

- 2) L.D.Landau, ibid 5, 101 (1957)
- 3) P.Nozières and D.Pines, Theory of Quantum Liquids
(Benjamin N.Y. 1965)
- 4) P.Nozières, Theory of Interacting Fermi Systems
(Benjamin N.Y. 1964)
- 5) A.J.Leggett, Physica Fennica 8, 159 (1973)
- 6) A.J.Leggett, lecture note at IX-th. Winter School of
Theoretical Physics in Karpacz : The Theory of Metals and the
Many Body Problems vol I, (Wroclaw, 1972)

第2章 BCS 理論

§ 2.1 BCS ハミルトニアン

Bardeen, Cooper, Schrieffer (BCS)¹⁾ は凝縮対の角運動量 ℓ が 0 でスピン一重項のみを考えた。ここではあとで液体 ^3He に応用するために $\ell \neq 0$ の場合も含んだ形の BCS 理論を紹介する。弱い相互作用のある Fermi 気体は平面波で記述するのがよい。即ち一粒子状態は $\Omega^{1/2} \exp(i \underline{k} \underline{r}) \times (\text{スピン関数})$ である。

第二量子化の形で書く。 $a_{\underline{p}\sigma} (a_{\underline{p}\sigma}^+)$ を上の一粒子状態の消滅 (生成) 演算子とすると、反交換関係は

$$\begin{aligned} [a_{\underline{p}\sigma}, a_{\underline{p}'\sigma'}^+]_+ &= \delta_{\underline{p}\underline{p}'} \delta_{\sigma\sigma'} \\ [a_{\underline{p}\sigma}, a_{\underline{p}'\sigma'}]_+ &= [a_{\underline{p}\sigma}^+, a_{\underline{p}'\sigma'}^+]_+ = 0 \end{aligned}$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\underline{p}\sigma} \epsilon_{\underline{p}} a_{\underline{p}\sigma}^+ a_{\underline{p}\sigma} \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\substack{\underline{p}\underline{p}'\underline{q} \\ \sigma\sigma'}} V(\underline{q}) a_{\underline{p}+\underline{q}/2, \sigma}^+ a_{\underline{p}'-\underline{q}/2, \sigma'}^+ a_{\underline{p}'+\underline{q}/2, \sigma'} a_{\underline{p}-\underline{q}/2, \sigma} \end{aligned} \quad (2.1)$$

但し $\epsilon_{\underline{p}} = p^2/2m$, V は運動量を保存する任意の弱い相互作用 ($V \ll \epsilon_F$) とする。

第二項において $\underline{p}$, $\underline{p}'$, $\underline{q}$ による和のうち運動量保存のため二つの和のみが独立にでき $O(\Omega^2)$ の寄与を与える。よって $\langle \hat{H} \rangle \sim O(\Omega)$ となる。

相互作用の中で正常相で寄与があるのは $\underline{q}=0$ (Hartree 項) と $\underline{p}=\underline{p}'$ (Fock 項) であり, 相転移がおこると他の項がきいてくる。例えば結晶では $\underline{q}=\underline{K}$, ($\underline{K}$ は逆格子ベクトル), BCS 状態では $\underline{p}=-\underline{p}'$ が大切である。

よって BCS ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \hat{T} + \hat{V}$$

$$\hat{T} = \sum_{\underline{k}\sigma} \epsilon_{\underline{k}} a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{\underline{k}\sigma}$$

$$\hat{V} = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\substack{\underline{k}\underline{k}' \\ \sigma\sigma'}} V(|\underline{k}-\underline{k}'|) a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{-\underline{k}\sigma'}^+ a_{-\underline{k}'\sigma'} a_{\underline{k}'\sigma}$$

となる。

相互作用項に寄与する粒子は Fermi 面近くのものであるから $|\underline{k}| = |\underline{k}'| = k_F$ としてよい。このとき V は Legendre 展開できて

$$V = V(\underline{n} \cdot \underline{n}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) V_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (2.2)$$

但し $\cos \theta = \underline{n} \cdot \underline{n}'$, $\underline{n} = \underline{k}/|\underline{k}|$ である。この V を even part と odd part に分けて別々に考えよう。

(i) even part ($\ell = \text{even}$)

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{k}} V_{\text{even}}(\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{-\underline{k}\sigma'}^+ &= \sum_{\underline{k}} V_{\text{even}}(-\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{-\underline{k}\sigma}^+ a_{\underline{k}\sigma'}^+ \\ &= - \sum_{\underline{k}} V_{\text{even}}(\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{\underline{k}\sigma'}^+ a_{-\underline{k}\sigma}^+ \quad (\text{反交換関係を用いた}) \end{aligned}$$

もし $\sigma = \sigma'$ ならば $\sum_{\underline{k}} V_{\text{even}} a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{-\underline{k}\sigma'}^+ = 0$, よって $\ell = \text{even}$ の場合には反平行スピンのときのみ寄与する。

(ii) odd part ($\ell = \text{odd}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{\underline{k}} V_{\text{odd}} (\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{-\underline{k}\sigma'}^+ \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \{ V_{\text{odd}} (\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{-\underline{k}\sigma'}^+ + V_{\text{odd}} (-\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{-\underline{k}\sigma}^+ a_{\underline{k}\sigma'}^+ \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \{ V_{\text{odd}} (\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{-\underline{k}\sigma'}^+ + (-1)(-1) V_{\text{odd}} (\underline{n} \cdot \underline{n}') a_{\underline{k}\sigma'}^+ a_{-\underline{k}\sigma}^+ \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} V_{\text{odd}} (\underline{n} \cdot \underline{n}') \{ a_{\underline{k}\sigma}^+ a_{-\underline{k}\sigma'}^+ + a_{\underline{k}\sigma'}^+ a_{-\underline{k}\sigma}^+ \} \end{aligned}$$

こんどは $\sigma = \sigma'$ も可能となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a_{\underline{k}\uparrow}^+ a_{-\underline{k}\downarrow}^+ + a_{\underline{k}\downarrow}^+ a_{-\underline{k}\uparrow}^+) &\Longleftrightarrow S = 1, S_z = 0 \text{ に対応} \\ a_{\underline{k}\uparrow}^+ a_{-\underline{k}\uparrow}^+ &\Longleftrightarrow S = 1, S_z = 1 \text{ に対応} \\ a_{\underline{k}\downarrow}^+ a_{-\underline{k}\downarrow}^+ &\Longleftrightarrow S = 1, S_z = -1 \text{ に対応} \end{aligned}$$

以上から次の事がわかる。

$$\begin{cases} \ell = \text{even} : & \text{スピン一重項} \\ \ell = \text{odd} : & \text{スピン三重項} \end{cases}$$

これは Pauli 原理の結果であり、直観的にも明らかである。以下では煩雑さを避けるため運動量 $\underline{k}$ のベクトル記号を省略する。

§ 2.2 $\ell = \text{even}$ のときの BCS 理論^{2,3)}

大正準集団にうつり $\mathcal{H} \equiv \hat{H} - \mu \hat{N}$ を最小にする。(μ は化学ポテンシャルである。)

$$\mathcal{H} = \sum_{k\sigma} \tilde{\epsilon}_k a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + \frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} V_{kk'} a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow}$$

但し

$$\epsilon_k - \mu = \tilde{\epsilon}_k, \quad V_{\text{even}}(\underline{n} \cdot \underline{n}') = V_{kk'}$$

と定義した。又、相互作用の項の $\frac{1}{2}$ が消えたのはスピン和をとってしまったからである。

($k\uparrow, -k\downarrow$) という平面波状態の対を考えると、自由 Fermi 気体の場合には次の四つの状態が可能である。(表 2-1)

表 2-1

	表示	エネルギー	スピン	運動量	熱平衡での存在確率
(1) both empty	(0,0)	0	0	0	1
(2) $k\uparrow$ full, $-k\downarrow$ empty	(1,0)	$\tilde{\epsilon}_k$	$\frac{1}{2}(\uparrow)$	$\hbar k$	$\exp(-\tilde{\epsilon}_k/k_B T)$
(3) $k\uparrow$ empty, $-k\downarrow$ full	(0,1)	$\tilde{\epsilon}_k$	$-\frac{1}{2}(\downarrow)$	$-\hbar k$	$\exp(-\tilde{\epsilon}_k/k_B T)$
(4) both full	(1,1)	$2\tilde{\epsilon}_k$	0	0	$\exp(-2\tilde{\epsilon}_k/k_B T)$

この四つの状態は二粒子の平面波状態を考えるとときには完全系をなすから任意の状態をこれらの状態で展開することができる。上に与えた存在確率は熱平衡状態のものである。但し規格化因子 $\{1 + 2\exp(-\tilde{\epsilon}_k/k_B T) + \exp(-2\tilde{\epsilon}_k/k_B T)\}^{-1}$ を落としてある。

相互作用のあるときには

$$(k'\uparrow, -k'\downarrow) \rightarrow (k\uparrow, -k\downarrow)$$

という散乱がおこる。したがって

$$\langle n | a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} | n \rangle \neq 0$$

であるためにはどちらの対状態も部分的に占有されていなくてはならない。(即ち、

partly full and partly empty)。この相互作用によって $(1,0)$ と $(0,1)$ の状態は影響を受けないが、 $(0,0)$ と $(1,1)$ は大きな影響を受けまじり合ってくる。

BCS 近似 (factorization 近似), これは Bogoliubov によって正当化された, を用いると

$$\langle n | a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} | n \rangle \Rightarrow \langle n | a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ | n \rangle \langle n | a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} | n \rangle$$

