

地球統計学的な疑似生成観測値の利用による パラメータの空間分布同定

浜口 俊雄・小尻 利治・中北 英一

要 旨

本研究では、地下水モデルの透水係数分布同定において、未知数が観測数よりも多いという非適切条件下で事前情報を使った従来手法の逆解析結果と、地球統計学を基に疑似生成した観測データを利用して観測数が未知数よりも多くなるよう条件改善した本提案手法の逆解析結果を数値実験で比較検討した。前者は解の一意性が確保されていないため同定精度は部分的に高くはない領域が複数見受けられた。一方、後者は疑似観測データ生成で観測条件が改善されたため解の一意性が確保されて比較的高い同定精度が得られた。以上から、本提案手法は観測条件の改善に寄与して逆解析の適切化がなされ、透水係数分布同定が良好な精度で得られることが確認できた。

キーワード：透水係数，空間分布，地球統計学，同定，疑似生成観測データ，逆解析

1. 序論

近年の水文解析において、空間的な挙動の違いを表現したモデル構造を持ち、かつ、空間的水文量(例えば、流出量)の高精度な把握・再現を目的として、分布型モデルの採用は必要不可欠である。分布型モデルは例えば、降水量の空間分布、河川流量の空間分布、流域水資源賦存量の空間分布などの把握に利用できる。その際には、各所の観測データを基にして、分布型モデルに使われている一様または空間分布したモデルパラメータを同定する必要がある。同時に観測データから解析のための境界条件(位置・値)を決定しなければならない。また解析の再現精度を上げるためには、上記のモデルパラメータや境界条件を出来るだけ現実的なものに最適設定しなければならない。つまり、両者を直接的に計測して把握できるならば、それが最も望ましい同定/設定となるが、それは一般的に難しく、部分計測できるか全く計測できないことが普通である。そこで直接的でも間接的でも計測データがあれば、それを用いて推定して定めるのが一般的である。ただし、計測データには量と質の問題があつて、それに見合う設定のモデルでなければ解析の再現性が逆に損なわれる。すなわち、不十分な計測データ数や計測データ精度であつたり、間接計測のデータ割合が高いにも関わ

らず、無理をして未知のモデルパラメータ数を多く同定したり、未知の境界条件を多く推定したりしてしまった場合に同定解や推定解の不確かさが増大ないしはそれらの客観性が欠如してしまい、解析領域のどこかに不具合のある設定が存在することになって解析の再現性が損なわれる。逆に、既得の計測データ数や計測データ精度よりも極端に少ないモデルパラメータ数を同定したり、未知の境界条件を少なく推定したりしてしまった場合に同定解や推定解が代表的・平均的に求まってしまい、解析領域の局所的な挙動が一様平滑化されることになって、これも解析の再現性が損なわれる。例えば、或る計測データの量と質に対して細か過ぎる分布設定を同定した場合に、全観測点から比較的遠い局所域で再現性の良くない結果に陥る可能性がある。逆に粗過ぎる設定にした場合には、挙動の一様化が強く出た再現結果となる可能性がある。試行錯誤ないしは逆解析によって物性分布を定める際の順解析キャリブレーションは上記を折衷する解析設定を模索していると言ってよい。

ところで、観測数が多いほど同定精度には有利に働くが、物理的/経済的制約によって観測数は通常それほど多くは存在していない。この状況を踏まえてモデルを定めるには検討し得るアプローチが2つある。1つは観測数に増減を求めずに未知のモデルパラメータ数を減らす手法である。

