

既約な概均質ベクトル空間の 1 例について

名古屋大学 関口次郎

$$G = SL(3) \times SL(3) \times GL(2)$$

$$V = \{(X, Y) \mid X, Y \in M(3)\}$$

群 G の V への作用は

$$g = (A, B, C) \in G, x = (X, Y) \in V \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} g \cdot x &= (AXB^{-1}, AXB^{-1})^t C \\ &= (A(aX + bY)B^{-1}, A(cX + dY)B^{-1}) \end{aligned}$$

と定義するとき、 (G, V) は既約な概均質ベクトル空間になる。この概均質ベクトル空間 (G, V) の軌道分解と、各軌道の余法束の余次元 1 の交わりを図示することが、本論の目的である。具体的な計算は、この研究集会参加者全員によってなされ、これはその結果の報告である。

1. 軌道分解 (orbital decomposition)

はじめに、 V を軌道に分解する。 V の元は一般に $[X, Y]$ とあらわすことにする。明らかに $\text{rank } X \leq \text{rank } Y$ なるものに制限してよい。 X の rank が 0, 1, 2, 3 の場合に応じて G の作用によってそれぞれ

$$[0] \quad (0, Y)$$

$$[I] \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \end{bmatrix}, Y \right) \quad \text{rank } Y \geq 1$$

$$[II] \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Y \right) \quad \text{rank } Y \geq 2$$

$$[III] \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Y \right) \quad \text{rank } Y = 3$$

の4つの型に移り得る。

[0]-型はGの作用によって次のいずれかに移り得る。

$$[0]_1 \quad (0, 0)$$

$$[0]_2 \quad (0, \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \end{bmatrix})$$

$$[0]_3 \quad (0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$[0]_4 \quad (0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

[I]-型 $Y = \begin{bmatrix} \overset{1}{y} & \overset{2}{y_1} \\ y_2 & Y' \end{bmatrix}$ とおく。 Y' の rank が 0, 1, 2

である場合にそれぞれ

$$[I]-0 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & & \\ y_{31} & & \end{bmatrix} \right)$$

$$[I]-I \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & 1 & \\ y_{31} & & \end{bmatrix} \right)$$

$$[I]-II \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & 1 & \\ y_{31} & & 1 \end{bmatrix} \right)$$

に移り得る。明らかにいずれの場合も, $y_{11} = 0$ としてよい。

[I]-0 型の場合，次のいずれかに移る。

$$[I]_1 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & \end{bmatrix} \right)$$

$$[I]_2 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & \end{bmatrix} \right)$$

$$[I]_3 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \right)$$

[I]-I 型の場合，次のいずれかにうつる。

$$[I]_4 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$[I]_5 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[I]_6 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[I]_7 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

[I]-III 型の場合，次に移りうる。

$$[I]_8 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

[II]-型 Υ の (3, 3)-成分が零でないか，零であるかによって場合分けする。

(3, 3)-成分が零でない場合， $\Upsilon = \begin{bmatrix} \Upsilon' & \\ & 1 \end{bmatrix}$ の場合を考えればよい。 2×2 行列 Υ' を Jordan の標準形になおすことは可能だから，

$$[\text{II}]-\text{I} \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix} \right)$$

$$[\text{II}]-\text{II} \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{bmatrix} \right)$$

の場合をしなければよい。

$[\text{II}]-\text{I}$ 型. $\alpha = \beta$ のときは

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [\text{I}]_{\beta}$$

$\alpha \neq \beta$ のときは

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \right) \cdots [\text{II}]_1$$

$[\text{II}]-\text{II}$ 型の場合

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [\text{II}]_2$$

Υ の $(3, 3)$ 成分が零のとき $\Upsilon = \begin{bmatrix} \overset{2}{\Upsilon} & \overset{1}{y_1} \\ y_2 & \end{bmatrix}$ として Υ を Jordan の標準型になおすことが可能だから,

$$[\text{II}]-\text{I}' \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & * \\ & \beta \end{bmatrix} \right)$$

$$[\text{II}]-\text{II}' \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & * \\ & \alpha & * \\ & & \alpha \end{bmatrix} \right)$$

の場合をしなければよい。

$[\text{II}]-\text{I}'$ の場合, $\alpha = \beta$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & * \\ & \beta \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & * \\ & \end{bmatrix} \right)$$

$\text{rank } \Upsilon \geq 2$ の場合を考へればよいから

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

のいずれかに移りうる。ところで

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

だから、本質的には次だけが新しいもの

$$[\text{II}]_2 \quad \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

次に $\alpha \neq \beta$ のとき $\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$ を考えればよい。 $\text{rank } Y = 0, 1$

のときは、 X と Y をいれかえることにより α と β で入れかえて

いる。 $\text{rank } Y = 2$ のとき $\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$ あるいは

$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$ の形のものを考えればよい。

$\alpha \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} (\beta \neq 0) \\ \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} (\beta = 0) \end{cases}$

$\alpha = 0$ のとき $\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} (\beta \neq 0) \\ \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} (\beta = 0) \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$ に対して同様なことを行って、上のものを、転

置したものに移りうる。本質的に新しいものは

$$[\text{II}]_4 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\text{II}]_5 \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$[\text{II}] - \text{II}'$ の場合.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \right)$$

$\text{rank } Y = 0, 1$ のときはすでにわかっていから, $\text{rank } Y \geq 2$ の場合を考える.

$\text{rank } Y = 2$ のとき.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ あるいは } \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ の場合を考える.}$$

よい。 $\beta \neq 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\beta = 0 \text{ のとき } \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$\alpha \neq 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \right)$$

$\alpha = 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \right)$$

$\text{rank } Y = 3$ のとき $\alpha \delta \neq 0$ とし $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \delta & \beta \end{bmatrix} \right)$ の形のものを考える.

よい。 $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \delta & \beta \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ と取り,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma \neq 0 \text{ のとき } & \begin{bmatrix} \gamma' & 1 \\ 1 & -\gamma' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma' & 1 \\ 1 & -\gamma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma' & 1 \\ 1 & -\gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ から} \\ & \left(\begin{bmatrix} \gamma' & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} \gamma' & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} \gamma' & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\lambda\gamma' & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ & \lambda \text{ を適当にえらんで } \sim \begin{bmatrix} \gamma' & 0 \\ 1+\lambda\gamma' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ & \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$\gamma' = 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix} \gamma' & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad [\text{II}]_6$$

[III]-型の場合、 Y は Jordan の標準形になおせ、 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の定数倍を Y から減じて、 $\text{rank } Y \leq 2$ とできるから、上の場合にもどせる。