(もしも粒子数保存があればこれは零となる。しかし, 今粒子数保存条件をはずして大正準集団で考えているので有限に残る。)

ここで Δ_k を次の様に定義する。

$$\Delta_k \equiv -\frac{1}{\Omega} \sum_{k'} V_{kk'} \langle n | a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} | n \rangle \quad (2.3)$$

するとハミルトニアンは次の様に k についての和として書ける。

$$\mathcal{H} = \sum_{k\sigma} \tilde{\epsilon}_k a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} - \sum_k \{ \Delta_k a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ + \Delta_k^* a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \} \equiv \sum_k H_k$$

$$H_k \equiv \tilde{\epsilon}_k (a_{k\uparrow}^+ a_{k\uparrow} + a_{-k\downarrow}^+ a_{-k\downarrow}) - (\Delta_k a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ + \Delta_k^* a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}) \quad (2.4)$$

$(0,1)$ と $(1,0)$ は H_k の固有状態でエネルギー $\tilde{\epsilon}_k$ をもつ (自由気体と同じ)。

$(0,0)$ と $(1,1)$ は H_k の固有状態ではない。相互作用があるため適当な線形結合が固有状態になる。 $(0,0)$ と $(1,1)$ を基底として H_k を行列表示すると

$$H_k = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (0,0) & (1,1) \end{array} \\ \begin{array}{c} (0,0) \\ (1,1) \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 0 & -\Delta_k^* \\ -\Delta_k & 2\tilde{\epsilon}_k \end{array} \right] \end{array}$$

固有値を λ とすると永年方程式は

$$-\lambda(2\tilde{\epsilon}_k - \lambda) - |\Delta_k|^2 = 0$$

これを解くと固有値と固有函数は次のようになる。

$$\lambda = \tilde{\epsilon}_k \pm E_k, \quad E_k \equiv \sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + |\Delta_k|^2}$$

$$\Phi_{\pm} = \frac{\Delta_k^*}{\sqrt{|\Delta_k|^2 + (\tilde{\epsilon}_k \pm E_k)^2}} |0, 0\rangle - \frac{\tilde{\epsilon}_k \pm E_k}{\sqrt{|\Delta_k|^2 + (\tilde{\epsilon}_k \pm E_k)^2}} |1, 1\rangle \quad (2.5)$$

(複号同順)

$\tilde{\epsilon}_k - E_k < \tilde{\epsilon}_k$, $\tilde{\epsilon}_k + E_k$ であるから Φ_- が基底状態になる。位相因子を除いて

$$\tilde{\epsilon}_k \rightarrow +\infty \quad \text{のとき} \quad \Phi_- \rightarrow |0, 0\rangle$$

$$\tilde{\epsilon}_k \rightarrow -\infty \quad \text{のとき} \quad \Phi_- \rightarrow |1, 1\rangle$$

となる。つまり Fermi 面から遠く離れたところでは自由 Fermi 気体と同じになる。結果をまとめると表 2-2 になる。

表 2-2

	エネルギー	スピン	運動量	熱平衡での存在確率
(1) Ground Pair (G.P.)	$\tilde{\epsilon}_k - E_k$	0	0	1
(2) Broken Pair (B.P.)	$\tilde{\epsilon}_k$	$\frac{1}{2}$	$\hbar k$	$\exp(-E_k/k_B T)$
(3) Broken Pair (B.P.)	$\tilde{\epsilon}_k$	$-\frac{1}{2}$	$-\hbar k$	$\exp(-E_k/k_B T)$
(4) Excited Pair (E.P.)	$\tilde{\epsilon}_k + E_k$	0	0	$\exp(-2E_k/k_B T)$

但し, GP, EP はそれぞれ Φ_- , Φ_+ のことである。GP から BP へ励起するときおよび BP から EP に励起するときには E_k のエネルギーが必要であることがわかる。従って BP, EP を準粒子と考えて良いように思える。しかし EP の状態は $p=0$, $s=0$

ゆえ正常状態の性質（二流体モデルの言葉でいうと常流体成分からの寄与による性質）には寄与しないので準粒子とみなさない方がよい。

次に Δ_k を計算しよう。そのためには期待値 $\langle n | a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} | n \rangle$ を知る必要がある。

$$\begin{aligned}\langle a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \rangle_{\text{GP}} &= - \frac{\Delta_{k'}(\tilde{\epsilon}_{k'} - E_{k'})}{|\Delta_{k'}|^2 + (\tilde{\epsilon}_{k'} - E_{k'})^2} = - \frac{\Delta_{k'}(\tilde{\epsilon}_{k'} - E_{k'})}{2E_{k'}(E_{k'} - \tilde{\epsilon}_{k'})} = \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \\ \langle a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \rangle_{\text{EP}} &= - \frac{\Delta_{k'}(\tilde{\epsilon}_{k'} + E_{k'})}{|\Delta_{k'}|^2 + (\tilde{\epsilon}_{k'} + E_{k'})^2} = - \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \\ \langle a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \rangle_{\text{BP}} &= 0 \\ \therefore \Delta_k &= - \frac{1}{\Omega} \sum_{k'} V_{kk'} \{ P_{\text{GP}}(E_{k'}) - P_{\text{EP}}(E_{k'}) \} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \quad (2.6)\end{aligned}$$

この式では熱平衡は仮定していない（ P は確率）。

熱平衡を仮定すると

$$\begin{aligned}P_{\text{GP}} &= \frac{1}{1 + 2e^{-E/kT} + e^{-2E/kT}} \\ P_{\text{EP}} &= \frac{e^{-2E/kT}}{1 + 2e^{-E/kT} + e^{-2E/kT}} \\ \therefore P_{\text{GP}} - P_{\text{EP}} &= \frac{1 - e^{-2E/kT}}{(1 + e^{-E/kT})^2} = \tanh \frac{E}{2k_B T}\end{aligned}$$

従って

$$\Delta_k = - \frac{1}{\Omega} \sum_{k'} V_{kk'} \Delta_{k'} \frac{\tanh(E_{k'}/2k_B T)}{2E_{k'}} \quad (2.7)$$

これを BCS のギャップ方程式という。

§ 2.3 S 波のギャップ方程式の解

$\ell=0$ の場合を考え $V_{kk'} = \text{const} = -V_0$ と仮定しよう。

(i) $T=0$ では $\tanh(E_k/2k_B T) \rightarrow 0$ である。 $V_0 > 0$ (つまり引力) でないとギャップ方程式は 0 でない解をもたない。弱結合の場合 ($N_0 V_0 \ll 1$) には

$$\Delta(0) \cong 2 \epsilon_c \exp\left(-\frac{1}{N_0 V_0}\right)$$

となる。ここで $N_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon}\right)$ で ϵ_c は k 積分発散を止めるために入れた切断エネルギーである。

(ii) $V_0 > 0$ でもある温度 (転移温度 T_c) 以上ではギャップ方程式は 0 でない解をもたない。 T_c は $\Delta=0$ とおいて求められる。

$$1 = \frac{1}{\Omega} V_0 \sum_k \left\{ \frac{\tanh(\tilde{\epsilon}_k/2k_B T)}{\tilde{\epsilon}_k} \right\}$$

これから

$$k_B T_c = c \cdot \epsilon_c \exp\left(-\frac{1}{N_0 V_0}\right)$$

$$c = \frac{2r}{\pi} \cong 1.14 \quad (r \cong 1.78 \text{ Euler 定数})$$

ギャップのふるまいをまとめておくと

$$\begin{cases} \Delta(0) = \frac{\pi}{r} k_B T_c \cong 1.76 k_B T_c & (T=0) \\ \Delta(T) = \sqrt{\frac{8\pi^2 k_B^2 T_c^2}{7\zeta(3)}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \cong 3.2 k_B T_c \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} & (T \lesssim T_c) \end{cases}$$

ここで $\zeta(x)$ は ζ 函数である。

§ 2.4 S 波の BCS 状態の物理的性質

(i) スピン帯磁率⁴⁾

外部磁場 H がかったとき GP, EP はスピンをもたぬので影響をうけない。(但し $0(H^2)$ の影響はあるがここでは無視する。) 一方 BP は影響をうけエネルギーが変わる。

$$(2) \quad E_k \rightarrow E_k - \frac{1}{2} \mu H$$

$$(3) \quad E_k \rightarrow E_k + \frac{1}{2} \mu H$$

このため平衡状態の存在確率は

$$P_k(2) = \frac{e^{-(E_k - \frac{1}{2}\mu H)/k_B T}}{1 + e^{-(E_k - \frac{1}{2}\mu H)/k_B T} + e^{-(E_k + \frac{1}{2}\mu H)/k_B T} + e^{-2E_k/k_B T}}$$

$$P_k(3) = \frac{e^{-(E_k + \frac{1}{2}\mu H)/k_B T}}{1 + e^{-(E_k - \frac{1}{2}\mu H)/k_B T} + e^{-(E_k + \frac{1}{2}\mu H)/k_B T} + e^{-2E_k/k_B T}}$$

となる。分母への磁場の寄与は $O(H^2)$ となるので分母では $H=0$ としてよい。

$$\text{分母} = (1 + e^{-E_k/k_B T})^2$$

磁化 M は次の様に求まる。

$$\begin{aligned} M &= \sum_k \{P_k(2) - P_k(3)\} \frac{1}{2} \mu \\ &= \sum_k \frac{\frac{1}{2} \mu}{(1 + e^{-E_k/k_B T})^2} \left\{ e^{-(E_k - \frac{1}{2}\mu H)/k_B T} - e^{-(E_k + \frac{1}{2}\mu H)/k_B T} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \mu^2 H \sum_k \frac{1}{k_B T} \frac{e^{-E_k/k_B T}}{(1 + e^{-E_k/k_B T})^2} = \frac{1}{4} \mu^2 H \sum_k \frac{1}{2k_B T} \cdot \frac{1}{\cosh^2(E_k/2k_B T)}$$