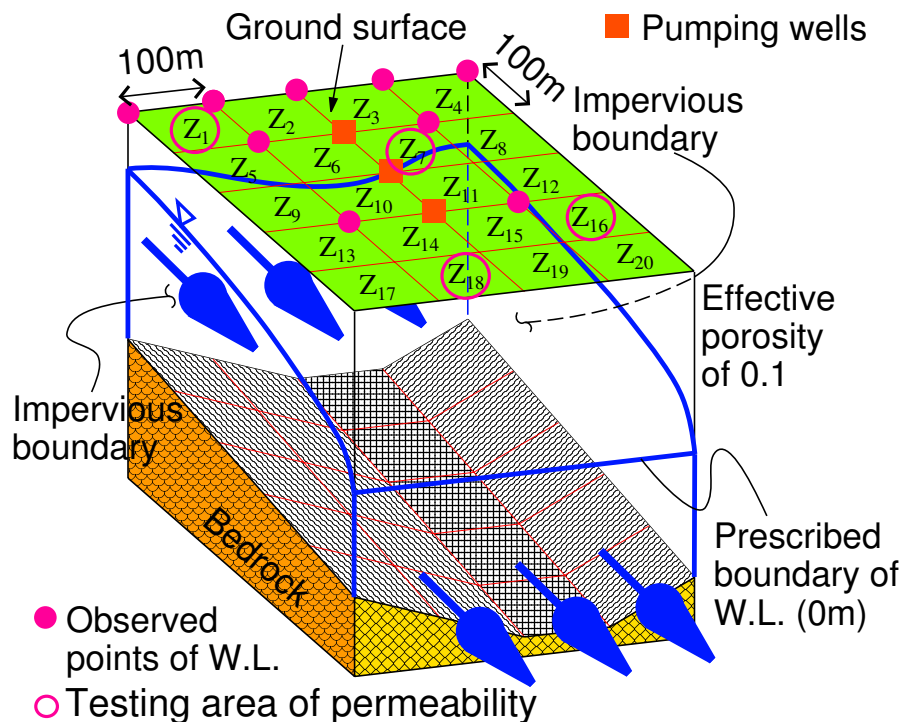


Fig.1 Hypothetical aquifer

もう1つは観測数を増やして未知のパラメータ数に増減を求めない手法である。既往の研究で浜口(2004)はモデルパラメータの分布モデルを地球統計学(Geostatistics)的に与えることで未知パラメータ数を領域分割数から分布モデルパラメータ数の2個まで減らして同定することで、先述の再現性に支障を来さないように解析モデルを定める前者の手法を提案した。本研究では後者を考え、実測データを基にして地球統計学的手法により、モデルを定めるために妥当な数まで観測データを客観的に増やし、擬似的に観測データを充実させる手法を提案する。観測データ $[y]$ と同定すべきセル要素のパラメータ $[x]$ は、流出解析の場合に $[y]$ 流出量/河川水位、 $[x]$ Manning粗度/斜面勾配など、地中の飽和不飽和解析の場合に $[y]$ 地下水位、 $[x]$ 透水係数/(有効)間隙率/土壌水分特性パラメータなどが該当する。

いま議論を簡素化すべく、帯水層を例に検討を進めても一般性は失われない。また有効間隙率一定で不均一な透水係数分布を同定対象に絞る。

2. 地球統計学による水位観測データ生成

2.1 水位観測データの問題点

地球統計学では対象の確率変数の空間分布を、観測データが条件におかれた条件付確率場としてとらえる

(Cressie, 1991; Journel and Huijbregts, 1978)。また任意点の推定値は、変数の空間分布傾向を示すトレンド成分と変数間の空間相関性を示すランダム成分の和から成る不偏推定量と定義される。

本研究での透水係数分布同定は、従来通り、対象地域の要所に設置された観測点での連続観測ないしは一斉観測の地下水位(「水頭」もあり得るが、以降総じて「水位」と記述する)データを基にして行われることを想定する。前節に述べた通り、観測点は有限個しかない。連続水位観測は機材の充実が必要不可欠であり、観測継続のためのメンテナンスや管理に手間がかかることから、数える程度しか設置できず、空間分布データとして乏しさは否めない。ただし、連続で水位観測しているだけに同一場所の時系列データは充実している。一方、地下水の一斉水位観測は週や月に一回など定期的に定時の水位を一斉観測することから機材の性能は高くなくてよく、実際の現場では手動で観測しているところさえある。そのため、同時刻の空間分布データは連続観測データに比べて豊富であるが、時系列データは乏しいと言わざるを得ない。

2.2 統計補完地下水モデル

両観測データを基にして互いの短所を補うかたちで水位分布の時空間的補完ができれば、水位の観測データが擬似的に生成できると思われる。既往の研究

(例えば, Clifton and Neuman, 1982) では同時刻における水位の空間分布が補間されているものの, 同一位置での補間値の時系列連続性は補間の条件に含まれていない。これは, 地球統計学で検討する際に空間距離と時間距離(時差)を同じ長さの尺度で簡単に扱えないことが原因となっている。そこで本研究では時間変数はトレンド成分のみに含まれ, ランダム成分には含まれないと仮定する。すなわちトレンド成分は時間と空間の関数, ランダム成分は空間のみの関数であるととらえる。

