出力 入力関数の近似不定積分

Step1 拡張ヘンゼル構成を用いて, 分母の多項式のべき級数根を求める.

Step2 ハイブリッド積分を用いて不定積分を求める.

本論では数値的にこの方法で高精度な解が求まるかどうか数値的に確認する. 分母の多項式のべき級数根は以下の通りである.

$$\pm a^{1/2} + \frac{1}{2}a^{5/2} - \frac{1}{8}a^{9/2} + \dots$$

$a \geq 0$ のとき, このべき級数根を用いてハイブリッド積分のアルゴリズムにより不定積分を求めると以下の

式が得られる.

$$\begin{aligned} \int \frac{75x - 50 + 23a}{x^2 - a - a^3} dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{75a^{1/2}}{2} + \frac{75a^{5/2}}{2} - \frac{75a^{9/2}}{2} + \frac{75a^{13/2}}{2} - \frac{375a^{17/2}}{128} \right. \\ &\quad \left. + \frac{525a^{21/2}}{256} - 50 + 23a \right) \times \\ &\quad \frac{\log \left| x - a^{1/2} - \frac{a^{5/2}}{2} + \frac{a^{9/2}}{8} - \frac{a^{13/2}}{16} + \frac{5a^{17/2}}{128} - \frac{7a^{21/2}}{256} \right|}{a^{1/2} + \frac{a^{5/2}}{2} - \frac{a^{9/2}}{8} + \frac{a^{13/2}}{16} - \frac{5a^{17/2}}{128} + \frac{7a^{21/2}}{256}} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{75a^{1/2}}{2} + \frac{75a^{5/2}}{2} - \frac{75a^{9/2}}{2} + \frac{75a^{13/2}}{2} - \frac{375a^{17/2}}{128} \right. \\ &\quad \left. + \frac{525a^{21/2}}{256} + 50 - 23a \right) \times \\ &\quad \frac{\log \left| x + a^{1/2} + \frac{a^{5/2}}{2} - \frac{a^{9/2}}{8} + \frac{a^{13/2}}{16} - \frac{5a^{17/2}}{128} + \frac{7a^{21/2}}{256} \right|}{a^{1/2} + \frac{a^{5/2}}{2} - \frac{a^{9/2}}{8} + \frac{a^{13/2}}{16} - \frac{5a^{17/2}}{128} + \frac{7a^{21/2}}{256}} \end{aligned}$$

数値積分は前節の例と同様にパラメータがあらかじめ分かっているとして十分な精度で計算している. これを真の値とし絶対誤差を示している. 表に示す通り, この例では展開点の近傍では十分な精度が得られている. この方法では, 積分の形が変化するような特殊な点でも同じ手続きが取れるため, 計算がより単純に

表 3: 拡張ヘンゼル構成を用いた (4) のハイブリッド積分

a	数値積分	ハイブリッド積分	誤差
0.1	44.9762971699131	44.976297169911	0.2×10^{-11}
0.2	20.3394992708154	20.3394992675149	0.33×10^{-8}
0.3	12.1526157432124	12.1526155038469	0.24×10^{-6}

なる. 精度や計算コストについてのアルゴリズムの比較を, 今後検討する必要がある.

5 結論

本稿では, 工学の応用上で重要な, パラメータを持つ有理関数の不定積分を求める方法として, ハイブリッド積分の適用範囲を拡張しヘンゼル構成を用いる方法を検討した. 提案法を数式処理システム Maple10 上で実装し, パラメータに値を代入して数値計算により求めた定積分の近似値を真の値とし, 提案法により得られる近似不定積分より求めた定積分値との比較を行った. その結果, べき級数の展開点に近い範囲において高精度の近似不定積分が求められることを示すことができた. また, 展開点での多項式が重根を持つ場合にも適用可能な拡張ヘンゼル構成を用いてハイブリッド積分を求める方法を検討した. 本研究で行った数値実験では拡張ヘンゼル構成を用いたハイブリッド積分により精度の高い近似不定積分を得ることができた. 今後, これら 2 つの方法の比較を行っていく必要がある.

さらに, 解への収束がべき級数根の収束半径に依存することから, 近似値の精度とべき級数根の収束半径の関係の理論的な検討も必要と考えられる. また本手法をより実用に近づけるために, 収束領域を数値的に示す方法の検討も必要である.

本論の例題では 1 パラメータのみを扱ったが, 同様の検討を複数のパラメータを持つ有理関数の積分で行わなければならない. また, 多重積分への拡張も検討課題としてあげられる.

参 考 文 献

- [1] M.T. Noda and E. Miyahiro, On the Symbolic/Numeric Hybrid Integration, Proc.ISSAC'90, p.304, 1990.
- [2] M.T. Noda and E. Miyahiro, A Hybrid Approach for the Integration of a Rational Function, J. CAM, Vol.40, pp.259-268, 1992.
- [3] T. Sasaki and F. Kako, Solving Multivariate Algebraic Equation by Hensel Construction, Japan J. Ind. Appl. Math. 16, No. 2, pp.257-285, 1999.
- [4] R. Fateman, Revisiting numerice/symbolic indefinite integration of rational functions, and extentions, preprint, 2004.