ここで $\sum_k \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \int d\epsilon$ として計算すると

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{4} \mu^2 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{1}{2k_B T} \operatorname{sech}^2 \frac{E}{2k_B T} \quad (E \equiv \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}) \\ &= \frac{1}{4} \mu^2 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{1}{2k_B T} \operatorname{sech}^2 \frac{E}{2k_B T} \end{aligned}$$

第1章の(1.6)式から

$$\chi_n = \frac{1}{4} \mu^2 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \quad (\chi_n \text{ の } n \text{ は正常相を示す})$$

であるから,

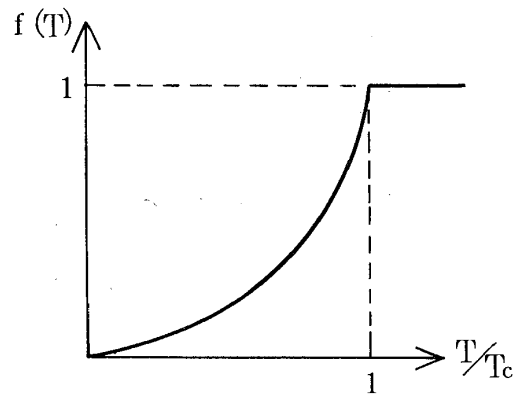
$$\chi = \chi_n f(T) \quad (2.8)$$

$$f(T) = \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{1}{2k_B T} \operatorname{sech}^2 \frac{E}{2k_B T}$$

(正常状態では $f(T) = 1$)

$f(T)$ は Yosida (芳田) 函数とよばれる

(2-1図)。



2-1図

(II) 常流密度

Landau によるやり方で ρ_n の式を導こう。今回転板の速度を $\underline{v}_n$ とする。全運動量が $\underline{P}$ である状態の熱力学は $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} - \underline{v}_n \underline{P}$ とすれば記述できる。すなわち確率 $\propto \exp \{ -(E - \underline{v}_n \underline{p}) / k_B T \}$ 。GP と EP は $\underline{p} = 0$ であるから ρ_n への寄与はない。BP からの寄与を考えると

$$E(2) \rightarrow E_k - \hbar \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{k}$$

$$E(3) \rightarrow E_k + \hbar \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{k}$$

よって,

$$P(2) \propto \exp \{ -(E_k - \hbar \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{k}) / k_B T \}$$

$$P(3) \propto \exp \{ -(E_k + \hbar \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{k}) / k_B T \}$$

以下の計算は χ の計算と同様にできる。

$$\tilde{P} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar^2 \mathbf{k} (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{k}) \frac{2}{2k_B T} \text{sech}^2 \left(\frac{E_k}{2k_B T} \right)$$

$\ell=0$ のときには E_k は等方的ゆえ角度平均ができて

$$\tilde{P} = \frac{1}{3} \mathbf{v}_n \cdot \hbar^2 k_F^2 \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \frac{2}{2k_B T} \text{sech}^2 \left(\frac{E_k}{2k_B T} \right) \right\} = \frac{1}{3} \mathbf{v}_n (\hbar k_F)^2 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) f(T)$$

$$\therefore \rho_n \equiv \frac{\tilde{P}}{\Omega \mathbf{v}_n} = \frac{1}{3\Omega} (\hbar k_F)^2 \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) f(T)$$

自由 Fermi 気体の式 (1.8) を用いて

$$\rho_n = \frac{N}{\Omega} m f(T) = \rho f(T) \quad (2.9)$$

すなわち,

$$\frac{\rho_n}{\rho} = f(T) = \frac{\chi}{\chi_n}$$

Fermi 液体効果を考えるとこれは正しくない ($\rightarrow$ § 3.3)。

§ 2.5 $\ell \neq 0$ の一重項ペアリング

$\ell=0$ の場合にはギャップ方程式は $\Delta = \text{const}$ と仮定できて1つの自明でない解が求まった ($\rightarrow$ § 2.3)。 $\ell \neq 0$ の場合には, ギャップは Fermi 面上での $\mathbf{k}$ ベクトルの方向 $\mathbf{n}$ の関数となり ($\Delta(\mathbf{n})$) ギャップ方程式の解は一意的に定まらない。一番安定

な状態は自由エネルギー最少の状態であるから、以下では自由エネルギーを考えることにする。

$$F = E - TS = E_k - TS + V$$

(i) 相互作用項については BCS 近似を用いて

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} \langle a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \rangle V_{kk'} \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} \langle a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ \rangle \langle a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \rangle V_{kk'} \end{aligned}$$

以下では Δ_k を変分パラメタ, Φ_k を試行函数と考える。§ 2.2 の結果を用いると

$$\begin{aligned} \langle a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ \rangle &= \frac{\Delta_k^*}{2E_k} \tanh \frac{E_k}{2k_B T} \\ \therefore V &= \frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} V_{kk'} \left(\frac{\Delta_k}{2E_k} \tanh \frac{E_k}{2k_B T} \right) \left(\frac{\Delta_{k'}^*}{2E_{k'}} \tanh \frac{E_{k'}}{2k_B T} \right) \end{aligned}$$

(ii) 運動エネルギー項については

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_k (n_{k\uparrow} + n_{-k\downarrow}) \epsilon_k \\ \text{B.P. : } n_{k\uparrow} + n_{-k\downarrow} &= 1 \\ \text{G.P. : } n_{k\uparrow} + n_{-k\downarrow} &= 1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \\ \text{E.P. : } n_{k\uparrow} + n_{-k\downarrow} &= 1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \\ \therefore E_k &= \sum_k \left\{ P_{GP} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) + 2 P_{BP} + P_{EP} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \right\} \epsilon_k \\ &= \sum_k \epsilon_k \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \tanh \frac{E_k}{2k_B T} \right) \end{aligned}$$

(iii) エントロピー項

$$S = \sum_k S_k$$

$$S_k = -k_B \sum_n P_n \ell_n P_n \equiv -k_B (P_{GP} \ell_n P_{GP} + 2 P_{BP} \ell_n P_{BP} + P_{EP} \ell_n P_{EP})$$

$$= -\frac{E_k}{T} \left(\tanh \frac{E_k}{2k_B T} - 1 \right) + 2k_B \ell_n (1 + e^{-E_k/k_B T})$$

ここで Q_k を次のように定義しよう。

$$Q_k \equiv \frac{\Delta_k}{2E_k} \tanh \frac{E_k}{2k_B T}$$

自由エネルギーは次のように書ける。

$$F = \text{const} + \sum_k \{ \Delta_k Q_k^* + \Delta_k^* Q_k - E_k - 2k_B T \ell_n (1 + e^{-E_k/k_B T}) \} \\ + \frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} V_{kk'} Q_k Q_{k'}^*$$

また

$$f = E_k + 2k_B T \ell_n (1 + e^{-E_k/k_B T})$$

とおくと $\frac{\partial f}{\partial \Delta_k} = Q_k^*$ から

$$f = \int (Q_k^* d\Delta_k + Q_k d\Delta_k^*)$$

$$\therefore F = \text{const} + \sum_k \{ \Delta_k Q_k^* + \Delta_k^* Q_k - \int Q_k^* d\Delta_k - \int Q_k d\Delta_k^* \} + \frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} V_{kk'} Q_k Q_{k'}^*$$

部分積分を行なうと

$$F = \text{const} + \sum_{\mathbf{k}} \{ \int \Delta_{\mathbf{k}} dQ_{\mathbf{k}}^* + \int \Delta_{\mathbf{k}}^* dQ_{\mathbf{k}} \} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} Q_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}'}^*$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q_{\mathbf{k}}^*} = 0$$

から BCS のギャップ方程式

$$\Delta_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} Q_{\mathbf{k}'} = 0$$

が求まる。

以下では次のように書きかえる。

$$\sum_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \int d\epsilon \int \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$\int \frac{d\Omega}{4\pi}$ は Fermi 面上での $\underline{\mathbf{k}}$ の方向 $\underline{\mathbf{n}}$ についての角度平均

$$Q_{\mathbf{k}} = Q(\underline{\mathbf{n}}, \epsilon)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta(\underline{\mathbf{n}})$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = V(\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{n}'})$$

また $\Psi(\underline{\mathbf{n}})$ を次の様に定義する。

$$\Psi(\underline{\mathbf{n}}) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \int d\epsilon Q(\underline{\mathbf{n}}, \epsilon) \equiv \sum_{|\mathbf{k}|} Q_{\mathbf{k}}$$

これを用いて自由エネルギーを書きかえると

$$\begin{aligned} F = \text{const} + & \left\{ \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int (\Delta(\underline{\mathbf{n}}) d\Psi^*(\underline{\mathbf{n}}) + \Delta^*(\underline{\mathbf{n}}) d\Psi(\underline{\mathbf{n}})) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Omega} \iint \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\Omega'}{4\pi} V(\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{n}'}) \Psi(\underline{\mathbf{n}}) \Psi^*(\underline{\mathbf{n}'}) \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$T_c - T \ll T_c$ のときには Δ が小さいから $\Psi(\underline{\mathbf{n}})$ を Δ で展開して, Δ^3 のオーダー