ところで浜口(2003)では, 平面地下水モデルに対して, 適当な透水係数分布の同モデルから得られる数値解をトレンド成分の一部とし, 観測データからモデル化誤差の空間分布をランダム成分としてモデル補完を行っている。こうして得られるモデルを「(地球)統計補完地下水モデル」と呼ぶ。

平面地下水モデルは基礎方程式が式(1)となる。

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(h-s) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k(h-s) \frac{\partial h}{\partial y} \right\} + \varepsilon \quad (1)$$

ここに, λ : 有効間隙率, h : 水位(水頭), k : 透水係数, s : 基盤高, ε : 涵養量である。いま, 線形化した説明を簡単にするため, 式(1)を線形化した

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \varepsilon \quad (2)$$

で検討を進める。ここに, d_0 : 要素代表水深(要素平均水深)であり, 式(1)の繰返し計算をせずに前時刻の水位 h_t を用いて $h_t - s$ を定数と近似した値に等しい。この式を空間的に離散化し, 時間差分をとって展開した結果, 得られる有限要素方程式は

$$A h_{t+1} = B h_t + \omega_{t+\theta} \quad (3)$$

となる。ここに,

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \theta S, \quad B = \frac{1}{\Delta t} M - (1 - \theta) S, \quad (4)$$

$$M = \int_V \lambda \phi^T \phi dV, \quad (5)$$

$$S = \int_V k d_0 \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi^T}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV, \quad (6)$$

$$\omega_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \phi^T dS + \int_V \varepsilon \phi^T dV \quad (7)$$

を表す。式(3)を境界条件の水位で縮約した後に次時刻水位に関して解くと

$$h_{t+1} = A^{-1} (B h_t + \omega_{t+\theta}) \quad (8)$$

のようになる。こうして得られた解について, 座標 $\mathbf{z}$, 時刻 t での値を $h(\mathbf{z}, t)$ と表すことにする。

ところで, 統計補完地下水モデルにおける任意地点の地下水位 $\phi(\mathbf{z}, t)$ は,

$$\phi(\mathbf{z}, t) = m(\mathbf{z}, t) + w(\mathbf{z}) \quad (9)$$

と2成分の和からなると仮定する。ここに, $m(\mathbf{z}, t)$: トレンド成分, $w(\mathbf{z})$: ランダム成分である。さらに $m(\mathbf{z}, t)$ は確定成分 $h(\mathbf{z}, t)$ と不確定成分の定数 $\hat{b}$ から成ると見なせば,

$$m(\mathbf{z}, t) = h(\mathbf{z}, t) + \hat{b} \quad (10)$$

を得る。ランダム成分を不確定成分と見なした際の空間不確定量 $\eta(\mathbf{z}, t)$ を地球統計学の一手法である Ordinary kriging(OK)に基づいて求めれば,

$$\eta(\mathbf{z}) = \hat{b} + \mathbf{c}(\mathbf{z})^T \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (11)$$

となる。ただし,

$$\hat{b} = \frac{\alpha^T \mathbf{C}^{-1} \phi}{\alpha^T \mathbf{C}^{-1} \alpha}, \quad \hat{\mathbf{w}} = \phi - \alpha \frac{\alpha^T \mathbf{C}^{-1} \phi}{\alpha^T \mathbf{C}^{-1} \alpha} \quad (12)$$

である。これらから, 補完水位 $\phi^*(\mathbf{z}, t)$ は

$$\phi^*(\mathbf{z}, t) = h(\mathbf{z}, t) + \hat{b} + \mathbf{c}(\mathbf{z})^T \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (13)$$

となる。ここに, α : 成分1が観測数並ぶ定数ベクトル, ϕ : 観測値ベクトル, $\mathbf{c}(\mathbf{z})$: 求める推定点と各観測点間の共分散ベクトル, $\mathbf{C}$: 各観測点間の $w(\mathbf{z})$ の共分散行列である。なお共分散行列/ベクトルを生成する際に必要な共分散関数は, 本研究の場合,

$$C(d) = \begin{cases} \sigma^2 \left\{ 1 - 1.5 \left(\frac{d}{a} \right) + 0.5 \left(\frac{d}{a} \right)^3 \right\} & (0 \leq d \leq a) \\ 0 & (d > a) \end{cases} \quad (14)$$

