

純情用型特異点の分類と構成

筑波大 渡辺公夫 (Kimio Watanabe)

都立大 石井志保子 (Shihoko Ishii)

完備代数多様体と小平次元で分類した(しつゝある?)
ように、正規孤立特異点もそのようなやり方で分類できる
か ということと発表点とする。

本論では (X, x) を解析空間上の正規孤立特異点の芽と
する。その次元は常に n という記号を用いて表わす。
また上記の X は、十分小さい x の Stein 近傍をも表わす。
 $f: \hat{X} \rightarrow X$ を特異点 (X, x) の resolution とすると、 (X, x)
の幾何種数 $p_g(X, x)$ と $\dim_{\mathbb{C}} R^{n-1} f_* \mathcal{O}_{\hat{X}, x}$ で定義し、これの多
重化として、渡辺([14])は多重種数 $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ を導入した。

特異点 (X, x) が quasi-Gorenstein のとき [14] により
次のいふものが成立することがわかった。

$$(i) \delta_m(X, x) = 0 \quad \text{for } m \geq 1$$

$$(ii) \delta_m(X, x) = 1 \quad \text{for } m \geq 1$$

(iii) $\delta_m(X, x)$ は変数 m に関して n 位の order で増大する。

ここで (X, x) が有理的であることと (i) が成立することとは同値である。

(ii) が成立するような特異点 (X, x) を純情円型と呼ぶことにする ($P_2(X, x) = \delta_1(X, x) = 1$ からもちろん情円型)。

$n=2$ のとき、純情円型特異点とは、simple elliptic 又は cusp であることが知られており、それぞれに美しい理論がある。

ここでは $n \geq 3$ とし、純情円型特異点を調べることにする。

§1 では、Du Bois 特異点の概念を紹介する。正規孤立特異点 (X, x) に対し、Du Bois であることと、canonical map $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}, x} \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ が $\forall i > 0$ に対して同型になることと同値になる、ただし $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は good resolution (cf. Def. 1) であり、 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ 。

§2 では、 (X, x) が quasi-Gorenstein のとき、Du Bois であることと、 $\delta_m(X, x) \leq 1$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) は同値であることとを示す。

さらに good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ に対し、 $f^{-1}(x)_{\text{red}} = E$ を irreducible components E_i ($i=1, \dots, r$) に分解し、 $K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum m_i E_i$ と表わし、 $\mathbb{Z}$ とするに、上の (i)(ii)(iii) はそれぞれ m_i と同値。

$$(i) \Leftrightarrow m_i \geq 0 \quad \text{for } \forall i$$

$$(ii) \Leftrightarrow m_i \geq -1 \quad \text{for } \forall i, \quad m_i = -1 \quad \text{for } \exists i$$

$$(iii) \Leftrightarrow m_i \leq -2 \quad \text{for } \exists i$$

§3 では、quasi-Gorenstein 特異点の good resolution について基本的な事柄を準備する。

§4 では、純情円型特異点と n 個の型に分類し、その good resolution を調べる。

§5 では、 $n-2$ の次元で、それぞれの型と持つ純情円型孤立特異点を構成する。

Def. 1. resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が good resolution であるとは、 $E = f^{-1}(0)_{\text{red}}$ が simple normal crossings divisor になること、つまり、

Def. 2. partial resolution $f: \hat{X} \rightarrow X$ ([7]) が good partial resolution であるとは、 $E = f^{-1}(0)_{\text{red}}$ が pure dim. $n-1$ と持つ variety with simple normal crossings のことである。

§1. Du Bois 特異点達

この § では、Du Bois が導入し、Steinbrink が命名した Du Bois 特異点の概念を紹介する。

Prop. 1.1 (Du Bois [3]) 任意の $\mathbb{C}$ 上の algebraic variety V 上

にフィルタ-付き. analytic quasi-coherent sheaves の complex $(\underline{\Omega}_V^i, F)$ に次を満すものが存在する. (= $\mathbb{Z}$ -filtration F は decreasing) 且 $\mathbb{Z}$ 値のフィルタ-付き derived category の中で unique である.

