

Vector-valued Markov Decision Processes

九大理 古川長太

Part I. Finite-stage deterministic case

§1. 定義と準備

$\mathbb{R}^p$: p -dimensional Euclidean space

$K \subset \mathbb{R}^p$: convex cone with vertex at $0 \in \mathbb{R}^p$

ただし $K \ni \{0\}$ を仮定するが, $K \cap (-K) = \{0\}$ を
仮定しない。

Def 1.1 $x, y \in \mathbb{R}^p$ に対して $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$

① Def 1.1 による $\leq$ は pseudo-order である。ただし
partial-order にはならない。

Def 1.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $\Omega \neq \emptyset$ とする。

$x \in \Omega$ が Ω の maximal point である

$$\Leftrightarrow (\forall y \in \Omega)(x \leq y \rightarrow y \leq x)$$

$e(\Omega) \equiv \Omega$ の maximal point の全体

Def 1.3 $x \in \mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^p$ に對して

$$x + U \equiv \{z \mid z = x + u, u \in U\}$$

また, $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^p$ に對して

$$U + V \equiv \{z \mid z = u + v, u \in U, v \in V\}$$

Proposition 1.1 $x \in \mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^p$ に對して 次のことが成立する.

$$e((x+K) \cap U) \subset e(U)$$

Corollary 1.1 $x \in U \subset \mathbb{R}^p$ に對して

$$e((x+K) \cap U) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in e(U) \text{ s.t. } x \leq y$$

Proposition 1.2 A, B は 2つの parameter set とする.

$\{E_a : a \in A\}$ は, a は parameter とする $\mathbb{R}^p$ の subsets のある family

$\{F_{ab} : a \in A, b \in B\}$ は, (a, b) は parameter とする $\mathbb{R}^p$ の subsets のある family

各 $a \in A$, 各 $x \in \bigcup_{b \in B} F_{ab}$ に對して

$$e((x+K) \cap (\bigcup_{b \in B} F_{ab})) \neq \emptyset \quad \text{を仮定する.}$$

このとき 次の関係が成立する.

$$e(\bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in B} (E_a + F_{ab})) = e(\bigcup_{a \in A} (E_a + e(\bigcup_{b \in B} F_{ab})))$$

(証明)

$$V \equiv \bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in B} (E_a + F_{ab}), \quad W \equiv \bigcup_{a \in A} (E_a + e(\bigcup_{b \in B} F_{ab}))$$

$e(V) \subset e(W)$ を示す.

$$\forall z \in e(V), \quad \therefore z = p + q, \quad p \in E_{\hat{a}}, \quad q \in F_{\hat{a}\hat{b}} \quad \begin{array}{l} \text{for some } \hat{a} \in A \\ \text{some } \hat{b} \in B \end{array}$$

$$\text{明らかに } q \in \bigcup_{b \in B} F_{\hat{a}b}$$

$z' \in \bigcup_{b \in B} F_{\hat{a}b}$ かつ $z \leq z'$ なる z' があるとする.

$\therefore z' \in F_{\hat{a}b'}$ for some $b' \in B$

$\therefore (p + z') \in V$ かつ $z = p + z \leq p + z'$

ところが $z \in e(V)$ だから $p + z' \leq z$. $\therefore z' \leq z$

以上により $z \in e\left(\bigcup_{b \in B} F_{\hat{a}b}\right)$ が示された.

$\therefore z = p + z \in E_{\hat{a}} + e\left(\bigcup_{b \in B} F_{\hat{a}b}\right) \subset W$ $\therefore z \in W$

$w \in W$ を $z \leq w$ なる点とする.

$W \subset V$ より $w \in V$

ところが $z \in e(V)$ だから $w \leq z$

ゆえに $z \in e(W)$

次に $e(W) \subset e(V)$ を示す.

$\forall z \in e(W)$ 明らかに $z \in V$

$v \in V$, $z \leq v$ なる v があるとする.