以上で 18 個の軌道が求まった。それらが互いに移りえないことも調べることができる。そのことは後で簡単にふれる。

2. 各軌道から得られる余法束 (conormal bundle) と余次元 1 の交わり。

以下の具体的な計算を遂行する。代数群 G の表現からその Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現がみちびかれる。

$$\mathfrak{g} = \{ \hat{A} = (A, B, C) \mid \text{tr } A = \text{tr } B = 0, A, B \in M(3), C \in M(2) \}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$\tilde{A} = (A, B, C) \in \mathfrak{g}$ $(X_1, X_2) \in V$ のとき $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cdot (X_1, X_2) &= (AX_1 - X_1 B, AX_2 - X_2 B) + (X_1, X_2)^t C \\ &= (AX_1 - X_1 B + \alpha X_1 + \beta X_2, AX_2 - X_2 B + \gamma X_1 + \delta X_2)\end{aligned}$$

V の双対 V^* の $\mathfrak{g}$ の反傾表現は $(Y_1, Y_2) \in V^*$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cdot (Y_1, Y_2) &= (-{}^t A Y_1 + Y_1 {}^t B, -{}^t A Y_2 + Y_2 {}^t B) - (Y_1, Y_2)^t C \\ &= (-{}^t A Y_1 + Y_1 {}^t B - \alpha Y_1 - \gamma Y_2, -{}^t A Y_2 + Y_2 {}^t B - \beta Y_1 - \delta Y_2)\end{aligned}$$

さて, (G, V) の相対不変式を f , 対応する有理指標を χ とする。 $(\mathfrak{g}, V)$ の指標は $\delta\chi$ である。一般に $\tilde{A} \in \mathfrak{g}$ に

対して

$$\delta\chi(\tilde{A}) = \frac{\deg f}{\dim V} \operatorname{tr}_V \tilde{A}$$

今の場合, $\deg f = 12$, $\dim V = 18$, $\operatorname{tr}_V \tilde{A} = 9\alpha + 9\delta$ がわかるので, $\delta\chi(\tilde{A}) = 6(\alpha + \delta)$ となる。

[II]₅ を例にとって計算する。

$X_0 = (X_1, X_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ とおく。 $\tilde{A}$ の成分は上のまま

であらねると,

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} + \alpha & a_{12} - b_{12} + \beta & -b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} + \alpha & -b_{23} + \beta \\ a_{31} & a_{32} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{21} + \gamma & a_{11} - b_{22} + \delta & a_{12} - b_{23} \\ -b_{31} & a_{21} - b_{32} + \gamma & a_{22} - b_{33} + \delta \\ a_{31} & a_{32} & \end{bmatrix} \right)$$

isotropy subalgebra を求めると,

$$\mathfrak{g}_{X_0} = \{ \tilde{A} \in \mathfrak{g} \mid \tilde{A} \cdot X_0 = 0 \}$$

$$G_{X_0} \sim GL(2) \cdot (G_0)^2$$

$$= \left\{ \left(\begin{bmatrix} -\delta & \beta & a_{13} \\ \gamma & -\alpha & a_{23} \\ \alpha + \delta & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha - \delta & 2\beta \\ \gamma & \beta \\ 2\gamma & -\alpha + \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$\dim \mathfrak{g}_{X_0} = 6$ かわかり, $\dim \mathfrak{g} = 20$ から,

$$\dim \mathfrak{g} \cdot X_0 = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_{X_0} = 14$$

すなわち X_0 -軌道の次元 = 14, 余次元 = 4 かわかる.

ここで, V と V^* の双対性を次のように定義する.

$x = (X_1, X_2) \in V$, $y = (Y_1, Y_2) \in V^*$ に対して

$$\langle x, y \rangle := \text{tr } X_1 {}^t Y_1 + \text{tr } X_2 {}^t Y_2$$

$g = (g_1, g_2, g_3) \in G$, $g_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $g_3^{-1} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ のとき

$$g \cdot (X_1, X_2) = g_1 (aX_1 + bX_2, cX_1 + dX_2) g_2^{-1}$$

と定義したが G の V^* への表現を

$$g \cdot (Y_1, Y_2) = {}^t g_1^{-1} (a'Y_1 + b'Y_2, c'Y_1 + d'Y_2) {}^t g_2$$

と定義する.

$$\mathfrak{g} \cdot X_0 \subset V$$

$$\text{より } V_{X_0}^* := (\mathfrak{g} X_0)^\perp \subset V^*$$

次に $(\mathfrak{g}_{X_0}, V_{X_0}^*)$ について考察する.

$\tilde{A} = (A, B, C) \in \mathfrak{g}_{X_0}$, $(Y_1, Y_2) \in V_{X_0}^*$ に対して

$$\tilde{A} \cdot (Y_1, Y_2) = (-AY_1 + Y_1 {}^t B, -AY_2 + Y_2 {}^t B) - (Y_1, Y_2) {}^t C$$

$\tilde{A} \cdot X_0$ を注視することによつて

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ p_{31} - q_{33} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ q_{31} - p_{31} & q_{33} \end{bmatrix} \right) = (Y_1, Y_2) \right\}$$

かわかる.

$$\tilde{A}(\gamma_1, \gamma_2) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -(\alpha+2\delta)p_{31} & 2\delta p_{31} + (2\alpha+\delta)g_{33} & -3\delta g_{33} \\ -2\delta g_{31} - \delta g_{31} & +\beta p_{33} & -3\alpha p_{33} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -3\beta p_{31} & (\alpha+2\delta)p_{31} & -2\delta p_{31} - \beta p_{33} \\ -3\delta g_{31} & +\delta g_{31} + 2\beta p_{33} & -(2\alpha+\delta)g_{33} \end{array} \right)$$

$V_{x_0}^*$ の元 (γ_1, γ_2) を $\begin{bmatrix} g_{31} \\ p_{31} \\ g_{33} \\ p_{33} \end{bmatrix}$ と、縦ベクトルであらわしたとき

$$\begin{bmatrix} g_{31} \\ p_{31} \\ g_{33} \\ p_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3\beta p_{31} - 3\delta g_{31} \\ -(\alpha+2\delta)p_{31} - \delta g_{31} - 2\beta g_{33} \\ -2\delta p_{31} - \beta p_{33} - (2\alpha+\delta)g_{33} \\ -3\delta g_{33} - 3\alpha p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\delta & -3\beta & & \\ -\delta & -(\alpha+2\delta) & -2\beta & \\ & -2\delta & -(2\alpha+\delta) & -\beta \\ & & -3\delta & -3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{31} \\ p_{31} \\ g_{33} \\ p_{33} \end{bmatrix}$$

Lie 環 g_{x_0} の $V_{x_0}^*$ への表現はこのようなあらわされることわかった。

次に $(g_{x_0}, V_{x_0}^*)$ の構造を調べる。

$$V_{x_0}^* \ni \gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3\delta \\ -\delta \\ -\beta \\ -3\alpha \end{bmatrix} \in V_{x_0}^*$$

だから、 $g_{x_0} \gamma_0 = V_{x_0}^*$ となり、 $(g_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が概均質ベクトル空間であることがわかる。

g_{x_0} の元で γ_0 を γ_0 に写す元は

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

だけである。 $\delta\chi(A_0) = -4$ $\text{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 = 4$

$$\text{一般に } \text{ord}_{\Lambda} = \delta\chi(A_0)s - \text{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \frac{1}{2} \dim V_{x_0}^*$$