という球型関数を採用した。

2.3 疑似観測水位の生成

本研究では統計補完地下水モデルを利用して時空間補完した疑似観測水位を生成する手法ならびに透水係数の空間分布同定手法を提案する。その手順は,

- [1] 従来と同じく少ない観測データから透水係数分布を同定する,
- [2] 上記同定結果を用いて得られた水位再現値をトレンド成分の一部とする,
- [3] モデル誤差を観測値から地球統計学的に推定し, その値を空間不確定量と見なす,
- [4] 両者の和を取って疑似生成の観測値とし, 全計算点を観測点とする,
- [5] これを時系列毎に行い, 全点での時系列観測データを生成する,
- [6] 上記の疑似生成観測データを用いて再び透水係数分布を同定する,

となる。

上記項目 [1] が最終的な透水係数分布同定の第一段階で, いわゆる前準備となる。これは数箇所の観測点から得られる連続水位観測データを基にして不均一な透水係数分

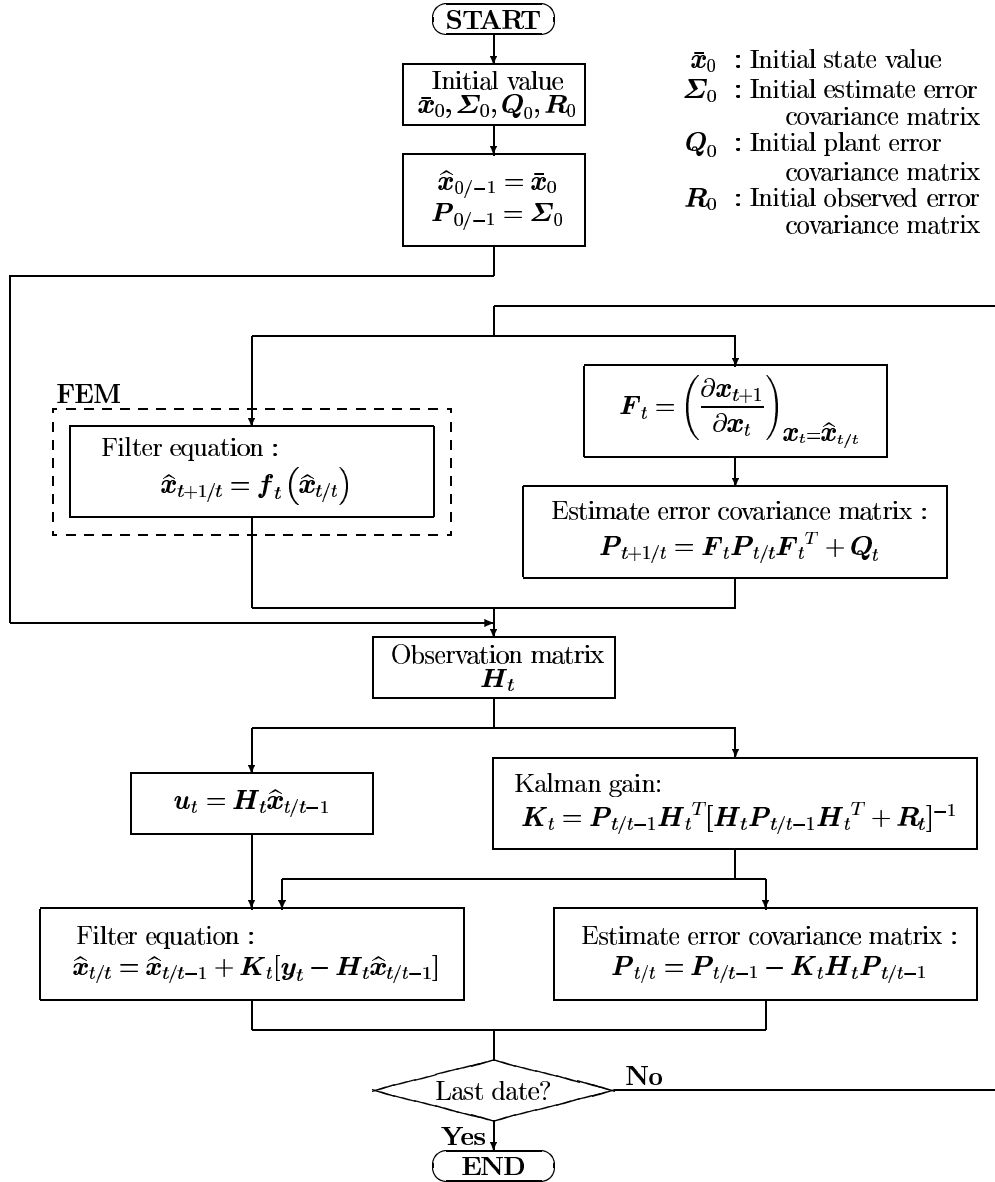


Fig.2 Algorithm of Extended Kalman filter-FEM

布の同定を行うが、その逆解析は明らかに非適切な条件の下で遂行されるため、得られる同定分布はその一部に大きな誤差を含んでいる可能性が高い。これは観測点に近い区域ほど同定結果が良好で、遠ざかるほど同定結果が悪化していくという観測更新感度が原因で生じており、感度の鈍い区域では更新がままたず大きな誤差を生じ易い。これが従来の同定手法では問題視されていたところであり、精度の高い同定結果を得るために事前情報できるだけ正確にしなければならなかった理由である。

上記項目 [2]～[5] が補完水位を求める内容で、第二段階にあたる。項目 [1] で得られた同分布を用いて再現計算した水位 $h(\mathbf{z}, t)$ (項目 [2]) にも一部に大きな誤差が生じ得る可能性がある。従来の手法であれば、この再現計算で推定

水位分布の算出が終了するため、項目 [1] において観測数に見合う妥当な区域化 (zoning) を行う、ないしは、事前情報を正確に設定することで同定を成功に導いていたが、その結果の透水係数分布や再現水位分布は或る程度のモデル誤差を“黙認”したような平滑化された結果になる可能性が高い。地球統計補完モデルではその誤差を埋めることができる。