$\therefore v = p' + z'$, $p' \in E_{\hat{a}'}$, $z' \in F_{\hat{a}'b'}$ for some $\hat{a}' \in A$
some $b' \in B$

仮定より

$$e\left((z' + K) \cap \left(\bigcup_{b \in B} F_{\hat{a}'b}\right)\right) \neq \emptyset$$

ゆえに Corollary 1.1 より

$$\exists z'' \in e\left(\bigcup_{b \in B} F_{\hat{a}'b}\right) \text{ s.t. } z' \leq z''$$

$$\bar{v} \equiv p' + z''$$

$$\therefore \bar{v} \in W \text{ かつ } v = p' + z' \leq p' + z'' = \bar{v}$$

$\leq$ の transitive law により $z \leq \bar{v}$

ところが $z \in e(W)$ だから $v \leq z$

再び transitive law により $v \leq z$

以上により $z \in e(V)$ が示された $\square$

§2. Decision process と主な結果

Def 2.1 N -stage の deterministic vector-valued Markov

decision process は 5つの要素の組 $(S, \{A_n\}_{1 \leq n \leq N}, \{T_n\}_{1 \leq n \leq N}, \{r_n\}_{1 \leq n \leq N}, d)$ で表現される。ここに

S : system の状態空間 $s \in S$ を state と呼ぶ

A_n : $S \rightarrow \mathcal{P}(A)$ への map

ただし A はある与えられた空間で, $\mathcal{P}(A)$ は A の空でない部分集合の全体を表わす。

$A_n(s)$ を, n -th stage で利用できる action の集合,

$a \in A_n(s)$ を action と呼ぶ。

$\Gamma_n \equiv \{(s, a) \mid a \in A_n(s), s \in S\}$

T_n : $\Gamma_n \rightarrow S$ への map.

$\{T_n\}_{1 \leq n \leq N}$ を system の推移法則と呼ぶ。

r_n : $\Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}^p$, n -th stage における直接利得ベクトル

d : $S \rightarrow \mathbb{R}^p$, 系終端利得ベクトル

s_1 (initial state) から出発して action $a_1, a_2, \dots, a_N$ を次々

にとり, state $s_1, s_2, \dots, s_N$ を観測し, 最後に s_{N+1} を観測して stop すると, 総利得 $\sum_{n=1}^N \gamma_n(s_n, a_n) + d(s_{N+1})$ を得る.

Def 2.2

$\pi = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ において, 各 n につき

$$f_n: S \rightarrow A \quad \text{かつ} \quad f_n(s) \in A_n(s) \quad \text{for } \forall s \in S$$

があるとき, π を (N-stage 問題に対する) policy と呼ぶ.

$\Pi \equiv$ N-stage 問題に対する policy の全体

Def 2.3

policy $\pi = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ に対して

$${}^n\pi \equiv \{f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_N\} \quad \text{とおき, これを 残りの } (N-n)\text{-}$$

stage に対する policy と呼ぶ. 特に ${}^0\pi = \pi$.

$${}^n\Pi \equiv \{{}^n\pi \mid \pi \in \Pi\}$$

Def 2.4

$${}^{N-n}\pi = \{f_{N-n+1}, f_{N-n+2}, \dots, f_N\} \quad \text{に対し} \quad (1 \leq n \leq N)$$

$$R^n({}^{N-n}\pi)_{s_{N-n+1}} \equiv \sum_{i=N-n+1}^N \gamma_i(s_i^\circ, f_i(s_i^\circ)) + d(s_{N+1}^\circ).$$

ただし

(2.1)

$$s_i^\circ = T_{i-1}(s_{i-1}^\circ, f_{i-1}(s_{i-1}^\circ)), \quad i = N-n+2, \dots, N+1$$

$$s_{N-n+1}^\circ = s_{N-n+1}.$$

$n=0$ のときは

$$R^0(s_{N+1}) \equiv d(s_{N+1})$$

(2.2)

Def 2.5

$$U^n(s_{N-m+1}) \equiv e \left[\bigcup_{N-m\pi \in N-m\pi} R^n(N-m\pi)(s_{N-m+1}) \right], \quad (1 \leq n \leq N) \quad (2.3)$$

$$U^0(s_{N+1}) \equiv R^0(s_{N+1}) \quad (2.4)$$

$U^n(s_{N-m+1})$ を簡単に $U^n(s)$ と書き, これを 残りの n -stage に対する最適利得関数と呼ぶ。

Theorem 2.1 各 n , 各 $s \in S$ に対し次のことを仮定する。

$$e \left[(R^n(N-m\pi)_{T_{N-m}(s,a)} + K) \cap \left(\bigcup_{N-m\pi \in N-m\pi} R^n(N-m\pi)_{T_{N-m}(s,a)} \right) \right] \neq \emptyset$$

for $\forall a \in A_{N-m}(s), \forall N-m\pi \in N-m\pi$.