までとる。

$$\begin{aligned}\Psi(\underline{n}) &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \Delta(\underline{n}) \int_{-\epsilon_c}^{\epsilon_c} \frac{\tanh(E(\underline{n}, \epsilon)/2k_B T)}{2 E(\underline{n}, \epsilon)} d\epsilon \\ &= K_1(T) \Delta(\underline{n}) - K_2(T) |\Delta(\underline{n})|^2 \Delta(\underline{n})\end{aligned}$$

ここで,

$$K_1(T) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \int_{-\epsilon_c}^{\epsilon_c} \frac{\tanh(\epsilon/2k_B T)}{2\epsilon} d\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \cdot \ell_n \left(\frac{2r\epsilon_c}{\pi k_B T} \right) > 0$$

$$K_2(T) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \frac{1}{(2k_B T)^2} B, \quad B = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ -\frac{d}{dx} \left(\frac{\tanh x}{x} \right) \right\} > 0$$

これを (2.10) に代入すると $\ell \neq 0$ の場合には $V(\underline{n}, \underline{n}')$ の項がめんどどうになるので逆に $\Delta(\underline{n})$ を $\Psi(\underline{n})$ の函数として解き, 自由エネルギーを $\Psi(\underline{n})$ を使ってあらわそう。

Ψ に関する積分を実行して

$$\begin{aligned}F = \text{const} &+ \frac{1}{K_1(T)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\Psi(\underline{n})|^2 + \frac{1}{2} \frac{K_2(T)}{K_1(T)^4} \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\Psi(\underline{n})|^4 \\ &+ \frac{1}{\Omega} \iint \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\Omega'}{4\pi} \Psi(\underline{n}) \Psi^*(\underline{n}') V(\underline{n}, \underline{n}')\end{aligned} \quad (2.11)$$

$K_1, K_2 > 0$ だから $V(\underline{n}, \underline{n}')$ の Legendre 展開 (2.2) の係数 V_ℓ の中に負のものがあれば Ψ の二次の項が負になりうる。以下ではある ℓ に対して $V_\ell < 0$ として他の $\ell' (\neq \ell)$ については $V_{\ell'} = 0$ とおこう。(一番引力的なところのみ考える。) すると $\Psi(\underline{n})$ を球函数で展開したとき, $V(\underline{n}, \underline{n}')$ の項に寄与するのは ℓ 番目の部分波成分のみである。そこで Ψ を次の形に仮定する。

$$\Psi(\underline{n}) = \Psi_\ell f_\ell(\underline{n})$$

但し,

$$f_{\ell}(\underline{n}) = f_{\ell}(\theta, \varphi) = \sum_m a_m Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$\int |f_{\ell}(\theta, \varphi)|^2 \frac{d\Omega}{4\pi} = 1 \quad (\text{規格化}) \quad (2.12)$$

これを代入すると自由エネルギーは

$$F = \text{const} + \left(\frac{1}{K_1(T)} + \frac{V_{\ell}}{\Omega} \right) |\Psi_{\ell}|^2 + \frac{1}{2} \frac{K_2(T)}{K_1(T)^4} |\Psi_{\ell}|^4 \int |f_{\ell}(\underline{n})|^4 \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (2.13)$$

$|\Psi_{\ell}|^2$ の係数を 0 とおけば、転移温度 T_c がきまる。

$$K_1(T_c) = \frac{\Omega}{|V_{\ell}|} \quad (\because V_{\ell} < 0)$$

$$\therefore T_c = 1.14 \epsilon_c \exp \left\{ -\frac{1}{N(0) |V_{\ell}|} \right\}, \quad N(0) = \frac{1}{2\Omega} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) \quad (2.14)$$

$T \lesssim T_c$ で $(T_c - T)$ による展開を行なうと、 $|\Psi_{\ell}|^2$ の係数は

$$(T - T_c) \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{K_1(T)} \right) = \frac{T - T_c}{T_c K_1(T)^2} \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right)$$

となる。

$K_1(T_c) = K_1$, $K_2(T_c) = K_2$ とおけば

$$F = F_0(T) + \frac{T - T_c}{T_c K_1^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) |\Psi_{\ell}|^2 + \frac{1}{2} \frac{K_2}{K_1^4} |\Psi_{\ell}|^4 \int |f_{\ell}(\underline{n})|^4 \frac{d\Omega}{4\pi}$$

ここで

$$\xi_{\ell} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right)} \frac{\Psi_{\ell}}{K_1}$$

と定義すると、

$$F = F_0(T) + \frac{T - T_c}{T_c} |\xi_{\ell}|^2 + \frac{1}{2} \frac{K_2}{\left(\frac{1}{2} \frac{dn}{d\epsilon} \right)^2} |\xi_{\ell}|^4 \int |f_{\ell}(\underline{n})|^4 \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (2.15)$$

これは一般的な Ginzburg-Landau の自由エネルギーの形

$$F = F_0(T) + a(T) |\xi|^2 + \frac{1}{2} b(T) |\xi|^4 \quad (2.16)$$

になっている。ただし

$$a(T) = \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$b(T) = \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)^{-1} \frac{1}{(2k_B T_c)^2} B \int |f_\ell(\underline{n})|^4 \frac{d\Omega}{4\pi}$$

普通は場の理論の手法を用いて Ginzburg-Landau の式を導くことが多いが、ここでのべた方法は $\ell \neq 0$ のときに便利である。特に $b(T)$ の中に $\int |f_\ell(\theta, \varphi)|^4 d\Omega/4\pi$ が入っていることに注意してほしい。

この結果を用いて $T \sim T_c$ での熱力学的性質を調べよう。

(a) $T > T_c$ のとき

$\xi_\ell = 0$ が自由エネルギー最小を与える。つまり正常相である。

(b) $T < T_c$ のとき

$|\xi_\ell|^2 = -a/b$ が自由エネルギー最小を与え、

$$F(T) = F_0(T) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b}$$

となる。 T_c での比熱の飛びは

$$\Delta C_v = C_s - C_n = T_c \frac{1}{b} \left(\frac{da}{dT}\right)^2 = \frac{1}{b T_c} = \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right) \frac{4k_B^2 T_c}{B \kappa} = \frac{\Delta C_{\text{BCS}, \ell=0}}{\kappa}$$

但し

$$C_n = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T_c \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right), \quad \kappa = \int |f_\ell(\underline{n})|^4 \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\therefore \frac{\Delta C_v}{C_n} = \frac{12}{\pi^2 B} \frac{1}{\kappa} \simeq 1.42 \frac{1}{\kappa} \quad (2.17)$$

κ が大きいほど自由エネルギーは大きくなるから κ が小さい方が安定である。(つまり比熱の飛びが大きいほど自由エネルギーは小さくなる。) また規格化条件 (2.12) があるから, $\kappa \geq 1$ である。

次に色々な ℓ の値について考えてみる。

(i) $\ell=0$ (BCS) のとき $f_\ell = 1$ であるから $\kappa=1$ となる。

(ii) $\ell \neq 0$ の場合には一般に f_ℓ が複素数の方が κ は小さくなる。

(a) $\ell=2$ のとき

$$f_2 = \sum_{m=-2}^2 a_m Y_{2m}$$

とおいてどのような $\{a_m\}$ に対して κ が最小になるか調べてみる。Anderson と Morel³⁾ によると表 2-3 の様になる。

表 2-3

	$f_2(\underline{n})$	κ
(1)	$Y_{22} \propto (n_x + i n_y)^2$	$10/7$
(2)	$n_x^2 + e^{2\pi i} n_y^2 + e^{4\pi i} n_z^2$ (Cubic)	$10/7$
(3)	$Y_{20} \propto 3 n_z^2 - 1$	$15/7$

$\kappa = 10/7$ を与えるような D 波の函数は他にもたくさんあって, 簡単な BCS 理論から導いた自由エネルギー (2.15) では安定状態は非常に縮退している。もう少し一般的な立場から考えると, 安定状態はほぼ (1) か (2) に決まることがわかっている。⁵⁾

(b) $\ell \geq 4$ のとき κ の計算は複雑なのでどの状態が安定になるかはまだ解決していない。

液体 ^3He の場合, $\ell = \text{even}$ ならば $\ell = 2$ の可能性が最も高いと考えられている。(せいぜい $\ell = 4$ まで考えればよいと思われる。)

最後に $T=0$ の場合に触れておこう。内部エネルギー

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \left(\epsilon_{\mathbf{k}} - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \right) + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} Q_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}^* V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \left(Q_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{2 E_{\mathbf{k}}} \right)$$

を計算すると

$$\int |\Delta(\underline{n})|^2 \ell_n |\Delta(\underline{n})| d\Omega$$

を最小にすればよいことがわかる。 $\ell=2$ のときには $T \sim T_c$ では (1) と (2) が縮退していたが、 $T=0$ では (2) が最も安定になる。(Anderson と Morel が $T=0$ の議論も詳しくしている。)

§ 2.6 三重項ペアリング ($\ell = \text{odd}$, $S=1$)

$(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ の対だけでなく $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow)$, $(\mathbf{k}\downarrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ の対もあらわれる。まず Equal Spin Pairing (ESP) と呼ばれる状態を考えよう。^{2,3)} この状態は $S_z = \pm 1$ の対のみをもつ。

$$S = 1, \quad S_z = 1 \quad : \quad (\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow)$$

$$S = 1, \quad S_z = -1 \quad : \quad (\mathbf{k}\downarrow, -\mathbf{k}\downarrow)$$