(1) $d: \underline{\Omega}_V^i \rightarrow \underline{\Omega}_V^{i+1}$ は first order differential operator 且 $\text{Gr}_F \underline{\Omega}_V^i$ への induced map は $\mathcal{O}_V$ -linear;

(2) $\underline{\Omega}_V^i$ は constant sheaf $\mathbb{C}$ の resolution であり, $\text{Gr}_F \underline{\Omega}_V^i$ の cohomology sheaves は coherent である;

(3) filtered complex の natural morphism

$$\rho: (\underline{\Omega}_V^i, \sigma) \rightarrow (\underline{\Omega}_V^i, F)$$

が存在する. $T = T^* \underline{\Omega}_V^i$ は De Rham complex. σ は "stupid filtration" である. 特異点 V は smooth であるとす. ρ は quasi-isomorphism となる.

(4) V は complete であるとす. $(\underline{\Omega}_V^i, F)$ の hypercohomology の spectral sequences は E_1 で退化し. $H^k(V, \mathbb{C})$ 上の limit filtration は Deligne の Hodge filtration と一致する.

(5) $f: \tilde{X} \rightarrow X$ $\mathbb{C}$ 上 finite type の scheme への morphism であり, X の subscheme Y の外側では同型となる. $\tilde{Y}$ は Y の逆像となる. $f': \tilde{Y} \rightarrow Y$ は f の $\tilde{Y}$ への制限となると. filtered derived category の中で. 次の triangle が存在.

$$0 \rightarrow \underline{\Omega}_X \rightarrow \underline{\Omega}_Y \oplus Rf_* \underline{\Omega}_X \rightarrow Rf_* \underline{\Omega}_Y \rightarrow 0.$$

Def. 1.2. 特異点 (X, x) が Du Bois.

$\Leftrightarrow$ p から induce される natural map $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \text{Gr}_F^0 \underline{\Omega}_{X,x}$
def が quasi-isomorphism

代数多様体 X が Du Bois

$\Leftrightarrow$ X のすべての点 x が Du Bois
def

以後 $\text{Gr}_F^0 \underline{\Omega}_X$ を単に $\underline{\Omega}_X^0$ と表わそう ([11] の書き方に従って)

Prop. 1.3. D は complete algebraic scheme over $\mathbb{C}$ で
 高々 normal crossing singularities しか持たないとき.
 $\text{Gr}_F^0 H^i(D, \mathbb{C}) \cong H^i(D, \mathcal{O}_D)$ であり F は Deligne の
 Hodge filtration である。

[証明] [3] により D は Du Bois variety。更に D は complete
 T から Prop 1.1 の (4) を用いておける。

Prop. 1.4. X は variety S は reduced closed subscheme とする。
 S が Du Bois であると仮定する。今 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が
 S の外側と同型 $\tilde{X}$ も $\tilde{S} = f^{-1}(S)_{\text{red}}$ も Du Bois 12

たゞよふにとる. $f: \hat{S} \rightarrow S$ は f の $\hat{S}$ への制限である.

$\Rightarrow$ (i) 可なり. もし X が Du Bois ならば canonical map

$\varphi_i: R^i f_* \mathcal{O}_{\hat{X}} \rightarrow R^i f'_* \mathcal{O}_{\hat{S}}$ は 任意の $i > 0$ について同型.

(ii) 特に X が normal ならば X が Du Bois であること

φ_i が 任意の $i > 0$ について同型になり, $\mathcal{O}_{\hat{S}} \rightarrow f'_* \mathcal{O}_{\hat{S}}$ が同型になること同値.

[証明] Prop. 1.1 の (5) を morphism f について応用する.

$\hat{X}$ も $\hat{S}$ も S も Du Bois であるから 次の long exact sequence ^{の項は}

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{H}^0 \underline{\Omega}_X^0 \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\hat{X}} \oplus \mathcal{O}_S \rightarrow f'_* \mathcal{O}_{\hat{S}} \\ &\rightarrow \mathcal{H}^1 \underline{\Omega}_X^0 \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_{\hat{X}} \longrightarrow R^1 f'_* \mathcal{O}_{\hat{S}} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \mathcal{H}^i \underline{\Omega}_X^0 \rightarrow R^i f_* \mathcal{O}_{\hat{X}} \longrightarrow R^i f'_* \mathcal{O}_{\hat{S}} \end{aligned}$$

定義より, X が Du Bois であることと $\mathcal{H}^0 \underline{\Omega}_X^0 \simeq \mathcal{O}_X, \mathcal{H}^i \underline{\Omega}_X^0 = 0$ ($i > 0$) は同値であるから, (i)(ii) は同値である.