このとき最適利得関数の列 $\{U^n\}_{1 \leq n \leq N}$ は次の再帰式をみたす。

$$U^{n+1}(s) = e \left[\bigcup_{a \in A_{N-m}(s)} \{r_{N-m}(s,a) + U^n(T_{N-m}(s,a))\} \right] \quad \text{for } s \in S, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (2.5)$$

$$U^0(s) = d(s) \quad \text{for } s \in S. \quad (2.6)$$

(証明)

(2.6) は (2.2), (2.4) より明らか。

(2.5) が $n=0$ のとき成り立つことは (2.1), (2.3), (2.6) より明らか。

$1 \leq n \leq N$ に対して,

$$\begin{aligned}
U^{n+1}(s) &= e \left[\bigcup_{N-n-1, \pi} R^{n+1}(N-n-1, \pi)_s \right] \\
&= e \left[\bigcup_{N-n-1, \pi} \{Y_{N-n}(s, f_{N-n}(s)) + R^n(N-n, \pi)_{T_{N-n}(s, f_{N-n}(s))}\} \right] \\
&= e \left[\bigcup_{a \in A_{N-n}(s)} \bigcup_{N-n, \pi} \{Y_{N-n}(s, a) + R^n(N-n, \pi)_{T_{N-n}(s, a)}\} \right]
\end{aligned}$$

上式最後の右辺に Proposition 1.2 を適用すると

$$\begin{aligned}
U^{n+1}(s) &= e \left[\bigcup_{a \in A_{N-n}(s)} \{Y_{N-n}(s, a) + e \left[\bigcup_{N-n, \pi} R^n(N-n, \pi)_{T_{N-n}(s, a)} \right]\} \right] \\
&= e \left[\bigcup_{a \in A_{N-n}(s)} \{Y_{N-n}(s, a) + U^n(T_{N-n}(s, a))\} \right]. \quad \square
\end{aligned}$$

Def 2.6

$N-n, \pi$ が 3 行りの n -stage 問題に対して, s において optimal

$$\Leftrightarrow R^n(N-n, \pi)_s \in U^n(s)$$

policy $\pi \in \Pi$ が optimal $\Leftrightarrow R^N(\pi)_s \in U^N(s)$ for $\forall s \in S$

Theorem 2.2. (Principle of Optimality)

$\pi^* = \{f_1^*, f_2^*, \dots, f_N^*\}$ を optimal policy とする. このとき

次のことが成立する.

$$R^n(N-n, \pi^*)_{s_{N-n+1}^*} \in U^n(s_{N-n+1}^*) \quad \text{for } \forall s_1 \in S, \quad n=1, 2, \dots, N$$

ただし

$$\begin{aligned}
s_j^* &= T_{j-1}(s_{j-1}^*, f_{j-1}^*(s_{j-1}^*)), \quad j=2, 3, \dots, N+1 \\
s_1^* &= s_1.
\end{aligned}$$

(optimal policy π^* の final subpolicy $N-n, \pi^*$ は, 3 行りの n -stage 問題に対して, π^* によって $(N-n)$ 番目に到達した

state s_{N-n+1}^* において optimal である。

Part II. Infinite stage stochastic case.

§3. 定義と準備

$K \subset \mathbb{R}^p$; closed convex cone with vertex at $0 \in \mathbb{R}^p$

ただし 以下では $K \cap (-K) = \{0\}$ を仮定する。

④ Def 1.1 による $\leq$ は partial-order である。

Def 3.1 infinite stage stochastic の vector-valued Markov

decision process は 5 つの組 $(S, A, (p_{ij}^a), (r_{ij}^a), \beta)$ で

表現される。ここに

$S \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$; (countable) state space

S の元を i, j 等 i を表す。

A : (general) action space

A の元を a で表す。

p_{ij}^a ; action a をとるときにより $i \rightarrow j$ に移る one-step transition probability

r_{ij}^a ; p 次元ベクトル値の直接利得関数

ただし $S \times S \times A$ 上で有界とする。

$0 < \beta < 1$, discount factor.