簡単な理論では二つの対は独立と考える。 $\Psi_{\uparrow}(\underline{n}) \sim \langle a_{-\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle$, $\Psi_{\downarrow}(\underline{n}) \sim \langle a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\downarrow} \rangle$ とおくと自由エネルギーは

$$E = F\{\Psi_{\uparrow}^*, \Psi_{\uparrow}\} + F\{\Psi_{\downarrow}^*, \Psi_{\downarrow}\}$$

の形になるから、一重項の場合と同様な議論ができる。即ち $T \sim T_c$ では $\kappa = \int |f_{\ell}(\underline{n})|^4 d\Omega / 4\pi$ を最小にすればよい。 $\ell=1$ ならば f_1 として $Y_{10} \propto (n_x + i n_y)$ をとれば $\kappa = 6/5$ となり自由エネルギーが最小になる。しかしスピン帯磁率は一重項のときと全く異なる。 $S=0$ のときには GP, EP はどちらもスピン零であったのに対し、 $S=1$ のときは $|0, 0\rangle$ はスピン零、 $|1, 1\rangle$ はスピン 1 だから G.P. も E.P. もスピンをもつ。つまり GP も EP もともに分極に寄与する。その結果スピン帯磁率は 2-2 図に示す様に正常相と同じになる。詳しくは § 2.8 を参照。

以上が ESP の場合であるが、Balian と Werthamer⁶⁾ によると $S=1$, $S_z=0$ なるクーパー対ができた方が自由エネルギーが低くなる可能性がある。少なくとも $\ell=1$

のときにはそうである。そこで次のように

$\Psi_{\sigma\sigma'}(\underline{n})$ を定義する。

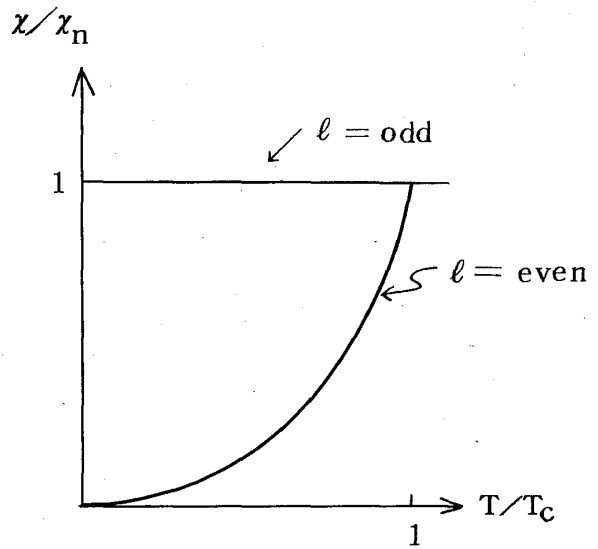
$$\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n}) \equiv \sum_{|\mathbf{k}|} \langle a_{-\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle$$

$$\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n}) \equiv \sum_{|\mathbf{k}|} \langle a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\downarrow} \rangle$$

$$\Psi_{\uparrow\downarrow}(\underline{n}) \equiv \sum_{|\mathbf{k}|} \langle a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle$$

$$= \Psi_{\downarrow\uparrow}(\underline{n})$$

(2.18)



2-2 図

但し $\langle a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle$ は $\ell = \text{odd}$ の部分

波成分のみとっているから

$$\langle a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = - \langle a_{\mathbf{k}\downarrow} a_{-\mathbf{k}\uparrow} \rangle$$

なる性質を使った。

(これと対比させて書けば一重項のときには

$$\Psi_{\uparrow\downarrow}(\underline{n}) \equiv \sum_{|\mathbf{k}|} \langle a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = - \Psi_{\downarrow\uparrow}(\underline{n}) \quad (2.19)$$

である。)

$\hat{\Psi}$ を二行二列の行列として次のように定義する。

$$\hat{\Psi}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n}) & \Psi_{\uparrow\downarrow}(\underline{n}) \\ \Psi_{\downarrow\uparrow}(\underline{n}) & \Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n}) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$\hat{\Psi}$ は対称行列であるが複素行列である。これを用いて相互作用項を書きかえよう。

$$V = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \{ \langle a_{\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{-\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{-\mathbf{k}'\uparrow} a_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle + \langle a_{\mathbf{k}\downarrow}^+ a_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ a_{-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{k}'\downarrow} \rangle$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \langle a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \rangle \} \\
& \simeq \frac{1}{2\Omega} \iint \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \frac{d\Omega'}{4\pi} V(\underline{n}, \underline{n}') \{ \Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n}) \Psi_{\uparrow\uparrow}^*(\underline{n}') + \Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n}) \Psi_{\downarrow\downarrow}^*(\underline{n}') \\
& \quad + 2 \Psi_{\uparrow\downarrow}(\underline{n}) \Psi_{\downarrow\uparrow}^*(\underline{n}') \} \\
& = \frac{1}{2\Omega} \iint \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \frac{d\Omega'}{4\pi} V(\underline{n}, \underline{n}') T_r \{ \hat{\Psi}(\underline{n}) \hat{\Psi}^*(\underline{n}') \}
\end{aligned}$$

$\hat{\Psi}(\underline{n})$ は対称行列であるからスピン座標系を適当にとることにより対角化できる。新しい表示で

$$\hat{\Psi}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n}) & 0 \\ 0 & \Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n}) \end{pmatrix}$$

但し固有値は一般には複素数である。

この形を使えば自由エネルギーは $\ell = \text{even}$ の場合と同様に計算できる。特に E_k と S への寄与は Fermi 面上の各方向 $\underline{n}$ での値の和になる。

$$E_k(\underline{n}) - TS(\underline{n}) = f(\epsilon_{k\uparrow}, E_{k\uparrow}) + f(\epsilon_{k\downarrow}, E_{k\downarrow})$$

但し Fermi 面の各方向ごとにそれぞれ別のスピン座標軸をきめなくてはならない点是不便である。^{註)} $T \leq T_c$ では簡単化されて

$$\begin{aligned}
E_k(\underline{n}) - TS(\underline{n}) & \simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{K_1(T)} |\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n})|^2 + \frac{1}{2} \frac{K_2(T)}{K_1(T)^4} |\Psi_{\uparrow\uparrow}|^4 \right\} \\
& \quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{K_1(T)} |\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n})|^2 + \frac{1}{2} \frac{K_2(T)}{K_1(T)^4} |\Psi_{\downarrow\downarrow}|^4 \right\}
\end{aligned}$$

註) Fermi 面のあらゆる方向に対して共通のスピン座標を選び、なおかつあらゆる方向で $\hat{\Psi}$ が対角的であるものを ESP と呼んだ。

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{K_1(T)} \{ |\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n})|^2 + |\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n})|^2 \} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{K_2(T)}{K_1(T)^4} \cdot \frac{1}{2} \{ |\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n})|^4 + |\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n})|^4 \} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{K_1(T)} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^2 + \frac{1}{2} \frac{K_2(T)}{K_1(T)^4} \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^4
 \end{aligned}$$

ところがトレースは座標系のとり方によらず不変である。よってこの最後の表式はスピ
ン座標系のとり方によらず一般的に成立する。したがって

$$\begin{aligned}
 F = F_0(T) &+ \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{K_1(T)} \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{K_2(T)}{K_1(T)^4} \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^4 \\
 &+ \frac{1}{\Omega} \iint \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \frac{d\Omega'}{4\pi} V(\underline{n}, \underline{n}') \frac{1}{2} T_r \hat{\Psi}(\underline{n}) \hat{\Psi}^*(\underline{n}') \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

この式は一重項のときの自由エネルギー (2.11) において

$$\begin{aligned}
 |\Psi(\underline{n})|^2 &\rightarrow \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^2, \quad |\Psi(\underline{n})|^4 \rightarrow \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^4, \\
 \Psi(\underline{n}) \Psi^*(\underline{n}') &\rightarrow \frac{1}{2} T_r \hat{\Psi}(\underline{n}) \hat{\Psi}^*(\underline{n}')
 \end{aligned}$$

とおきかえたものになっている。実はこの表現は一重項の場合にも使える。一重項の
ときには

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 & \Psi_{\uparrow\downarrow} \\ \Psi_{\downarrow\uparrow} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Psi_{\uparrow\downarrow} \\ -\Psi_{\uparrow\downarrow} & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\hat{\Psi} \hat{\Psi}^* = \begin{pmatrix} |\Psi_{\uparrow\downarrow}|^2 & 0 \\ 0 & |\Psi_{\uparrow\downarrow}|^2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_r \hat{\Psi} \hat{\Psi}^* = |\Psi_{\uparrow\downarrow}|^2, \quad \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}|^4 = |\Psi_{\uparrow\downarrow}|^4$$

となり (2.11) に帰着する。

また一重項と三重項がまじりあっているときにも使える。このような状態が自由エネルギーを最小にすることはないと思うが、この問題は目下議論されている段階である。

一重項の場合と同様に $V(\underline{n}, \underline{n}')$ の Legendre 展開 (2.2) の係数 V_ℓ の中に負のものがあれば、 $\Psi \neq 0$ となることによって自由エネルギーを下げうる。以下では $V_\ell < 0$ となる ℓ のみとり出して考える。($\ell' \neq \ell$ については $V_{\ell'} = 0$ とする。) $\hat{\Psi}$ も球関数で展開し ℓ 番目の部分波成分のみ考えればよい。

$$\hat{\Psi}(\underline{n}) = \sum_m \hat{a}_m Y_{\ell m}(\underline{n})$$

転移温度 T_c は次の条件で定まる。

$$\frac{1}{K_1(T_c)} + \frac{V_\ell}{\Omega} = 0$$

T_c の近くで $1/K_1(T)$ を展開すると、

$$\frac{1}{K_1(T)} = \frac{1}{K_1(T_c)} + (T - T_c) \left. \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{K_1(T)} \right) \right|_{T=T_c}$$