その基準となる地下水モデルがどの程度の“平滑化”されたモデリングであっても、つまり、どんな区域化の透水係数分布設定であっても、そこから再現された $h(\mathbf{z}, t)$ に対応するモデル誤差を、観測データを基に算出した空間不確定量 $\eta(\mathbf{z}, t)$ に等しいと見なして (項目 [3])、 $h(\mathbf{z}, t)$ に加算すればよい (項目 [4])。第二段階では最終的に任意の時刻と場所の $\phi^*(\mathbf{z}, t)$ を得る (項目 [5])。

既存の観測点も含めて全計算点上の $\phi^*(z, t)$ を観測値と見なし、全計算点において観測水位が存在する状況を擬似的に作り出して、観測データの量を増やした条件下で再び透水係数分布を同定することが第三段階であり、これが項目 [6] である。物理モデルに対して計算しながら観測データを埋め込むデータ同化手法と違い、計算が容易で、かつ、統計モデル (物理モデルでないもの) を礎とした生成値のため、物理モデルを使う逆解析の観測値として客観性があるトレードオフ問題も発生しないので適切であると言える。

ところで同定時の未知数が求めるべき透水係数の区域数に等しいことから「未知数 > 観測数」という非適切条件の逆解析が回避できる。また疑似的でも観測データ数を増やした上に、再現精度が向上した水位観測データを使うため、同分布の同定解が一意に高精度で得られると期待できる。

3. 数値実験

3.1 仮想帯水層

ここで提案した擬似観測データの生成による逆解析結果への影響について検討すべく、Fig.1のような不圧地下水の流れる仮想帯水層を対象として数値実験を行った。この帯水層の不透水基盤面は、流れ断面が谷状になっており、流下方向には一定傾斜している。図中の○印は元の水位観測点 (9 点)、□印は揚水位置 (3 点) で、最下流端部は 0m の水位境界である。また図の上流端 (地下水集水域) と地表面からの地下水涵養があるものと設定した。本稿の逆解析手法には、事前情報を利用し、かつ、観測データの質を逐次検討して同定結果に反映できる Fig.2 のような拡張 Kalman フィルタ有限要素法 (例えば長谷川ら, 1994 ; 浜口ら, 1997) を採用することにした。OK 推定時に得られる推定誤差共分散行列は事前情報 (信頼度) を参照して評価するという点で拡張 Kalman フィルタ有限要素法と同じ構造 (式のかたち) であるので、同行列を拡張 Kalman フィルタ有限要素法による逆解析に引き続き使用できる事も利点である。