Def 3.2

$F: S \rightarrow A$ の map の全体からなる空間

$\pi = \{f, f, \dots\} \Rightarrow f^\infty \quad (f \in F) ; \quad (\text{stationary}) \text{ policy}$

$\Pi_s : (\text{stationary}) \text{ policy の全体からなる空間}$

$\pi \in \Pi_s$ に対し

$$I(\pi)_i \equiv E_i^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} r_n \right]$$

ただし r_n は n -th stage における直接利得関数と表す.

E_i^π は i を start したという条件の下で, π から induce

された path の空間上の確率測度に関する条件付期待値を表す operator.

Def 3.3 $\pi^* \in \Pi_s$ に対し

$$\pi^* \text{ が optimal} \Leftrightarrow (\forall \pi \in \Pi_s) (\forall i \in S) (I(\pi^*)_i \leq I(\pi)_i \rightarrow I(i)_i \leq I(\pi^*)_i)$$

Def 3.4

$M(S) \equiv S$ 上の p -dim vector-valued bounded function の全体

$f \in F$ に対し $M(S) \rightarrow M(S)$ の operator T_f を次式で定義する. ; $u \in M(S)$ に対し

$$T_f u(i) = \sum_{j=1}^p (r_{ij}^{f(i)} + \beta u(j)) f_{ij}^{f(i)}$$

$a \in A$ に対し, $f \equiv a$ なる f により定まる T_f を T_a とかく.

Def 3.5

$u, v \in M(S)$ に対し

$$u \leq v \Leftrightarrow [u(i) \leq v(i) \quad \text{for } \forall i \in S]$$

Proposition 3.1

各 $f \in F$ に対し, T_f は K -monotone である.

$$\text{i.e. } u \leq v \rightarrow T_f u \leq T_f v$$

(証明)

① $w \in M(S)$, $w(i) \in K$ for $\forall i \in S$ なら, S 上の任意の確率測度 $p = (p_1, p_2, \dots)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\infty} w(i) p_i \in K$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^{\infty} w(i) p_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n w(i) p_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n w(i) p_i + \underbrace{0 \times (1 - \sum_{i=1}^n p_i)}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^p \text{ の原点}}} \right] \end{aligned}$$

仮定より $w(1), \dots, w(n), 0$ はすべて K の点. $\therefore K$ は convex より

上式の $[\dots] \in K$.

K は closed だから $\lim_{n \rightarrow \infty} [\dots] \in K$

ゆえに $\sum_{i=1}^{\infty} w(i) p_i \in K$. ゆえに ① が示された.

さて, $u \leq v$, $u, v \in M(S)$ とする

$$T_f v(i) - T_f u(i) = \beta \sum_{j=1}^{\infty} (v(j) - u(j)) \beta_{ij}^{f(i)}$$

$u \leq v$ より $v(j) - u(j) \in K$ for $\forall j$ だから ① により

$$\sum_{j=1}^{\infty} (v(j) - u(j)) \beta_{ij}^{f(i)} \in K$$

K は $0 \in$ 頂点とする cone だから $\beta \left(\sum_{j=1}^{\infty} (v(j) - u(j)) \beta_{ij}^{f(i)} \right) \in K$

$$\therefore T_f v(i) - T_f u(i) \in K$$

これはすべての i につき成立. $\therefore T_f u \leq T_f v$ □

Def 3.6

$\mathcal{F}(S) \equiv S$ 上で定義された, $\mathbb{R}^P$ の non-empty subset の値をとる set-valued function の全体

$U \in \mathcal{F}(S)$ に対して $\mathcal{F}(S)$ の元 $e(U)$ を次式で定義する.

$$e(U)(i) = e(U(i)) \quad \text{for } i \in S.$$

今後, 次の General Assumption を仮定する.