が成立つから、この場合は $\text{ord}_{\Lambda_{\text{II}_5}} = -4s - \frac{4}{2}$ 。

$(g_{x_0}, V_{x_0}^*)$ の指標は $\frac{3}{2}(\alpha+\delta)$ であり、 $g_{x_0} \gamma_0$ 上でそれは零

になるから、 G_{x_0} -不変な代数的集合は1つある。

余次元 1 の点をさがす。

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3\beta \\ -(\alpha+2\delta) \\ -2\gamma \end{bmatrix}$$

だから、これが求まるものである。 γ と直交し $V_{x_0}^*$ とは直交

しないベクトル $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

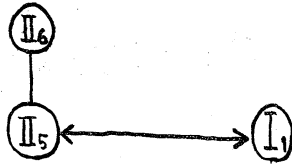
$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right)$$

t が十分 0 に近いとき

$$X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [II]_6$$

$$\gamma_0 = \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [I]_1$$

これを次のようにあらわす。



$$\delta p_1 = \frac{3}{2}(\alpha + \delta) \text{ とおくと,}$$

$$-\delta \chi = -6(\alpha + \delta) = -4\delta p_1$$

$$\text{tr}_{V_{x_0}^*} = -6(\alpha + \delta) = -4\delta p_1$$

次に残りの軌道についての計算結果を書いておく。

前の記号はそのまま使うこととする。

$[0]_1$: 明らかなのでしない。

$[0]_2$: 代表点 $X_0 = ((0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\delta & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$\sigma_{X_0} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}+\delta \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & -a_{11}-b_{22}-\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \begin{bmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{22} & q_{32} \\ q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \right\}$$

$$G_{X_0} \sim (GL(1)^3 \times SL(2)^2) \cdot (Ga)^5$$

$(\sigma_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列は

p_{22}	$-a_{22}+b_{22}$	b_{23}	$-a_{32}$	b_{21}	$-a_{12}$	$-\delta$	p_{22}
p_{23}	b_{32}	$-a_{11}-a_{22}$	$-a_{32}$	b_{31}	$-a_{12}$	$-\delta$	p_{23}
p_{32}	$-a_{23}$	$a_{11}+a_{22}+b_{22}-\alpha$	b_{23}	b_{21}	$-a_{13}$	$-\delta$	p_{32}
p_{33}	$-a_{23}$	b_{32}	$a_{22}-b_{22}-\alpha-\delta$	b_{31}	$-a_{13}$	$-\delta$	p_{33}
p_{21}			$a_{11}-a_{22}-\alpha+\delta$	$-a_{32}$			p_{21}
p_{31}			$-a_{23}$	$2a_{11}+a_{22}-\alpha+\delta$			p_{31}
p_{13}				$-2a_{11}-b_{22}-\alpha-\delta$	b_{32}		p_{13}
p_{12}				b_{23}	$-a_{11}+b_{22}-\alpha$		p_{12}
q_{22}			$-a_{22}+b_{22}-\delta$	b_{23}	$-a_{32}$		q_{22}
q_{23}			b_{32}	$-a_{11}-a_{22}-b_{22}-2\delta$	$-a_{32}$		q_{23}
q_{32}			$-a_{23}$	$a_{11}+a_{22}+b_{22}-\delta$	b_{23}		q_{32}
q_{33}			$-a_{23}$	b_{32}	$a_{22}-b_{22}-2\delta$		q_{33}

$$\text{trace}_{V_{x_0}^*} = -8\alpha - 7\delta$$

$$\text{generic point } \Upsilon_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (\mathbb{I})_2$$

$$A_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ -2a_{11} + \frac{1}{2} & a_{11} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} - \frac{2}{3} & -2a_{11} + \frac{5}{6} \\ a_{13} & a_{11} - \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right)$$

余次元 1 の点

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\delta \\ -a_{12} - \delta \\ b_{21} \\ b_{31} - a_{13} \\ -a_{32} \\ 2a_{11}a_{22} - \alpha + \delta \\ -2a_{11} - b_{22} - \alpha - \delta \\ b_{23} \\ -a_{22} + b_{22} - \delta + b_{23} \\ b_{32} - a_{11} - a_{22} - b_{22} - 2\delta \\ -a_{23} \\ -a_{23} \end{bmatrix} \quad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_{12} + b_{21} \\ -a_{32} - \delta + b_{31} \\ b_{23} - \delta - a_{13} \\ a_{22} - b_{22} - \alpha - \delta \\ a_{11} - a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{23} \\ b_{32} \\ -a_{11} + b_{22} - \alpha \\ b_{23} - a_{32} \\ -a_{11} - a_{22} - b_{22} - 2\delta \\ a_{11} + a_{22} + b_{22} - \delta \\ -a_{23} + b_{32} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \quad X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t-1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$X_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad O_3$$

$$X_0 + tX_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Upsilon_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim (\mathbb{I})_3, \quad \Upsilon_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim (\mathbb{II})_6$$

Υ_2 is not G_0 -homog.

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

余次元 1 の点

$$\begin{aligned} Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -\alpha-2\delta \\ a_{23} \\ -a_{13} \\ -b_{32} \\ b_{31} \\ -2a_{12} \\ 2a_{21} \\ -\alpha+\delta \\ 0 \end{pmatrix} & Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} b_{32}-a_{13}-\gamma \\ a_{11}+2a_{22}-\alpha+\delta \\ a_{12}-a_{23} \\ -a_{12}+b_{31} \\ -2a_{11}-a_{22}-\alpha-2\delta \\ a_{11}-a_{22}-\alpha+\delta \\ 0 \\ -a_{21} \\ -3\delta \end{pmatrix} \\ ([\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix}]) &= & ([\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix}]) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \right) & X_0 + tX_1 &= \left(\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ Y_1 &= ([\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix}]) = [0]_4 & Y_2 &= ([\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} \end{smallmatrix}]) \cdots [I]_7 \end{aligned}$$

$[0]_4$: 代表点 $X_0 = ([0], [\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}])$

$$\widehat{A} X_0 = \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\delta & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33}+\delta \end{bmatrix} \right)$$

$$\sigma_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \right) \mid a_{11}+a_{22}+a_{33}=0 \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & -p_{11}-p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \right) \right\} \quad G_{X_0} \sim (GL(1) \times SL(3)) \cdot G_a$$

$(\sigma_{X_0}, V_{X_0}^*)$ は概均質でない。

$$[I]_1: \text{代表点 } X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\bar{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12}+\beta & -b_{13} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} -b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\delta & -b_{23} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$g_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}+\alpha & \beta \\ \gamma & a_{11}+\delta \\ b_{31} & b_{32} & -2a_{11}-\alpha-\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{21} & -p_{21} & g_{23} \\ g_{31} & -p_{31} & g_{33} \end{bmatrix} \right) \right\} \quad G_{X_0} \sim (GL(1)^2 \times SL(2)^2) \cdot (G_a)^4$$