$1/K_1(T_c)$ の項と $V(\underline{n}, \underline{n}')$ の項は消し合うので自由エネルギーは次の形になる。

$$F = F_0(T) + \alpha(T) \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^2 + \frac{1}{2} \beta(T) \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{2} T_r |\hat{\Psi}(\underline{n})|^4 \quad (2.22)$$

ここで $\alpha(T) \propto (T - T_c)$ である。((2.15) と比べよ。) $\ell = 1$ のときの安定状態は、

Anthony J. Leggett

$$\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n}) \propto -n_x + i n_y$$

$$\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n}) \propto n_x + i n_y$$

$$\Psi_{\uparrow\downarrow}(\underline{n}) \propto n_z$$

である。もちろん空間座標を回転してもかまわない。たとえば x 軸のまわりに 60° 回転した函数

$$\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n}) \propto -n_x + i \left(\frac{1}{2} n_y - \frac{\sqrt{3}}{2} n_z \right)$$

$$\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n}) \propto n_x + i \left(\frac{1}{2} n_y - \frac{\sqrt{3}}{2} n_z \right)$$

$$\Psi_{\uparrow\downarrow}(\underline{n}) \propto \frac{\sqrt{3}}{2} n_y + \frac{1}{2} n_z$$

も同じ値を与える。

行列 $\hat{\Psi}(\underline{n})$ はスピン座標軸の回転に対してあまり便利な表現ではないので、Balian と Werthamer によるもっと便利な表現を紹介しよう。(この表現は一重項と三重項の混じった状態にも使えるが、ここでは三重項だけを扱う。) $\hat{\Psi}(\underline{n})$ は二行二列の対称行列であるから Pauli 行列を使って次のように分解できる。

$$\hat{\Psi}(\underline{n}) = i \sum \sigma_i \sigma_y d_i(\underline{n}) = \begin{pmatrix} -d_x(\underline{n}) + i d_y(\underline{n}) & d_z(\underline{n}) \\ d_z(\underline{n}) & d_x(\underline{n}) + i d_y(\underline{n}) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

このように定義された $\underline{d}(\underline{n})$ はスピン座標軸の回転に対してベクトルとしてふるまう。一般に $\underline{d}$ は複素数である。このとき、

$$\frac{1}{2} \text{Tr} |\Psi(\underline{n})|^2 = |\underline{d}(\underline{n})|^2$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr} |\Psi(\underline{n})|^4 = |\underline{d}(\underline{n})|^4 + |\underline{d}^*(\underline{n}) \times \underline{d}(\underline{n})|^2$$

となる。

$$\left(\begin{array}{l} \text{ちなみにエネルギー・ギャップ } \Delta \text{ も二行二列の行列になり励起スペクトルは} \\ E^2(\underline{n}) = \epsilon^2 + |\hat{\Delta}(\underline{n})|^2 \\ \text{となる。これは軸の回転で対角化可能である。} \end{array} \right)$$

§ 2.7 $\underline{d}(\underline{n})$ の物理的意味⁷⁾

(i) $\underline{d}(\underline{n})$ の大きさ: Cooper 対の波動関数の振巾

(ii) $\underline{d}(\underline{n})$ の方向: 適当なスピン座標系を選ぶことによって $d_z(\underline{n}) = 0$ とできる。
すると,

$$\hat{\Psi}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow\uparrow} & 0 \\ 0 & \Psi_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

即ち, $\langle a_{-k\uparrow} a_{k\uparrow} \rangle \neq 0$, $\langle a_{-k\downarrow} a_{k\downarrow} \rangle \neq 0$, and $\langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \rangle \neq 0$ となる。

ペアリング軸をこのように選んでやれば $\underline{d}(\underline{n})$ はこのペアリング軸に垂直である。

これだけでは $\underline{d}$ の意味が完全に説明されたとは言えない。大別すると二つの場合があるが、それぞれについてもう少し詳しく議論する。

(a) $\underline{d}(\underline{n}) \times \underline{d}^*(\underline{n}) \neq 0$ (ノン・ユニタリー) の場合

(2.24) の表示を使えば

$$|\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n})|^2 = |d_x(\underline{n})|^2 + |d_y(\underline{n})|^2 + 2 \operatorname{Im} d_x^*(\underline{n}) \cdot d_y(\underline{n})$$

$$|\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n})|^2 = |d_x(\underline{n})|^2 + |d_y(\underline{n})|^2 - 2 \operatorname{Im} d_x^*(\underline{n}) \cdot d_y(\underline{n})$$

上向きスピンと下向きスピンの Cooper 対の振巾はちがいの差は

$$|\Psi_{\uparrow\uparrow}(\underline{n})|^2 - |\Psi_{\downarrow\downarrow}(\underline{n})|^2 = 4 \operatorname{Im} d_x^*(\underline{n}) d_y(\underline{n}) = 2i (\underline{d}(\underline{n}) \times \underline{d}^*(\underline{n}))_z$$

最後の結果は表示によらない。つまり Cooper 対は $\underline{d} \times \underline{d}^*$ に比例するスピン分極をもつ。

(b) $\underline{d}(\underline{n}) \times \underline{d}^*(\underline{n}) = 0$ (ユニタリー) の場合

任意の位相因子を除き $\underline{d}$ は実ベクトルである。よって軸の回転により

$$\hat{\Psi}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} 0 & d_z \\ d_z & 0 \end{pmatrix}$$

とおける。この座標系では $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow$ の Cooper 対はなく $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$ の Cooper 対のみ存在する。即ち $S=1, S_z=0$ の状態のみが存在していることになる。(この結果はどのような表示でも同じである。)

したがって $\underline{d}$ の方向に対して Cooper 対のスピンは 0 になっている。即ち $S=1, \underline{S} \cdot \underline{d} = 0$ である。

ユニタリーの場合には自由エネルギーの四次の項は単に $|\underline{d}(\underline{n})|^4$ となるから Fermi 面で $|\underline{d}|^2$ をできるだけ一様にした方が安定である。

(例) P 波 ($\ell=1$) のユニタリー状態^{註)}

(1) $\underline{d}(\underline{n}) = \xi \hat{\underline{x}} \sin \theta e^{i\phi}$ (Anderson-Brinkman-Morel (ABM) state)

$\hat{\underline{x}}$ は空間に固定した任意の単位ベクトルである。

(2) $\underline{d}(\underline{n}) = \xi \hat{\underline{z}} \times \underline{n}$ (Planar state)

(1) 及び (2) の場合の自由エネルギーは

$$F = F_0(T) + a(T)|\xi|^2 + \frac{b(T)}{2} \cdot \frac{6}{5} |\xi_1|^4 \quad (2.25)$$

となり、四次の項が大きいのので次に説明する BW より不安定である。($|\underline{d}(\underline{n})|^4$ 即ち $\sin^4 \theta$ の角度平均から $6/5$ がでる。)

(3) $\underline{d}(\underline{n}) = \xi \underline{n}$ (Balian-Werthamer (BW) state)

$$|\underline{d}(\underline{n})|^2 = |\xi|^2, \quad |\underline{d}(\underline{n})|^4 = |\xi|^4$$

註) § 2.6 で導入した用語を使うと、(1) と (2) は共に ESP である。

$$\therefore F = F_0(T) + a(T)|\xi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\xi|^4 \quad (2.26)$$

$|\underline{d}|^2$ が Fermi 面上で定数であり, $|\Psi|^2 = \text{const} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。かつ $E^2(\underline{n}) = \epsilon^2 + |\Delta(\underline{n})|^2 = \epsilon^2 + \text{const}^2$ 。つまり自由エネルギー, 励起エネルギー共に BCS 理論と同じである。

P波のときにはこの状態が一番安定である。

状態(2)から状態(3)へはユニタリーな状態のみを通して連続的に移行することができるが, 状態(1)から状態(3)へ行くには途中で必ずノン・ユニタリーな状態を通らざるを得ない。この観点からみると状態(1)は他の二つと異なった状態である。

以上を2-3図に示す。

$\ell \geq 3$ の場合にはどの状態が安定かについての普遍的な結果は知られていない。ユニタリーの場合に限れば, $(|\underline{d}|^2)^2$ を最小にすればよい。 $(|\underline{d}|^2)$ が Fermi 面上で定数になりうるのは $\ell=1$ のときのみである。

$\ell=3$ については Barton と Moore⁸⁾ による議論があるが, 多分 BW 状態 (即ち $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$ の三つの凝縮対がすべて存在する状態) が安定になる。