Cor. 1.5 (Steinbrink [11]) 正規孤立特異点 (X, x) について.

(X, x) が Du Bois $\Leftrightarrow (R^i f_* \mathcal{O}_{\hat{X}})_x \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ は同型 ($i > 0$)

ただし $f: \hat{X} \rightarrow X$ は good partial resol.

で $\hat{X}$ が Du Bois, $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$.

[証明] E は正規交差点から [3] により Du Bois である。そこで Prop. 1.4. を使えばよい。

Prop. 1.6. (Steinbrink [11]) (X, x) を正規孤立特異点, $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を good resolution, $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ とする。

このとき natural map $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ ($i > 0$) は surjective である。

[証明] canonical maps に f^* diagram を用いる。

$$\begin{array}{ccc} H^i(\tilde{X}, \mathbb{C}) & \xrightarrow[\beta]{\sim} & H^i(E, \mathbb{C}) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \delta \\ H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \xrightarrow{\gamma} & H^i(E, \mathcal{O}_E) \end{array}$$

$\tilde{X}$ は E に deformation retract である。 β は同型。 E は Du Bois であるから $H^i(E, \mathcal{O}_E) \cong \text{Gr}_F^0 H^i(E)$ である。 δ は surjective。 f^* と γ は surjective であるから α は surjective である。

Cor. 1.7. 孤立特異点 x が rational ならば Du Bois である。

[証明] rational singularity は normal である。 Cor. 1.5 が適用できる。任意の $i > 0$ に対して surjection $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ は $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = 0$ であると同型になる。

一般に特異点 (X, x) (孤立とは限らない) が rational であること $Rf_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_X$ in derived category と定義する。
 ことに $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は 特異点達の resolution,
 Steenbrink は conjecture とし, 「 $\forall$ 上の rational singularity は Du Bois?」を [11] において挙げている。筆者はこれに
 対する完全な答えを知らない, そこで後に §5 で用いる, 肯定的
 な例をここで1つ挙げておく。

Example 1.8. $\mathbb{C}^n$ の中で, 方程式 $z_1 z_2 - z_3 \cdots z_k = 0$ ($3 \leq k \leq n$)
 で定義される多様体の特異点達は, $\forall$ 上で, Du Bois である。
 実際, rational になることは, 知られている (例は [13])。
 上記の多様体を X とする $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を [13] で構成される
 resolution とすると, canonical map $Rf_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow Rf'_* \mathcal{O}_E$ は,
 両方 $\mathcal{O}$ の α で同型, また $\mathcal{O}_S \rightarrow f'_* \mathcal{O}_E$ も同型だから, Prop 1.4
 より X は Du Bois.

§2. 多重種数と Du Bois' 条件.

この § においては (X, x) は $\forall$ 上で n 次元 ($n \geq 2$) 正規
 孤立特異点とする。

Def 2.1 ([14]) (X, x) に対し, 多重指数 $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ は次の様に定義する。

$$\delta_m(X, x) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X - \{x\}, \mathcal{O}(mK)) / L^{2/m}(X - \{x\}).$$

$L^{2/m}(X - \{x\})$ は $X - \{x\}$ 上の $L^{2/m}$ -可積分な m 重の holomorphic n -form の集合。

Prop. 2.2 ([14]) $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は特異点 (X, x) の good resolution とする。例にお, $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ と書く。

$$\delta_m(X, x) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}})) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m+1)E))$$

Def. 特異点 (X, x) が Gorenstein 特異点であるとは, $\mathcal{O}_{X, x}$ が Gorenstein 環になることと云う。

ここより (X, x) が Gorenstein 特異点になることは, (1) ω_X が invertible であるか (2) $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ ($0 < i < n-1$) が任意の resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ について成立することと同値である。