$(g_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} g_{33} \\ g_{23} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ g_{31} \\ g_{21} \\ p_{31} \\ p_{21} \\ p_{32} \\ p_{22} \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} \begin{bmatrix} -a_{11}+a_{22} & -a_{23} & -\beta & & & \\ -\alpha-2\delta & & & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{31} & & & & & \\ & b_{31} & & & & \\ & & b_{31} & & & \\ & & & b_{31} & & \\ & & & & b_{31} & \\ & & & & & b_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -b_{32} \\ -b_{32} \\ b_{32} \\ b_{32} \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -a_{32} & -2a_{11}-a_{22} & & & & \\ & -\alpha-2\delta & & & & \\ -\gamma & & -a_{11}+a_{22} & -a_{23} & & \\ & & -2\alpha-\delta & & & \\ -\gamma & -a_{32} & -2a_{11}-a_{22} & -2\alpha-\delta & & \\ & & & & 2a_{11}+a_{22} & -a_{23} \\ & & & & +\alpha-\delta & -2\beta \\ & & & & -a_{32} & a_{11}-a_{22} \\ & & & & & +\alpha-\delta \\ -\gamma & & & & 2a_{11}+a_{22} & -a_{23} \\ & & & & & \beta \\ & & & & -\gamma & -a_{32} \\ & & & & & a_{11}-a_{22} \\ & & & & & & \beta \\ & & & & 2\gamma & & 2a_{11}+a_{22} \\ & & & & & & -\alpha+\delta \\ & & & & & & -a_{23} \\ & & & & 2\gamma & -a_{32} & a_{11}-a_{22} \\ & & & & & & -\alpha+\delta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_{33} \\ g_{23} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ g_{31} \\ g_{21} \\ p_{31} \\ p_{21} \\ p_{32} \\ p_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{trace } V_{X_0}^* = 3a_{11} - 6\alpha - 6\delta$$

$$\text{generic point } Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b_{31} - b_{32} - a_{23} \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \\ b_{31} \\ -\gamma + b_{32} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta - 2\beta \\ -a_{32} \\ -\gamma + 2a_{11} + a_{22} \\ -a_{32} + \beta \\ 2\gamma - a_{23} \\ a_{11} - a_{22} - \alpha + \delta \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [I]_5$$

$$A_0 = \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right)$$

余次元 1 の点

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_{11} + a_{22} - \alpha - 2\delta + b_{31} - b_{32} \\ -a_{32} \\ -\gamma + b_{31} \\ b_{32} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta - 2\beta \\ -a_{32} \\ -\gamma + 2a_{11} + a_{22} \\ -a_{32} + \beta \\ 2\gamma - a_{23} \\ a_{11} - a_{22} - \alpha + \delta \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_{11} + a_{22} - \alpha - 2\delta \\ -a_{32} + b_{31} \\ -\gamma + b_{32} \\ 0 \\ -a_{23} \\ a_{11} - a_{22} + \alpha - \delta \\ \beta \\ -\gamma \\ 2a_{11} + a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{32} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t & t \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [I]_3$$

$$X_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad X_0 + tX_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & t \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [I]_5$$

$$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdots [I]_5 \quad Y_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdots [O]_2$$

[I]₂ 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right)$

$$\hat{A} X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21}+\beta & & \\ a_{31} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{32} \end{bmatrix} \right)$$

$$q_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} b_{11}-\alpha & -\gamma & a_{13} \\ -\beta & b_{11}-\delta & a_{23} \\ -2b_{11}+\alpha+\delta & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & -b_{11}-b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{12} & q_{13} \\ -p_{12} & -p_{13} \\ q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \right) \right\} \quad G_{X_0} \sim (GL(1)^2 \times SL(2)^2) \cdot (G_a)^4$$

$(q_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} p_{32} \\ p_{33} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} C_2+d_1 & b_{23} & -\gamma & & -a_{13} & & -a_{23} \\ b_{32} & C_2-d_1 & & -\gamma & & -a_{13} & -a_{23} \\ -\beta & & C_2+d_1 & b_{23} & a_{23} & & -a_{13} \\ & -\beta & b_{32} & C_2-d_1 & & a_{23} & -a_{13} \\ & & & C_1+d_1 & b_{23} & \beta & -\gamma \\ & & & b_{32} & C_1-d_1 & & \beta & -\gamma \\ & & 2\gamma & & C_1+d_1-2d_2 & b_{23} & \\ & & 2\gamma & b_{32} & C_1-d_1-2d_2 & & \\ & -2\beta & & & C_1+d_1+2d_2 & b_{23} & \\ & & 2\beta & & b_{32} & C_1-d_1+2d_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p_{32} \\ p_{33} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{array}$$

$$C_1 = -\frac{3}{2}b_{11} \quad d_1 = -\frac{1}{2}b_{11}+b_{22} \quad C_2 = \frac{3}{2}b_{11}-\frac{3}{2}(\alpha+\delta)$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(\alpha-\delta)$$

上の行列を $\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ と表わすと $\text{tr} A_1 = 4C_2$, $\text{tr} A_2 = 6C_1$

generic point $g_{33} = p_{12} = p_{23} = g_{13} = 1$ 残り 0

$$\text{また } Y_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \dots [II]_4$$

$$\text{isotropy } a_{13} = a_{23} = b_{23} = b_{32} = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = \beta = \gamma = 0$$

余次元 1 の点 は 2 つ, 共に g_0 -homog

$$1) g_{33} = p_{12} = p_{23} = 1 \text{ 残り } 0$$

$$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \dots [II]_4$$

$$\text{isotropy } a_{13} = a_{23} = b_{23} = b_{32} = \beta = \gamma = 0$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = -d_1 = d_2$$

$$2) p_{32} = g_{32} = p_{12} = p_{23} = 1 \text{ 残り } 0$$

$$Y_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \dots [I]_6$$

$$\text{isotropy } \beta = \gamma = \frac{1}{2}a_{13} = -\frac{1}{2}a_{23} = -\frac{1}{2}b_{23} = -\frac{1}{2}b_{32} = \frac{1}{3}c_2$$

$$[I]_3 : \text{代表点 } X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\hat{A} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} + \alpha & -b_{12} + \beta & -b_{13} \\ a_{21} + \beta & & \\ a_{31} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} - b_{21} + \gamma & a_{11} - b_{22} + \delta & -b_{23} \\ a_{22} - b_{11} + \delta & a_{21} - b_{12} & -b_{13} \\ a_{32} & a_{31} & \end{pmatrix}$$

$$g_{X_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{11} + \alpha - \delta & a_{23} \\ & & -2a_{11} - \alpha + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha & & \\ a_{12} + \gamma & a_{11} + \delta & \\ b_{31} & b_{32} & -2a_{11} - \alpha - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} & & p_{13} \\ & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & -p_{13} \\ & -p_{13} & g_{33} \\ -p_{31} & & \end{pmatrix} \right\}$$