G.A. $\mathcal{F}(S)$ の元で恒等的に K の値をとる関数と同じ記号 K で表すことにし,

$$e\left[\left(I(f^\infty) + K\right) \cap \left(\bigcup_{a \in A} T_a I(f^\infty)\right)\right](i) \neq \emptyset \quad \text{for } \forall i \in S, \forall f \in F$$

Proposition 3.2 G.A. は次のことと同値である.

$$\left(\left(I(f^\infty) + K\right) \cap e\left(\bigcup_{a \in A} T_a I(f^\infty)\right)\right)(i) \neq \emptyset \quad \text{for } \forall i \in S, \forall f \in F$$

Def 3.7 $u \in M(S)$, $U \in \mathcal{F}(S)$ に対し

$$u \in U \Leftrightarrow [u(i) \in U(i) \quad \text{for } \forall i \in S]$$

§4 Policy improvement

Theorem 4.1

$f_0 \in F$ を任意に与え, 次の iteration により $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ を作れ. すなわち各 n につき

$$T_{f_{n+1}} I(f_n^\infty) \in \left(I(f_n^\infty) + K\right) \cap e\left[\bigcup_{a \in A} T_a I(f_n^\infty)\right], \quad (4.1)$$

なる $f_{n+1} \in F$ を選べ (G.A. と Prop. 3.2 により (4.1) の右辺は空でないから常に可能)

このとき次のことが成立つ.

$$(i) \quad I(f_0^\infty) \leq I(f_1^\infty) \leq \dots \leq I(f_n^\infty) \leq I(f_{n+1}^\infty) \leq \dots$$

(ii) ある N において

$$(I(f_N^\infty) + K) \cap e\left[\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha I(f_N^\infty)\right] = \{I(f_N^\infty)\}$$

となったら, f_0 から start する (4.1) の chain では, これ以上改良は不可能で, このとき $I(f_N^\infty)$ は

$$I(f_N^\infty) \in e\left[\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha I(f_N^\infty)\right] \quad (4.2)$$

を示す.

(証明)

$$(i) \quad T_{f_{n+1}} I(f_n^\infty) \in I(f_n^\infty) + K \quad \text{だから}$$

$$I(f_n^\infty) \leq T_{f_{n+1}} I(f_n^\infty)$$

T_f の K -単調より

$$I(f_n^\infty) \leq T_{f_{n+1}} I(f_n^\infty) \leq T_{f_{n+1}}^2 I(f_n^\infty) \leq \dots$$

V の有界性より $\mathbb{R}^p$ のある点, ω があって

$$T_{f_{n+1}}^m I(f_n^\infty) \leq \omega \quad \text{for } \forall m$$

すなわち $\{T_{f_{n+1}}^m I(f_n^\infty)\}_{m=1,2,\dots}$ は $\leq$ の意味で上に有界な単調列である. 仮定により K は $\mathbb{R}^p$ における regular cone

だから $\{T_{f_{n+1}}^m I(f_n^\infty)\}_{m=1,2,\dots}$ は $\mathbb{R}^p$ のある点 Q_i に i ごとく収束して, このとき $I(f_n^\infty)(\omega) \leq Q_i \quad \forall i \in S$ となる.

一方, $\{T_{f_{n+1}}^m I(f_n^\infty)(\omega)\}_{m=1,2,\dots}$ の p -ベクトルの成分ごとの収束を考えるとことにより, $Q_i = I(f_{n+1}^\infty)(\omega)$ が示され,

したがって $I(f_n^\infty)(i) \leq I(f_{n+1}^\infty)(i) \quad \forall i$ となる.

$$\therefore I(f_n^\infty) \leq I(f_{n+1}^\infty)$$

(ii) 容易

§5 optimal policy の特徴づけ.

Def 5.1 $u \in M(S)$ に $\mathcal{F}(S)$ の元 $e(\bigcup_{a \in A} T_a u)$ を対応させる map を Φ で表す. すなわち

$$\Phi u = e\left(\bigcup_{a \in A} T_a u\right)$$

$$\therefore \Phi : M(S) \rightarrow \mathcal{F}(S)$$

Def 5.2 $u \in M(S)$ に対して

$$u \text{ が } \Phi \text{ の fixed point である} \Leftrightarrow u \in \Phi u$$

$$(i.e., u(i) \in (\Phi u)(i) \quad \forall i \in S)$$

Def 5.3 $\Phi \neq U \subset M(S)$ とする.

$u \in U$ が U の maximal element である

$$\Leftrightarrow (\forall v \in U)(\forall i \in S)(u(i) \leq v(i) \rightarrow v(i) \leq u(i))$$

Theorem 5.1

$f^{*\infty}$ が optimal なら $I(f^{*\infty})$ は Φ の maximal fixed point である.

(証明)

(i) $I(f^{*\infty})$ が Φ の fixed point であることを.

