

多自由度における誘導現象と粒子数依存性

早大・理工 山本 賢史, 相沢 洋二

保存系では、相空間がトーラスとカオスからなるタペストリーであるが、それらの境界つまり、トーラスのごく近傍のカオス領域にはじめに入りこんだ軌道は、

$$T \sim \exp(\varepsilon^{-b}) \quad (\varepsilon : \text{摂動}, b : \text{正定数})$$

の時間 T がくるまでその領域の外へ出ていかない。Nekhoroshev の定理として知られているこの理論では、自由度にかかわらずこのようなゆっくりした運動 (Arnold 拡散) があることを述べている。そして、この定理と手を組んだ自由度パラメータが系に及ぼす影響を調べることは、多自由度系の KAM の問題も含めて、統計力学にとって基礎的な意味のあることである。

今回の研究会では、多粒子系の格子振動の誘導現象が Arnold 拡散であることを計算機実験で確認した結果を報告した。

ここでいう誘導現象とは、格子振動の初期モードエネルギーが、ある時間 (誘導時間) を境に他のモードへ急に分配されだすことをいい、非平衡状態が熱平衡へ達するときの一般的な過程と考えられる (図 1)。結局、今回は、粒子数をふやしても誘導時間前の擬周期的な運動が Arnold 拡散であることを数値的に確かめようとした。また、粗いやり方であるが、指数 b の粒子数依存性もしらべてみた。

モデルは、つぎの非線形格子振動マップ (1 次元 CHAIN) で、

$$X_{n+1}^i - 2X_n^i + X_{n-1}^i = K (X_n^{i+1} - 2X_n^i + X_n^{i-1}) + \mu [(X_n^{i+1} - X_n^i)^3 + (X_n^i - X_n^{i-1})^3]$$

$$(n : \text{時間}, i : \text{粒子番号} (i = 1, \dots, N))$$

$$(X_n^0 = X_n^{N+1} = 0)$$

そして、変換

$$X_n^i = \sqrt{2/(N+1)} \sum_{j=1}^N Q_n^j \sin [\pi i j / (N+1)]$$

で normal mode の座標 Q に書きなおすと、エネルギーは、

$$E_n^j = (Q_{n+1}^j - Q_n^j)^2 + \omega_j^2 Q_{n+1}^j Q_n^j \quad (\omega_j^2 = 4K \sin^2 [\pi j / 2(N+1)])$$

と表される。

誘導時間は、初期エネルギーが初めて半減したときの時間として計算し、Arnold拡散を特徴づけるつぎの3つの理論的な結果が誘導現象にあてはまることを計算機実験で確かめることを試みた。

① 淀み時間 T は Nekhoroshev の評価に従う。 $\therefore T \sim \varepsilon^{-a} \exp(\varepsilon^{-b})$

② T の分布は、 $P(T) \sim T^{-1} (\log T)^{-1}$

③ 淀み運動のパワースペクトルは、 $S_x(f) \sim f^{-2} \quad (f \ll 1)$

$$\text{変数 } X = \ln [E_1(t) / E_1(0)]$$

①～③のうち、②については、 $N=10$ の場合を計算したが、計算時間がかかりすぎてデータの数がそろわず確かめることはできなかった。プログラムや計算の方法をもっと工夫することが今後の問題となる。

①でもこの影響を蒙ったが、 $N=3, 5, 10, 20$ のときのデータ ($4 \times 10^4 < T < 1 \times 10^6$) を Nekhoroshev の評価に just fit させることができた (図2)。また、指数 b の N 依存性は数値的にはっきりと捉えることができなかった。これを正確にやるには、 T のオーダー、 b の決め方やモデル自身に由来する理論的背景にシリアスにならねばならないだろう。

③は、 $N=10, 50, 100, 200$ のどの場合も、淀み運動が起こるような十分小さい μ をえらべば、 f^{-2} スペクトルが得られた。(図3)

以上の結果より、データ不足が説得力を欠くひとつの原因をつくっているが、得られたわずかのデータから、粒子数によらずに誘導現象が Arnold 拡散であることが数値的に予想される。また、統計力学の見方からすれば、今回のように各粒子数の系を独立にみるのではなく、それらを縦断貫通した変化をみることが重要であるが、今後の課題としたい。

参考文献：

- 1) H. Hirooka and N. Saito, J. Phys. Soc. Jpn. 26 (1969), 624
- 2) N. Saito, N. Ooyama, Y. Aizawa and H. Hirooka, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 45 (1970), 209
- 3) N. N. Nekhoroshev, Russ. Math. Surveys 32 (1977), 1
- 4) Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota and K. Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 98 (1989), 36