$(g_{x_0}^{-1})^*$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} p_{33} \\ q_{33} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ p_{23} \\ p_{22} \\ p_{13} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\alpha-2\delta & -\gamma & b_{32} & b_{31} & -a_{23} & -a_{13} \\ & -3\delta & & -b_{32} & & a_{23} \\ & & 3a_{11} & a_{12}+2\gamma & & -a_{23} \\ & & & 3a_{11}+\alpha-\delta & & \\ & & & & -3a_{11}-3\alpha & b_{32} & -a_{12}+\gamma \\ & & & & & -2\alpha+2\delta \\ & & & & & & -3a_{11} \\ & & & & & & & -2\alpha-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{33} \\ q_{33} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ p_{23} \\ p_{22} \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{trace}_{V_{x_0}^*} = -7\alpha - 5\delta$$

$$\text{generic point } \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{31}-a_{13} \\ -b_{32}+a_{23} \\ a_{12}+2\gamma-a_{23} \\ 3a_{11}+\alpha-\delta \\ b_{32}-a_{12}+\gamma \\ -2\alpha+2\delta \\ -3a_{11}-2\alpha-\delta \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \sim \cdots [\text{III}]_6$$

$$\begin{cases} \delta p_1 = 3a_{11} + \alpha - \delta \\ \delta p_2 = -2\alpha + 2\delta \\ \delta p_3 = -3a_{11} - 2\alpha - \delta \end{cases}$$

余次元 1 の点

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\gamma-a_{13} \\ -3\delta+a_{23} \\ -a_{23} \\ 0 \\ b_{32}-a_{12}+\gamma \\ -2\alpha+2\delta \\ -3a_{11}-2\alpha-\delta \end{pmatrix} & X_1 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ ([\text{I}]_6) & & X_0 + tX_1 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & -1 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad [\text{II}]_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{II})_3} \begin{pmatrix} b_{31} - a_{13} \\ -b_{32} + a_{23} \\ a_{12} + 2\gamma \\ 3a_{11} + \alpha - \delta \\ -a_{12} + \gamma \\ 0 \\ -3a_{11} - 2\alpha - \delta \end{pmatrix} & X_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
 X_0 + tX_2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{I})_4 \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{I})_5} \begin{pmatrix} -\gamma + b_{31} \\ -3\delta - b_{32} \\ 3a_{11} + a_{12} + 2\gamma - a_{23} \\ 3a_{11} + \alpha - \delta \\ b_{32} \\ -2\alpha + 2\delta \\ 0 \end{pmatrix} & X_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
 X_0 + tX_3 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{I})_5
 \end{aligned}$$

$$[\text{I}]_4 : \text{代表点 } X_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} + \alpha & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & a_{12} \\ -b_{21} & a_{22} - b_{22} + \delta & -b_{23} \\ a_{32} & & \end{pmatrix}$$

$$g_{X_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha \\ a_{22} + \delta \\ -a_{11} - a_{22} - \alpha - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} p_{23} \\ p_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{13} \\ q_{31} \end{pmatrix} \right\}$$

$(g_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列,

$$\begin{pmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ q_{33} \\ q_{31} \\ q_{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} -2\alpha - \delta & b_{32} & -a_{23} \\ & a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta & \\ & & -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ & & & -\alpha - 2\delta & b_{31} & -a_{13} \\ & & & & 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta & \\ & & & & & -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ q_{33} \\ q_{31} \\ q_{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{generic point } \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{32} - a_{23} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ b_{31} - a_{13} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim (\text{II})_3$$

余次元 1 の点

相対不変式

指標

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{32} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ 0 \\ b_{31} - a_{13} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{pmatrix} \\ ([1], [1]) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (\text{II})_5 & \end{aligned}$$

 p_{23}

$$\delta p_1 = -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a_{23} \\ 0 \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ b_{31} - a_{13} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{pmatrix} \\ ([1], [1]) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (\text{II})_6 & \end{aligned}$$

 p_{32}

$$\delta p_2 = a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{32} - a_{23} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ b_{31} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ 0 \end{pmatrix} \\ ([1], [1]) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (\text{II})_5 & \end{aligned}$$

 q_{13}

$$\delta p_3 = -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{32} - a_{23} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ -a_{13} \\ 0 \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{pmatrix} \\ ([1], [1]) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (\text{II})_6 & \end{aligned}$$

 q_{31}

$$\delta p_4 = 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta$$

$$-\delta \chi = 2\delta p_1 + 2\delta p_2 + 2\delta p_3 + 2\delta p_4$$

$$\text{tr}_{V_{X_0}^*} = 2\delta p_1 + 2\delta p_2 + 2\delta p_3 + 2\delta p_4$$

[I]₅ : 代表点 $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12} & -b_{13}+\beta \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_{31}+\gamma & a_{12}-b_{32} & a_{11}+b_{11}+b_{22}+\delta \\ -b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & a_{21}-b_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{X_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{11} & a_{23} \\ -\alpha-2\delta & a_{11}+\alpha+2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}+\alpha & -2a_{11}-\alpha-\delta \\ \gamma & a_{12} \\ a_{11}+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ q_{31} & -p_{31} \end{pmatrix} \right\}$$

$(q_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} p_{33} \\ p_{23} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ q_{31} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2\alpha-\delta & -a_{23} & a_{12} & 2\gamma \\ & 3a_{11}+3\delta & & \\ & & -3a_{11} & \\ & & -3\alpha-3\delta & \\ & & & -\alpha-2\delta & -\gamma \\ & & & & -3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{33} \\ p_{23} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ q_{31} \end{pmatrix} \quad \text{tr } V_{X_0}^* = -6\alpha-6\delta$$

$$\text{generic point } Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim [I]_5$$

余次元 1 の点

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \delta p_1 = -3a_{11}-3\alpha-3\delta \quad [I]_4$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \delta p_2 = 3a_{11}+3\delta \quad [I]_1$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \delta p_3 = -3\delta \quad [I]_3$$

$$-\delta\chi = \text{tr } V_{X_0}^* = 2(\delta p_1 + \delta p_2 + \delta p_3)$$

$$[I]_6 \quad \text{代表点 } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31}+\beta & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13}+\gamma & a_{12} \\ a_{23}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & -b_{23} \\ a_{33}-b_{11}+\delta & a_{32}-b_{12} & -b_{13} \end{pmatrix}$$

$$g_{X_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\delta+b_{33} & -\alpha-3\delta-2b_{33} & -\gamma \\ & b_{21} & \alpha+\delta+b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+2\delta+b_{33} & b_{21} & -\alpha-2\delta-2b_{33} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} -g_{33} \\ p_{23} \\ p_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{23} \end{pmatrix} \right\}$$