いさげ意に fix せよ.

$$V_{i_0} = \bigcup_{a \in A} T_a I(f^{*\infty})_{(i_0)}$$

明らかに $I(f^{*\infty})_{(i_0)} \in V_{i_0}$.

$I(f^{*\infty})_{(i_0)} \leq p$ なる $p \in V_{i_0}$ があるとする.

$$\therefore p = T_{\hat{a}} I(f^{*\infty})_{(i_0)} \quad \text{for some } \hat{a} \in A$$

$$\hat{f} \in \quad \hat{f}(i) = \begin{cases} \hat{a} & \text{for } i=i_0 \\ f^*(i) & \text{for } i \neq i_0 \end{cases}$$

で定義すると

$$I(f^{*\infty}) \leq T_{\hat{f}} I(f^{*\infty})$$

$$\text{かつ} \quad T_{\hat{f}} I(f^{*\infty})_{(i_0)} = T_{\hat{a}} I(f^{*\infty})_{(i_0)} = p$$

$$\therefore I(f^{*\infty}) \leq T_{\hat{f}} I(f^{*\infty}) \leq T_{\hat{f}}^2 I(f^{*\infty}) \leq \dots \nearrow I(\hat{f}^{\infty}) \quad (5.1)$$

$f^{*\infty}$ は optimal T_0 から (5.1) より

$$I(\hat{f}^{\infty}) \leq I(f^{*\infty}) \quad (5.2)$$

(5.1), (5.2) より

$$I(f^{*\infty}) = T_{\hat{f}} I(f^{*\infty})$$

ゆえに $f^{*\infty}$ は i_0 において

$$I(f^{*\infty})_{(i_0)} = T_{\hat{f}} I(f^{*\infty})_{(i_0)} = p$$

以上により $I(f^{*\infty})_{(i_0)} \in e(V_{i_0})$

これはすべての i_0 において成立.

$$\therefore I(f^{*\infty}) \in e\left[\bigcup_{a \in A} T_a I(f^{*\infty})\right]$$

$$\therefore I(f^{*\infty}) \in \Phi I(f^{*\infty})$$

(ii) $I(f^{*\infty})$ が Φ の maximal fixed pt. なること.

$u \in \Phi$ の任意の fixed point とする

$$\therefore u(i) \in \bigcup_{a \in A} T_a u(i) \quad \forall i$$

$$\therefore u(i) = T_{a_i} u(i) \quad \text{for some } a_i, \text{ for each } i$$

$$i \mapsto a_i \text{ is a map } \hat{f} \text{ とおくと}$$

$$u = T_{\hat{f}} u$$

$$\therefore u = I(\hat{f}^\infty) \quad (5.3)$$

いま, ある i において $I(f^{*\infty})(i) \leq u(i)$ と仮定する

$$(5.3) \text{ より } I(f^{*\infty})(i) \leq I(\hat{f}^\infty)(i)$$

$f^{*\infty}$ は optimal 点から定義により

$$I(\hat{f}^\infty)(i) \leq I(f^{*\infty})(i)$$

$$\therefore u(i) \leq I(f^{*\infty})(i)$$

ゆえに $I(f^{*\infty})$ は Φ の maximal fixed point. □

Def 5.4

$\tau_P \equiv M(S)$ における point-wise convergence の topology

$$\Omega \equiv \{I(f^\infty) ; f \in F\} \subset M(S)$$

Assumption C Ω is a closed subset of $(M(S), \tau_P)$

Lemma 5.1 Assumption C の下では Ω は Def 3.5 で導入した partial-order $\leq$ に関する inductively ordered set である.

Theorem 5.2 Assumption C を仮定する. このとき,

$I(f^{*\infty})$ が Φ の maximal fixed point ならば, $f^{*\infty}$ は optimal である.

(証明)

$I(f^{\infty})$ が Φ の maximal fixed pt. であるとする.

ある i において

$$I(f^{\infty})(i) \leq I(g^{\infty})(i) \quad (5.4)$$

なる $g \in F$ があるとする.

$$\Omega^g \equiv \{ I(f^{\infty}) \in \Omega ; I(g^{\infty}) \leq I(f^{\infty}) \}$$

Lemma 5.1 と同様にして Ω^g は inductively ordered set であることが示される. Ω^g の $\leq$ に関する極大元の 1 つを

$I(\bar{g}^{\infty})$ とする.

$$\therefore I(g^{\infty}) \leq I(\bar{g}^{\infty}) \quad (5.5)$$

②: $I(\bar{g}^{\infty})$ は Φ の fixed point である.