Exact	215.3322 (Z ₄)	255.5558 (Z ₈)	321.1791 (Z ₁₂)	400.0000 (Z ₁₆)	383.3276 (Z ₂₀)
	173.9983 (Z ₃)	200.0000 (Z ₇)	272.5400 (Z ₁₁)	329.4123 (Z ₁₅)	346.6049 (Z ₁₉)
	136.6654 (Z ₂)	171.4817 (Z ₆)	226.1393 (Z ₁₀)	273.9904 (Z ₁₄)	300.0000 (Z ₁₈)
	100.0000 (Z ₁)	146.4934 (Z ₅)	194.3980 (Z ₉)	235.9593 (Z ₁₃)	265.2360 (Z ₁₇)
	Unit: m/day				

Fig.3 Exact distribution of permeabilities

3.2 透水係数分布設定

本実験に用いる真の透水係数分布を Fig.3 の様に設定した。まず、水位観測データに当初のまま 9 箇所から順解析で得られる模擬データを用いて、各区域毎 (未知数 20 個) に同定を行ったところ、Fig.4 に記したような結果となった。観測点に近い区域と比較的離れた区域とでは解の精度に差が出ており、未知数に対して観測数の少ないという非適切条件の影響であるのは明らかである。未知の透水係数に対する観測更新感度が不十分で、その感度の鈍さが局所的に区域単位で出ていると見て取れる。

Piece- wisely	219.3408 (Z ₄)	263.1140 (Z ₈)	289.9044 (Z ₁₂)	382.6352 (Z ₁₆)	380.4207 (Z ₂₀)
	168.8113 (Z ₃)	224.7142 (Z ₇)	254.9413 (Z ₁₁)	348.1349 (Z ₁₅)	352.3683 (Z ₁₉)
	135.8332 (Z ₂)	185.8441 (Z ₆)	215.4022 (Z ₁₀)	273.9089 (Z ₁₄)	295.5448 (Z ₁₈)
	101.7502 (Z ₁)	144.2885 (Z ₅)	180.1621 (Z ₉)	237.3977 (Z ₁₃)	260.8399 (Z ₁₇)
Unit: m/day					

Fig.4 Result of identified distribution in first step

3.3 疑似観測データ生成

続いて、本提案によって全計算点を観測位置とすべく、統計補完地下水モデルを基に水位の疑似観測データを生成した。そのデータ生成時の、式 (14) の相関距離 a と空間分散値 σ^2 の時間変化を Fig.5 に表す。今回の場合、 σ^2 が小さいことからトレンド値 $\hat{b}$ への依存度は比較的大きいことがわかる。また a はほぼ 4000m 以上になっていることからランダム成分は全域に影響を与えながら求まっていることがわかる。