$(g_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} p_{33} \\ g_{033} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ g_{13} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2\alpha-\delta & -2\gamma & b_{32} & -b_{21} & \\ & -\alpha-2\delta & & \gamma & \\ & & -3\alpha-3\delta & & \\ & & -3b_{33} & & \\ & & & 3\delta+3b_{33} & \\ & & & & -3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{33} \\ g_{033} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ g_{13} \end{pmatrix} \quad \text{tr}_{V_{X_0}^*} = -6\alpha-6\delta$$

$$\text{generic point } Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \{ p_{32} p_{23} g_{13} = 0 \}$$

$$\{ p_{32} = 0 \} \ni Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_0\text{-homog.} \quad [I]_2$$

$$\{ p_{23} = 0 \} \ni Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_0\text{-homog.} \quad [I]_4$$

$$\{ g_{13} = 0 \} \ni Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{not } g_0\text{-homog.} \quad [I]_3$$

$$\delta p_1 = -3\alpha - 3\delta - 3b_{33}, \quad \delta p_2 = 3\delta + 3b_{33}, \quad \delta p_3 = -3\delta, \quad -\delta\chi = 2(\delta p_1 + \delta p_2 + \delta p_3)$$

$$[I]_7 \quad \text{代表点 } X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\tilde{A} X_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12} & -b_{13}+\beta \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31}+\beta & & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{13}-b_{31}+\gamma & a_{12}-b_{32} & a_{11}-b_{33}+\delta \\ a_{23}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & a_{21}-b_{23} \\ a_{33}-b_{11}+\delta & a_{32}-b_{12} & a_{31}-b_{13} \end{bmatrix} \right\}$$

$$g_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{11}-\alpha & a_{23} & a_{11}+\alpha \\ a_{11}+\alpha & a_{13}+\gamma & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_{x_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} p_{31} \\ -2p_{31} & p_{31} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ -p_{31} \end{bmatrix} \right\}$$

$(g_{x_0}, V_{x_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ p_{31} \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2\alpha & a_{12} & -a_{23} & \gamma \\ & -3a_{11}-3\alpha & & 3a_{23} \\ & & 3a_{11} & -a_{12} \\ & & & -\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ p_{31} \end{pmatrix} \quad \text{tr}_{V_{x_0}^*} = -6\alpha$$

$$\text{generic point } Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad [I]_7$$

余次元 1 の点

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \delta p_1 = -\alpha \quad [0]_3$$

$$A_0 = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ -2a_{11}+1 & a_{11}-1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}-1 & -2a_{11}+1 \\ a_{13} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$-\delta X = \text{tr}_{V_{x_0}^*} = 6\delta p_1$$

$[1]_\delta$ 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} + \delta & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31} & \beta & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & a_{12} & a_{13} \\ -b_{21} & a_{22} - b_{22} + \delta & a_{23} - b_{23} \\ -b_{31} & a_{32} - b_{32} & -a_{11} - a_{22} + b_{11} + b_{22} + \delta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{11} - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} - 2\delta & a_{22} + \delta & a_{23} \\ a_{32} & -a_{11} - a_{22} + \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\delta \\ \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} y & -x \\ z & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$(\mathcal{O}_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a_{11} - 2a_{22} + 3\delta & -2a_{32} \\ -a_{23} & 3\delta & -a_{32} \\ -2a_{23} & a_{11} + 2a_{22} + 3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \dim_{V_{X_0}^*} = 9\delta$$

generic point $\gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim [0]_3$

余次元 1 の点 $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sim [0]_2$

$$[\text{II}]_1 : \text{代表点 } X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$g \cdot X_0 = V$$

$$[\text{II}]_2 : \text{代表点 } X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12}+\beta & -b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & -b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\gamma & a_{13}-b_{23} \\ & a_{21}+\gamma & a_{23} \\ -b_{31} & a_{31}-b_{32} & -a_{11}-a_{22}+b_{11}+b_{22}+\delta \end{bmatrix} \right)$$

$$g_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}-3\alpha & -2a_{11}+3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12} \\ a_{11}-2\alpha & -2a_{11}+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ g_{21} \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$(g_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$g_{21} \mapsto 6\alpha g_{21}$$

$$\text{generic point } Y_0 = (1) = \left(\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ & \end{bmatrix} \right) \cdot [0]_2$$

$$\text{余次元 1 の点 } Y_1 = (0) = \left(\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ & \end{bmatrix} \right) \cdot [0]_1$$

$$[\text{II}]_3 : \text{代表点 } X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\tilde{A} X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12} & -b_{13}+\beta \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & -b_{23} \\ a_{31} & a_{32}+\beta & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{31}+\gamma & a_{13}-b_{32} & a_{11}+b_{11}+b_{22}+\delta \\ & a_{23}+\gamma & a_{21} \\ -b_{21} & -a_{11}-a_{22}-b_{22}+\delta & a_{31}-b_{23} \end{bmatrix} \right)$$

$$g_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} -\alpha-\delta & a_{12} & a_{13} \\ \delta & -\gamma & \\ -\beta & \alpha & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\delta & a_{12} & \beta \\ & \alpha+\delta & \\ \gamma & a_{13} & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} -p_{31} & p_{31} \\ p_{31} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21} & q_{31} \\ q_{21} & -p_{31} \end{bmatrix} \right) \right\} \quad G_{X_0} \sim (SL(2) \times GL(1)) \cdot G_a^2$$

$(q_{x_0}, V_{x_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} q_{31} \\ p_{31} \\ q_{21} \\ p_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\alpha-2\delta & -2\beta & \gamma & \\ & -2\delta & -2\alpha-\delta & \beta \\ & 3\beta & & -3\delta \\ & & 3\gamma & -3\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{31} \\ p_{31} \\ q_{21} \\ p_{33} \end{pmatrix} \quad t_{V_{x_0}^*} = -6\alpha - 6\delta$$

generic point $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot [I]_4$

余次元 1 の点 $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot [I]_3$

[II]₄ : 代表点 $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12}+\beta & -b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & -b_{23} \\ a_{31}+\beta & a_{32} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13}-b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\delta & -b_{23} \\ a_{23} & a_{21}+\delta & \\ -a_{11}-a_{22}-b_{11}+\delta & a_{31}-b_{12} & -b_{13} \end{pmatrix}$$

$$q_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} -\gamma & -2\beta & -2\delta \\ \delta-\alpha & & \alpha-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{x_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_{23} \\ q_{23} \\ -p_{13} \end{pmatrix} \right\} \quad G_{X_0} \sim (SL(2) \times GL(1)) \cdot G_a^2$$

$(q_{x_0}, V_{x_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ q_{23} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2\delta & 2\gamma & \beta & \\ & 2\beta & -\alpha-2\delta & -\gamma \\ & 3\gamma & & -3\alpha \\ & & -3\beta & -3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ q_{23} \end{pmatrix} \quad t_{V_{x_0}^*} = -6\alpha - 6\delta$$

generic point $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\delta \\ -\alpha-2\delta \\ -3\alpha \\ -3\beta \end{pmatrix}$

$$Y_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right) \sim [I]_2$$

余次元 1 の点

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{この相対不変式} = \delta_{23} \quad \text{指標} = -3\delta$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$X_0 + tX_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right) \sim [II]_6$$