§ 2.8 スピン帯磁率 χ と常流体密度 ρ_n

S波のBCS理論では χ と ρ_n はそれぞれ(2.8), (2.9)で与えられた。ここでは $\ell \neq 0$ の場合を考えよう。

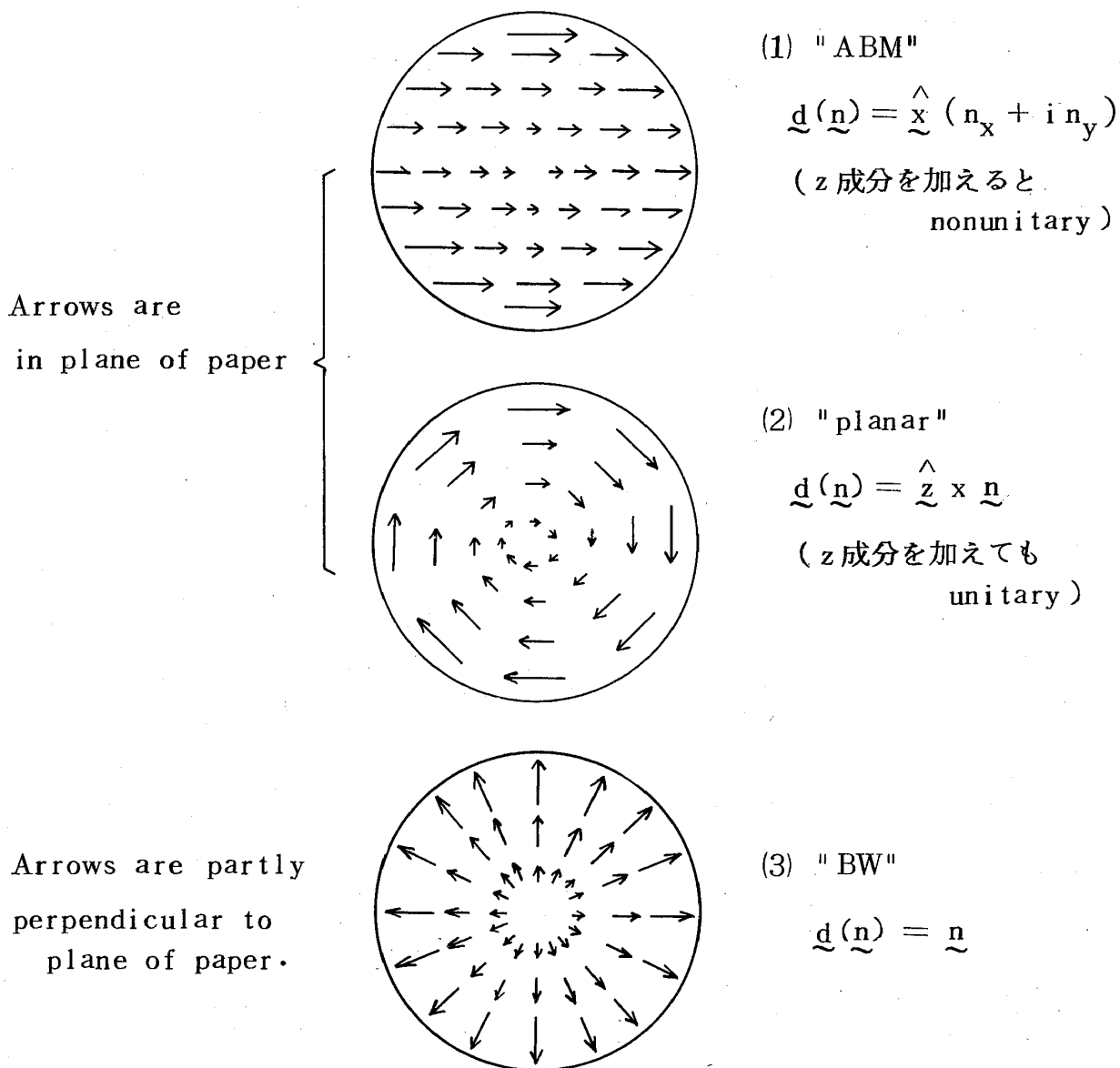
(1) $\ell = \text{even} (\neq 0)$ のとき

$$E^2 = \epsilon^2 + |\Delta(\underline{n})|^2$$

ここで $\Delta(\underline{n})$ は複素函数で Fermi 面上の方向による。従って

$$\frac{\chi}{\chi_n} = f(T) \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \frac{d\epsilon}{2k_B T} \text{sech}^2 \frac{E(\underline{n})}{2k_B T} \quad (2.27)$$

一方 ρ_n はテンソルとなる。



2-3 図 z 軸方向からみた $\underline{d}(\underline{n})$ (Fermi 面を xy 平面に射影したもの)

(Arrows show direction with respect to which
Cooper pairs are in eigenstate of S^2 and S_z .)

$$\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)_{ij} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{3v_i v_j}{v^2} \int \frac{d\varepsilon}{2k_B T} \text{sech}^2 \frac{E(\underline{n})}{2k_B T}, \quad \underline{v} = \frac{p_F}{m^*} \underline{n} \quad (2.28)$$

$$\overline{\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)} \equiv \frac{1}{3} T_r \left(\frac{\hat{\rho}_n}{\rho}\right) = f(T)$$

(2) $\ell = \text{odd}$ のとき

(a) ESP

$d_z(\underline{n}) = 0$ 即ち $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow = 0$, よって $\uparrow\uparrow$ と $\downarrow\downarrow$ の凝縮対のみが存在する。従って磁場をかけても対凝縮に影響がない (2-4 図) ので $\chi_{zz} = \chi_n$ となる。ところで χ_{xx} はあまり意味がない。その理由は次のとおりである。x 軸に平行な外部磁場をかけるとき、二つの可能性が考えられる。

- (i) スピンの量子化軸を固定して帯磁率を計算する。
- (ii) スピンの量子化軸をかえてもよいとして帯磁率を計算する。

(i) のように考えると χ_{zz} と χ_{xx} はちがってくる。しかし磁場をかけると量子化軸は 2-5 図のように変化するのが自然である。これが本当の基底状態になる。従って真の χ は等方的である。

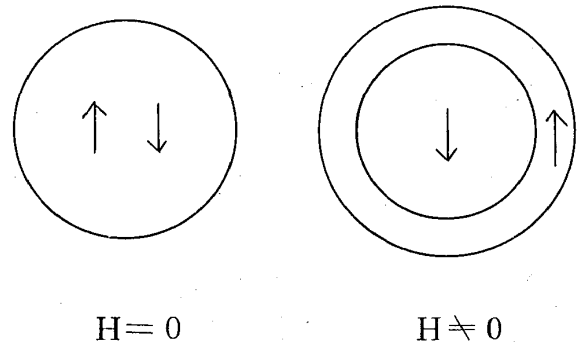
(i) の方法で計算すると

$$\underline{H} \parallel \underline{d}(\underline{n}) \text{ なら } \chi = \chi_{\text{BCS}} = \chi_n$$

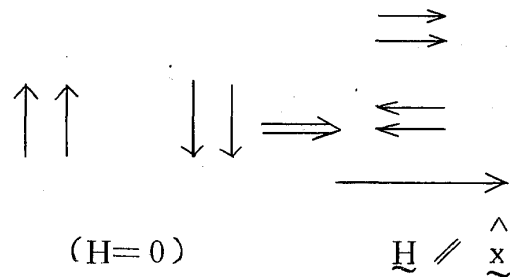
$f(T)$ (χ に対しては $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$ と

$\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$ は同じである。)

$$\underline{H} \perp \underline{d}(\underline{n}) \text{ なら } \chi = \chi_n$$



2-4 図



2-5 図

$$x_{ij} = \int x_{ij}(\underline{n}) \frac{d\Omega}{4\pi} \equiv x_n \int f_{ij}(T; \underline{n}) \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (2.29)$$

$$f_{ij}(T; \underline{n}) = \delta_{ij} - \operatorname{Re} \frac{d_i^*(\underline{n}) d_j(\underline{n})}{|d(\underline{n})|^2} \left[1 - \int \frac{d\epsilon}{2k_B T} \operatorname{sech}^2 \frac{E(\underline{n})}{2k_B T} \right]$$

$$E(\underline{n}) = \sqrt{\epsilon^2 + |\underline{\Delta}(\underline{n})|^2} \quad (2.30)$$

(b) BW state ($\ell=1$)

(2.29) 式はこの場合にも成立する。 $|\underline{\Delta}(\underline{n})|^2$ が $\underline{n}$ に依存しないので

$$\frac{x_{ij}}{x_n} = \delta_{ij} - [1 - f(T)] \operatorname{Re} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d_i^*(\underline{n}) d_j(\underline{n})}{|d(\underline{n})|^2}$$

$$\underline{d}(\underline{n}) = \xi \underline{n} \text{ ゆえ}$$

$$x_{ij} = x_n \delta_{ij} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f(T) \right\}^{\text{註}}$$

つまりスピン量子化軸を固定しても等方的になる。 ρ_n は (a), (b) いずれのときにも (2.28) と同じ形の式になる。勿論 $E(\underline{n})$ としては (2.30) を用いる。

但し (2.29) (2.30) はユニタリーの場合にのみ成り立つ式である。ここで $\underline{\Delta}(\underline{n})$ は 2×2 行列 $\hat{\underline{\Delta}}(\underline{n})$ から

$$\hat{\underline{\Delta}}(\underline{n}) = i \sum_{i=x,y,z} \sigma_i \sigma_y \Delta_i(\underline{n}) \quad ((2.23) \text{ 参照})$$

註) 特に $T=0$ では $x_{ij} = \frac{2}{3} x_n \delta_{ij}$ となる。一般に, 「BW 状態とは

$\int d_i^*(\underline{n}) d_j(\underline{n}) / |d(\underline{n})|^2 d\Omega / 4\pi = \frac{1}{3} \delta_{ij}$ となる状態である」と定義すれ