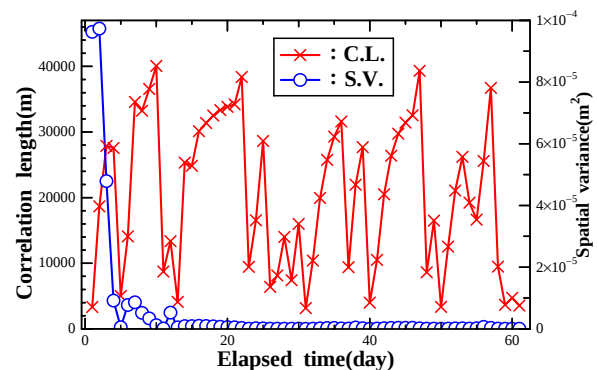


Fig.5 Temporal variations in correlation distance and spatial variance

3.4 透水係数同定

得られた疑似生成観測データを用いて同様に各区域毎の透水係数同定を行った。その同定結果を Fig.6 に示す。こ

Using generated data	219.3378 (Z ₄)	263.3715 (Z ₈)	290.3026 (Z ₁₂)	383.2521 (Z ₁₆)	381.1754 (Z ₂₀)
	168.8896 (Z ₃)	224.4939 (Z ₇)	254.5708 (Z ₁₁)	347.1259 (Z ₁₅)	351.0596 (Z ₁₉)
	135.8147 (Z ₂)	185.9866 (Z ₆)	215.6820 (Z ₁₀)	274.6058 (Z ₁₄)	296.4615 (Z ₁₈)
	101.7642 (Z ₁)	144.2815 (Z ₅)	180.1305 (Z ₉)	237.2620 (Z ₁₃)	260.6362 (Z ₁₇)

Unit: m/day

Fig.6 Result of identified distribution in third step

これは真の分布と比較しても比較的精度の良い結果となっている。推定精度が良くない場所は Z₆, Z₇, Z₈, Z₁₀, Z₁₁, Z₁₂ であるが、この辺りは揚水位置に比較的近くで水深の浅い場所である。第二段階で統計補完された水位分布が揚水による変化(局所変動)を表せずにやや過大となったため、それを疑似観測データとした同定結果が大きな値となってしまったと推察される。それを除けばFig.4とは比較にならない程に推定精度が向上していることがわかる。

4. 結論

本研究では、まず従来の手法によって地下水モデルの透水係数分布を同定したのち、その段階で得られる水位分布の再現値を基礎成分に置き、観測値を基にして地球統計モデルによるモデル化誤差成分の空間分布を得て、先の再現値に加算して、統計補完された水位分布を生成した。これを疑似水位観測データとして同定計算に用いて透水係数の分布を改めて求めると、観測数(総節点数)が未知数(要素数)を上回るために一意性を確保し、かつ、モデル化誤差を埋めた分だけ高精度の透水係数分布同定結果を得られた。これは分布同定の精度向上に秀逸な手法であると言える。

本稿では地下水モデルを例に挙げて検討したが、他の水文モデル、例えば、分布型流出モデルや降雨分布モデル、浸透モデルなど分布が検討されるべきモデルであれば適用可能である。また、水文学分野のみならず、地盤工学分野の土・水連成解析などにも適用できるため、汎用性に富んだ手法と言える。

参考文献

- 長谷川高士, 村上 章, 浜口俊雄: 拡張 Kalman フィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/ III-29, 1994.
- 浜口俊雄, 村上 章, 長谷川高士: 平面解析で移動境界を

考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/ III-39, pp.133-145, 1997.

浜口俊雄: 地下水流動に対するモデル誤差の地盤統計学的改善策と最適モデルの選択法, 水工学論文集第47巻, 土木学会水理委員会, pp.295-300, 2003.

浜口俊雄(2004): 透水係数の不均質分布構造同定における非適切問題の克服法, 京都大学防災研究所年報, 第47号B-2, pp.819-829, 2004.

Cressie, N. (1991): Statistics for spatial data, A Wiley-Interscience Publication, New York, pp.105-209.

Journel, A. G. and Ch. J. Huijbregts (1978): Mining geostatistics, Academic Press, Inc., pp.324-343.

Clifton, P. M. and S. P. Neuman(1982): Effects of Kriging and Inverse Modeling on Conditional Simulation of the Avra Valley Aquifer in Southern Arizona, Water Resour. Res., Vol.18, No.4, pp.1215-1234.

Distributed Parameter Identification from Geostatistical-generated Observations

Toshio HAMAGUCHI, Toshiharu KOJIRI, Eiichi NAKAKITA

Synopsis

This study proposes a mathematical approach to uniquely identify distributed parameters of an ill-posed inverse problem in hydrology and demonstrates a performance of such an approach through numerical tests by employing geostatistics-generated observation data. For numerical tests, we design a hypothetical aquifer divided into twenty piecewise zones. Twenty permeabilities are individually identified with inaccuracy just through the conventional method using prior information. They are also estimated with well accuracy along the given method of employing observation data generated by geostatistics. It can be proven that the proposed approach is greatly effective and helpful in parameter identification with ill-posedness.

Keywords : permeability, spatial distribution, geostatistics, identification, generated observation data, inverse analysis