[II]₅ : 代表点 $X_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ これは始めの例

[II]₆ : 代表点 $X_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12}+\beta & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & a_{23}-b_{23}+\beta \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33}+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_{21}+\delta & a_{11}-b_{22}+\delta & a_{12}-b_{23} \\ -b_{31} & a_{22}-b_{32}+\delta & a_{23}-b_{33}+\delta \\ a_{31} & a_{32}+\delta & \end{pmatrix}$$

$$q_{X_0} = \left\{ \begin{pmatrix} -\delta & a_{23}+\beta & a_{13} \\ & a_{23} & \\ & & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta & a_{23}+2\beta & a_{13} \\ & a_{23}+\beta & \\ & & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ p_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_{31} \\ q_{31}-p_{31} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\}$$

$(q_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} p_{31} \\ q_{31} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2\delta & \\ -3\beta & -3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{31} \\ q_{31} \end{pmatrix}$$

generic point $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{23} & a_{13} \\ & a_{23} & a_{13} \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{23} & a_{13} \\ & a_{23} & a_{13} \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad [I]_3$$

余次元 1 の点

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{相対不変式} = p_1 \quad \text{指標} = -2\delta$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [0]_2$$

3. 一覧表

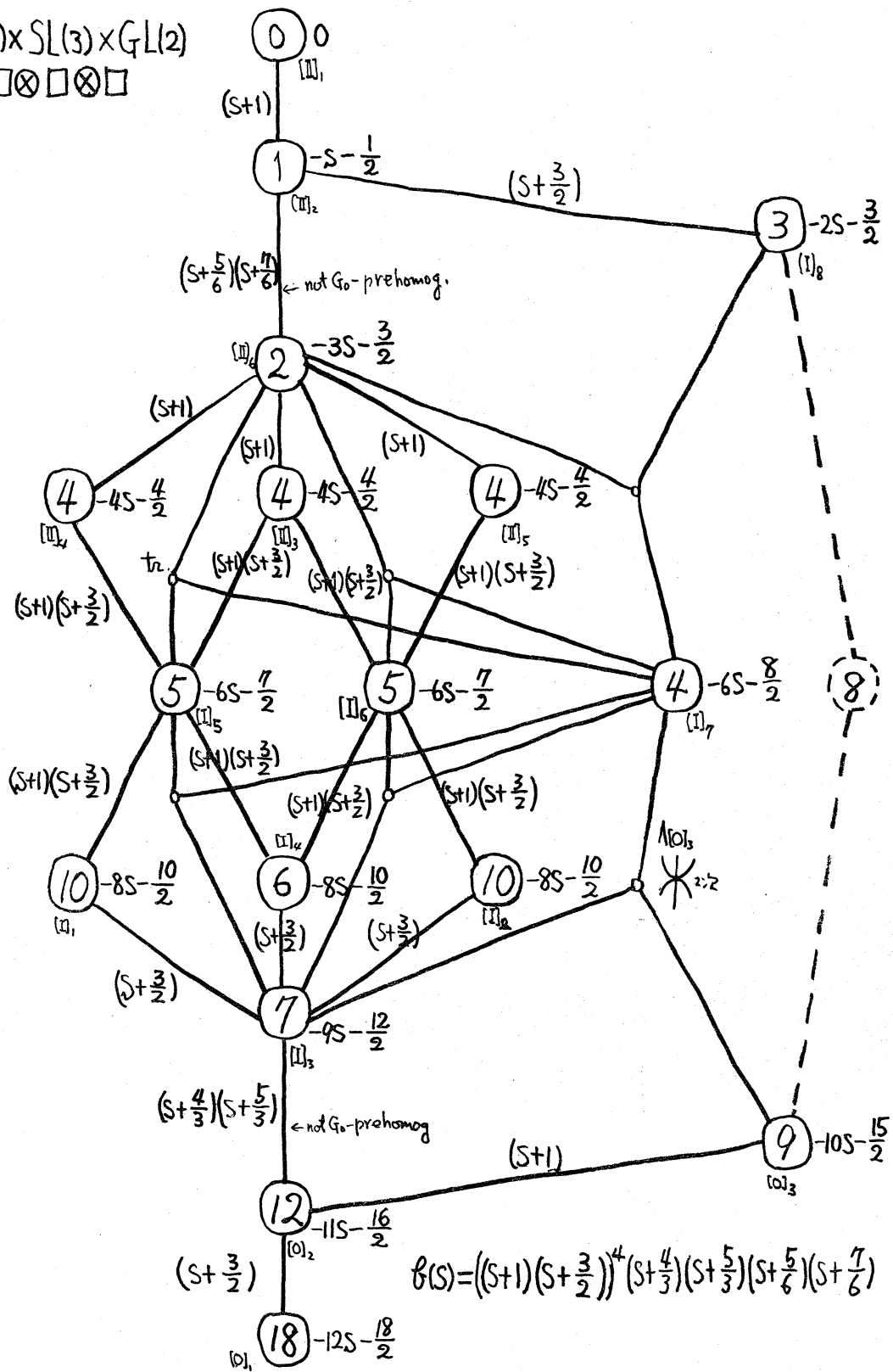
双対	X_1	X_2	$\det(uX_1 + vX_2)$	退化点の階数	$\dim V_{x_0}^*$	余法準の order
$\Pi_1 - O_1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$uv(u+v)$	2, 2, 2	0	-0
$\Pi_2 - O_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	u^2v	2=2, 2	1	$-5 - \frac{1}{2}$
$I_8 - O_3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	uv^2	2, 1=1	3	$-2S - \frac{3}{2}$
$\Pi_6 - I_3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	u^3	2=2=2	2	$-3S - \frac{3}{2}$
$I_7 - I_7$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	v^3	1=1=1	4	$-6S - \frac{8}{2}$
$O_4 - O_4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	v^3	0=0=0	8	余法束が非概均質
$\Pi_3 - I_4$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	(u^2, uv, v^2)	[3, 3]	4	$-4S - \frac{4}{2}$
$\Pi_5 - I_1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	(u^2, uv, v^2)	[2, 3]	4	$-4S - \frac{4}{2}$
$\Pi_4 - I_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	(u^2, uv, v^2)	[3, 2]	4	$-4S - \frac{4}{2}$
$I_5 - I_5$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	(uv, v^2)	[2, 3]	5	$-6S - \frac{7}{2}$
$I_6 - I_6$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	(uv, v^2)	[3, 2]	5	$-6S - \frac{7}{2}$

双対	X_1	X_2	uX_1+vX_2 の 小行列の $\det$	退化点での階数	$\dim V_{X_0}^*$	余法束の order
$I_4 - II_3$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	uv	$1, 1$	6	$-8S - \frac{10}{2}$
$I_3 - II_6$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{bmatrix}$	v^2	$1=1$	7	$-9S - \frac{12}{2}$
$O_3 - I_8$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{bmatrix}$	v^2	$0=0$	9	$-10S - \frac{15}{2}$
$I_1 - II_5$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	(u, v)	$[1, 2]$	10	$-8S - \frac{10}{2}$
$I_2 - II_4$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	(u, v)	$[2, 1]$	10	$-8S - \frac{10}{2}$
$O_2 - II_2$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	v	0	12	$-11S - \frac{16}{2}$
$O_1 - II_1$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$	1		18	$-12S - \frac{18}{2}$

(注) 例えば II_3 の場合 $\det(uX_1+vX_2)=0$ であるが, uX_1+vX_2 の小行列の行列式を考えると (u^2, uv, v^2) がでてくる. また $\text{rank}(X_1, X_2)$, $\text{rank}({}^tX_1, {}^tX_2)$ を $[3, 3]$ と表わした. 退化点の階数とは, uX_1+vX_2 で $u=0$ あるいは $v=0$ とした時の階数.