ば, この性質は P 波に限らず成立つ。

で決められるベクトルである。

§ 2.9 双極子相互作用の効果

$$\mathcal{H}_D = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mu^2 \left\{ \frac{\underline{\sigma}_i \cdot \underline{\sigma}_j}{|\underline{r}_{ij}|^3} - \frac{3(\underline{\sigma}_i \cdot \underline{r}_{ij})(\underline{\sigma}_j \cdot \underline{r}_{ij})}{|\underline{r}_{ij}|^5} \right\} \quad (2.31)$$

ここで μ は磁気モーメントである。 ^3He の場合双極子相互作用は熱エネルギー $k_B T$ にくらべて非常に小さい。

$$\left\langle \frac{\mu^2}{r^3} \right\rangle \sim 10^{-23} \text{ erg} \sim 10^{-7} \text{ K} \ll k_B T \quad (2.32)$$

しかしこの項は系の状態に大きな影響を与える。(特に第6章を参照)

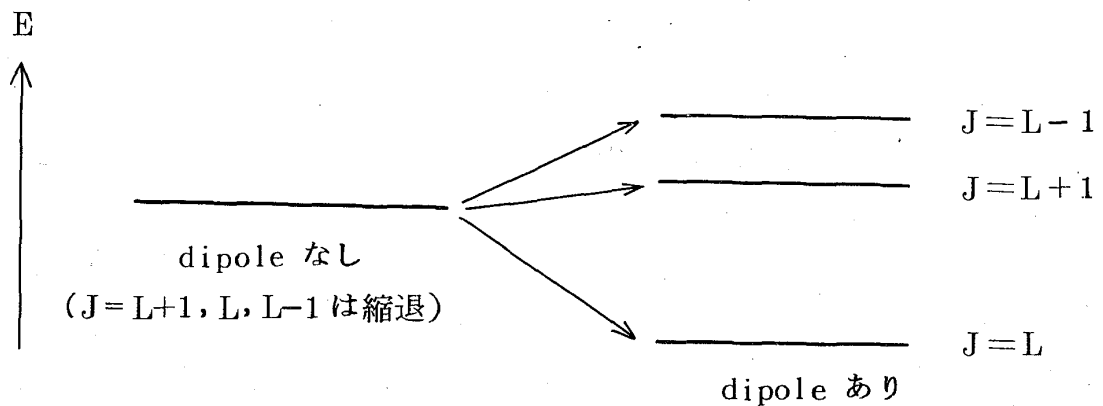
二体問題のとき L と S をきめると $\mathcal{H}_D$ は次のように表現できる。

$$\mathcal{H}_D = \mu^2 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nL} \frac{3}{(2L-1)(2L+3)} \left\{ \underline{L} \cdot \underline{S} \left(\underline{L} \cdot \underline{S} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} L(L+1) S(S+1) \right\}$$

(n は L, S 以外の量子数)

故に $S=0$ (一重項) のとき $\mathcal{H}_D = 0$ 。 $S=1$ (三重項) のときは $\underline{L} \perp \underline{S}$ とすれば $\mathcal{H}_D$ が最小になる。つまり $J=L$ が一番安定である。

この様子を 2-6 図に示す。



2-6 図

非等方的超流動体の場合にも

$\ell = \text{even}$ なら $S=0$ で $\mathcal{U}_D$ の効果なし

$\ell = \text{odd}$ なら $S=1$ で $\mathcal{U}_D$ の効果は大きい

となるはずである。今度は多体問題であるから、 $\mathcal{U}_D$ を第二量子化して考える。

Fourier 変換して $\underline{d}(\underline{n})$ であらわすと

$$\mathcal{U}_D = \text{const} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \frac{d\Omega'}{4\pi} \{ \underline{d}(\underline{n}) \cdot \underline{d}^*(\underline{n}') - 3(\hat{\underline{q}} \cdot \underline{d}(\underline{n}))(\hat{\underline{q}} \cdot \underline{d}^*(\underline{n}')) \} \quad (2.33)$$

ここに $\hat{\underline{q}} = \frac{\underline{n} - \underline{n}'}{|\underline{n} - \underline{n}'|}$ である。

もし $\underline{d}(\underline{n}) = \sum_m a_m Y_{\ell m}(\underline{n})$ の形であれば簡単化できて

$$\mathcal{U}_D = \text{const} \left(-\int \frac{d\Omega}{4\pi} \{ |\underline{d}(\underline{n})|^2 - 3|\underline{n} \cdot \underline{d}(\underline{n})|^2 \} \right), \quad (\text{const} > 0) \quad (2.34)$$

よってできるだけ $\underline{n} \perp \underline{d}(\underline{n})$ とすると安定になる。

$\mathcal{U}_D$ が存在せずハミルトニアンが回転不変ならば $\underline{d}(\underline{n})$ を $\underline{d}(\underline{n})$ を回転した状態 $\hat{R} \underline{d}(\underline{n})$, $\underline{d}(\hat{R}\underline{n})$ はエネルギー的に縮退している。 $\mathcal{U}_D$ を考えるとこの縮退が少なくとも部分的にとける。例を次に与える。

(1) ABM state

$$\underline{d}(\underline{n}) = \hat{\underline{x}}(n_x + i n_y) \quad (1)$$

回転した状態として例えば

$$\hat{R} \underline{d}(\underline{n}) = \hat{\underline{y}}(n_x + i n_y) \quad (2)$$

$$\underline{d}(\hat{R}\underline{n}) = \hat{\underline{x}}(n_y + i n_z) \quad (3)$$

があるが $\mathcal{U}_D$ を考えると③が一番安定である。 $(\because \underline{n} \perp \underline{d})$ $\hat{\underline{z}}(n_x + i n_y)$ も②と同じエネルギーをもつが外部磁場 $H(\parallel \hat{\underline{z}})$ があるときには不安定となる。^{註1)}

(2) ESP state

$$\underline{d}(\underline{n}) = \hat{\underline{z}} \times \underline{n}$$

すでに $\underline{d} \perp \underline{n}$ ゆえ回転しない方が安定。

(3) BW state

$\underline{d}(\underline{n}) = \hat{R}_0 \underline{n}$ ($\hat{R}_0 = \text{rotation of } \cos^{-1}(-1/4) \text{ around any axis}$) が安定。

この場合には回転軸の選び方についての縮退が残っている。しかし外部磁場をかけるとこの縮退もとける。^{註2)}

この章では $V(\underline{n}, \underline{n}') = V_\ell P_\ell(\cos \theta)$ と仮定してきたが一般には $V(\underline{n}, \underline{n}') = \sum_\ell V_\ell P_\ell(\cos \theta)$ であるから色々な ℓ の成分が $\hat{\Psi}(\underline{n})$ の展開の中に入ってくる可能性もある。一般には

$$\hat{\Psi}(\underline{n}) = \sum_\ell \sum_m \hat{a}_{\ell m} Y_{\ell m}(\underline{n})$$

一重項と三重項が混じることもあるかもしれない。これはまだ議論されている段階にある。多分この様な状態は不安定であろう。

註1) 外部磁場の自由エネルギーへの寄与は、磁場が弱いとき、 $-\frac{1}{2} \underline{H} \chi \underline{H}$ の形になる。 χ は (2.29) で与えられるテンソルである。したがって、外部磁場による異方性の効果は、

$$\frac{1}{2} \chi_n \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{|\underline{d}(\underline{n}) \cdot \underline{H}|^2}{|\underline{d}(\underline{n})|^2} \left[1 - \int \frac{d\epsilon}{2k_B T} \text{sech}^2 \frac{E(\underline{n})}{2k_B T} \right]$$

の形になる。つまり、なるべく $\underline{d} \perp \underline{H}$ となる方が自由エネルギーが低くなる。

註2) 磁場によって $\underline{d}(\underline{n})$ がゆがむ効果まで考えると初めてこの縮退が解ける。この効果は小さいので、安定状態はゆらぎやすい。

参 考 文 献 (第2章)

- 1) J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957)
- 2) K.A. Brueckner, T. Soda, P.W. Anderson, and P. Morel, Phys. Rev. 118, 1442 (1960)
- 3) P.W. Anderson and P. Morel, Phys. Rev. 123, 1911 (1961)
- 4) K. Yosida, Phys. Rev. 110, 769 (1958)
- 5) N.D. Mermin, preprint
- 6) R. Balian and N.R. Werthamer, Phys. Rev. 131, 1553 (1963)
- 7) N.D. Mermin and V. Ambegaokar, Proc. 24th Nobel Symposium, to be published.
- 8) G. Barton and M.A. Moore, preprint

第3章 寿命, 強結合および Fermi 液体効果

第2章ではふつうのBCS理論(弱結合理論)について述べた。本章ではBCS理論を越える効果を議論する。すなわち, 真のハミルトニアン(2.1)のうちペアリング相互作用だけをとるBCS近似以上に進んだらどうなるか, という問題を考える。この問題を完全に解くことは出来ないので, 表題に掲げた三つの効果を現象論的に取り出し以下これらについて順に述べる。(この三つの効果だけで真のハミルトニアンの性質を尽くしている訳ではないが, 今までに考察されているのはこれだけである。)

§ 3.1 寿命効果¹⁾

正常 Fermi 液体の Landau 準粒子は他の準粒子と衝突するため, 有限の寿命 τ をもつ。準粒子のエネルギーを ϵ , エネルギー巾を $\Gamma (\sim \hbar/\tau)$ とすると,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon \sim k_B T \text{ ならば} & \Gamma \sim T^2/\epsilon_F \\ \epsilon \gg k_B T \text{ ならば} & \Gamma \sim \epsilon^2/\epsilon_F \end{array} \right.$$

である。詳しく言うと, 相互作用 V の大きさが ϵ_F の程度であるとして, 次元解析によ