③: $I(\bar{g}^{\infty})$ が Φ の fixed point でありとする.

$\therefore$ ある i_0 において

$$I(\bar{g}^{\infty})(i_0) \notin e\left(\bigcup_{a \in A} T_a I(\bar{g}^{\infty})(i_0)\right)$$

G.A. により

$$\exists p_{i_0} \in e\left(\bigcup_{a \in A} T_a I(\bar{g}^{\infty})(i_0)\right) \text{ s.t. } I(\bar{g}^{\infty})(i_0) \leq p_{i_0}$$

明らかに $p_{i_0} \neq I(\bar{g}^{\infty})(i_0)$ である.

$$p_{i_0} = T_{a_{i_0}} I(\bar{g}^{\infty})(i_0) \quad \text{for some } a_{i_0} \in A \quad (5.6)$$

$$\bar{S} \equiv \{ i \in S ; I(\bar{g}^{\infty})(i) \notin e\left(\bigcup_{a \in A} T_a I(\bar{g}^{\infty})(i)\right) \}$$

$i_0 \in \bar{S}$ の各 i_0 に対して (5.6) のように a_{i_0} を定めよ.

$\hat{f}$ を次のように定める.

$$\hat{f}(i) = \begin{cases} a_i & \text{for } i \in \bar{S} \\ \bar{g}(i) & \text{for } i \notin \bar{S} \end{cases}$$

$$\therefore I(\bar{g}^\infty)(i) \leq T_{\hat{f}} I(\bar{g}^\infty)(i) \quad \forall i$$

$$\therefore I(\bar{g}^\infty) \leq T_{\hat{f}} I(\bar{g}^\infty) \quad (5.7)$$

$i_0 \in \bar{S}$ においては $p_{i_0} = T_{a_{i_0}} I(\bar{g}^\infty)(i_0) \neq I(\bar{g}^\infty)(i_0)$ だから

$$I(\bar{g}^\infty) \neq T_{\hat{f}} I(\bar{g}^\infty) \quad (5.8)$$

(5.7) より 帰納的に

$$I(\bar{g}^\infty) \leq T_{\hat{f}} I(\bar{g}^\infty) \leq T_{\hat{f}}^2 I(\bar{g}^\infty) \leq \dots \nearrow I(\hat{f}^\infty) \quad (5.9)$$

しかるに $I(\bar{g}^\infty)$ は Φ に属する 極大元 だから (5.9) より

$$I(\bar{g}^\infty) = I(\hat{f}^\infty)$$

ゆえに (5.9) より $I(\bar{g}^\infty) = T_{\hat{f}} I(\bar{g}^\infty)$ となりこれは (5.8)

に反する. 以上により $I(\bar{g}^\infty)$ は Φ の fixed point である.

次に (5.4) でとられた i において (5.4) (5.5) より

$$I(f^{*\infty})(i) \leq I(g^\infty)(i) \leq I(\bar{g}^\infty)(i) \quad (5.10)$$

ところが $I(\bar{g}^\infty)$ は Φ の fixed point であり, 仮定により

$I(f^{*\infty})$ は Φ の maximal fixed point だから (5.10) より

$$I(f^{*\infty})(i) = I(\bar{g}^\infty)(i)$$

ゆえに $f^{*\infty}$ は optimal

□

Theorem 5.3

- (i) A : compact metric space
- (ii) 各 i に対し, γ_{ij}^a は j につき一様に a に関して連続
- (iii) 各 i に対し, $\{\gamma_{ij}^a\}_{j=1,2,\dots}$ は S 上の probability measure として weak topology の意味で a に関して連続

$\Rightarrow$

Assumption C 成立.

(証明は長くなるので省略する)

Note 1 S, A がともに finite set なら Thm 5.3 における

(i), (ii), (iii) 及び general assumption G.A. はすべてみたされる. すなわち本論文における必要な仮定はすべてみたされる.

Note 2 Thm 4.1 における (4.2) は, $I(f_N^{\otimes})$ が Φ の fixed point であることを示している.