上の表は各軌道の不変量を表わしており, 互いに群の作用で移り得ないことがわかる.

$$SL(3) \times SL(3) \times GL(2)$$

$$\square \otimes \square \otimes \square$$


$$P(s) = \left((s+1) \left(s + \frac{3}{2} \right) \right)^4 \left(s + \frac{4}{3} \right) \left(s + \frac{5}{3} \right) \left(s + \frac{5}{6} \right) \left(s + \frac{7}{6} \right)$$

今までの情報では、例えば $[0]_3, [I]_3, [I]_7$ が余次元 1 で交わっていることがわからない。それを示す。

$[0]_3$ の代表点は $X_0 = ([\] [1 \])$, 余次元 1 の点 $Y_2 = ([1 \] [\])$ だから, $[0]_3$ と $[I]_7$ との余次元 1 の交わりは

$$G([\] [1 \]), ([1 \] [\]))$$

である。これが

$$G([\] [1 \]), ([1 \] [-1 \])) = L$$

の Zariski 閉包にふくまれていることを示せばよい。

$$([\] [1 \]), ([t \ t] [-t \ 1])) \in L$$

を考える。

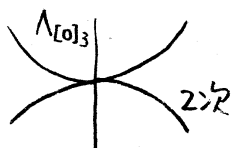
$$\begin{aligned} & ([\] [1 \]), ([t \ t] [-t \ 1])) \\ & \sim ([1 \] [1 \]), ([t \ t] [-t \ 1])) \quad (\text{by } (1_3, [1 \], 1_2)) \\ & \sim ([t \] [1 \]), ([1 \] [-t \ 1])) \quad (\text{by } (1_3, 1_3, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})) \\ & \rightarrow ([\] [1 \]), ([1 \] [1 \])) \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$-^t A_0 Y_2 = Y_2$ かつ $A_0 \in \mathfrak{g}_{X_0}$ をとると

$$V_{X_0}^* \ni Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{3} Y \pmod{\mathfrak{g}_{X_0} Y_2}$$

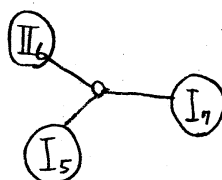
$$\frac{1}{3} = \frac{m}{m+n} \quad (m, n) = 1 \quad \text{と} \quad m=1, n=2$$

これで



がわかる。

つきに



をしらべる。

$$((\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}), (\begin{bmatrix} p & -2p & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ -p \end{bmatrix}))$$

の形の元を G の作用で動かして、その極限に

$$((\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}), (\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ -1 \end{bmatrix}))$$

が入るといいはよい。

$$((\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}), (\begin{bmatrix} t & -2t & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ -t \end{bmatrix}))$$

$$\sim ((\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}), (\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ -1 \end{bmatrix})) \quad (\text{by } (\begin{bmatrix} 1 & \vdots \\ \vdots & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_3 & 1_2 \end{bmatrix}))$$

$$\rightarrow ((\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}), (\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ -1 \end{bmatrix})) \quad \text{by } t \rightarrow 0$$

これで $[II]_6, [I]_7, [I]_5$ が余次元 1 で交わっていることがわかつ

た。

$$-{}^t A_0 \gamma_i = \gamma_i \text{ for } A_0 \in \mathfrak{g}_{x_0} \text{ をとって}$$

$$V_{x_0}^* \ni \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto -3\delta \gamma \mod \mathfrak{g}_{x_0} \gamma_i \quad \delta = -\frac{1}{6}$$

$$\text{ゆえに } \frac{1}{2} = \frac{m}{n+m} \quad m=n=1$$

これで $\Lambda_{II_6}, \Lambda_{I_7}, \Lambda_{I_5}$ が transversal に交わっていることがわかる。Lagrangean の点 (X_1, X_2, Y_1, Y_2) とみらわしたとき、 $(\text{rank } X_1^t Y_1, \text{rank } X_1^t Y_2, \text{rank } X_2^t Y_1)$ は群の作用で

不変である。このことを使って、 $\Lambda_{\mathbb{R}_3}$ がこれらと交わることはないことがわかる。

3. 相対不変式.

$$g = (A, B, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \in G$$

に対して

$$V \ni (X_1, X_2) \xrightarrow{g} (A(aX_1 + bX_2)B^{-1}, A(cX_1 + dX_2)B^{-1})$$

不定元 u, v をとって

$$(X_1, X_2) = X_1 u + X_2 v$$

と考える。

$$\det(X_1 u + X_2 v)$$

$$= P_0(X_1, X_2) u^3 + P_1(X_1, X_2) u^2 v + P_2(X_1, X_2) u v^2 + P_3(X_1, X_2) v^3$$

とおくと、 P_0, P_1, P_2, P_3 は X_1, X_2 の成分を変数とする 3 次式になっている。これらは、 A, B を作用しても変わらず、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の作用で変りうる。

一般に、2 元 3 次式

$$x_0 u^3 + x_1 u^2 v + x_2 u v^2 + x_3 v^3$$

で、 $(u, v) \mapsto (u, v) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (au + cv, bu + dv)$ という作用に関して、係数 x_0, x_1, x_2, x_3 の相対不変式が知られている。それは上の多項式の判別式である。具体的には

$$x_1^2 x_2^2 + 18 x_0 x_1 x_2 x_3 - 4 x_0 x_3^3 - 4 x_1^3 x_3 - 27 x_0^2 x_3^2$$

したがって、今の場合、 x_0, x_1, x_2, x_3 をそれぞれ P_0, P_1, P_2, P_3 におきかえたものである。以上のことから、我々の考察してきた既約概均質ベクトル空間の相対不変式が求まった。すなわち、

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}$$

とおくとき、相対不変式 $f(X_1, X_2)$ は

$$f(X_1, X_2) = P_1^2 P_2^2 + 18 P_0 P_1 P_2 P_3 - 4 P_0 P_3^3 - 4 P_1^3 P_3 - 27 P_0^2 P_3^2$$

ここで

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}$$

$f(X_1, X_2)$ は X_1, X_2 の成分の斉次12次式であることがわかる。