Def. (X, x) が quasi-Gorenstein 特異点であるとは, ω_X が invertible になることと云う。

Theorem 2.3. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は quasi-Gorenstein 特異点 (X, x) の good resolution とする。 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ とし $E = \sum E_i$

と、既約成分に分解してよく、可子と次の三条件は同値である。

- (i) $\delta_m(X, x) \leq 1$ for any $m \in \mathbb{N}$
- (ii) (X, x) は Du Bois である。
- (iii) $K_{\hat{X}} = f^* K_X + \sum m_i E_i$ である $m_i \geq -1$ for $\forall i$

証明は2つの部分に分けて行う。

Lemma 3.2.1 定理の仮定の下で次の三条件は同値。

- (i) $\delta_m(X, x) \leq 1$ for any $m \in \mathbb{N}$
- (ii)' $H^{n-1}(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \simeq H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ isomorphic
- (iii) $K_{\hat{X}} = f^* K_X + \sum m_i E_i$ である $m_i \geq -1$ for $\forall i$

[Lemmaの証明] (ii)' $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii)' の順で証明しよう。

(ii)' が成立しているとまず仮定する。等式；

$$(1) \quad \Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}} + E)) = \Gamma(\hat{X} - E, \mathcal{O}(K_{\hat{X}}))$$

が成立することを示そう。 $\subset$ は明らかである。より、

$$(2) \quad \dim \frac{\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}} + E))}{\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}}))} \leq \dim \frac{\Gamma(\hat{X} - E, \mathcal{O}(K_{\hat{X}}))}{\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}}))}$$

が成立する。この等号が成立することは、(1)の等号が成立することと同値であることに注意しておく。

(2)の左辺は adjunction formula と Grauert-Riemenschneiderの消滅定理 ($H^i(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}})) = 0 \quad i > 0$) を用いれば、 $h^0(E, K_E)$ に等しくなる。

これは Serre の双対定理より $h^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ と等しい.

一方 (2) の右辺は Serre の定理と Serre の双対定理を用いれば $h^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ に等しくなる. (ii)' の条件より (2) の等式が成立し、よって (1) も成立する. 必要があれば X をさらに $\dim X < 2$, $\mathcal{O}(K_X)$ が trivial になるようにとる. ω の生成元を ω と表わすと、等式 (1) の両辺に $\omega^\vee$ をかけるといふと、等式:

$$(3) \quad \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\sum (m_i + 1) E_i)) = \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

が得られる. したがって、 $m_i \geq -1$ for $\forall i$ が成立 (iii) のとき

次に (iii) を仮定しよう. あると包含関係:

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X - E)) \subset \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$$

が成立する. $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X)) = \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ であるので、上記の包含関係より, surjective map.

$$\Gamma(E, \mathcal{O}_E) = \frac{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X - E))} \longrightarrow \frac{\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))}$$

が得られる. X は normal であるから $h^0(E, \mathcal{O}_E) = 1$. したがって上の surjection より、 $1 \geq P_2(X, X)$. もし $P_2(X, X) = 0$ ならば [14] より、 $\delta_m(X, X) = 0$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) であるから (i) をみたす. $P_2(X, X) = 1$ と仮定しよう. あると、 $\tilde{X}$ 上には meromorphic n -form θ で、 E 上に 1 位の極をもつものがある.

$\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = \langle \theta \rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ をみたす. したがって

1718. $\mathbb{C}$ -vector spaces の直和。 $m > 1$ に対し $\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK))$

は $\{\theta^a g_1 \cdots g_{m-a} \mid g_i \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))\}$ で $\mathbb{C}$ 上生成される。

θ の E 上 pole の位数は 1 以下から、 $a < m$ に対し

$$\theta^a g_1 \cdots g_{m-a} \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E)). \quad \text{よ、} \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK)) \\ = \langle \theta^m \rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E)). \quad \text{Prop 2.2 より } \delta_m(X, x) = 1 \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

最後に、(i) を仮定して (iii)' を示そう。 (X, x) が rational のことより。

Cor 1.7 により Du Bois だから (iii)' は当然成り立つ。

(X, x) を 純楕円型 と仮定しよう。 E 上 pole を持つようでは、

meromorphic n -form θ をとると、仮定より

$$\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK)) = \langle \theta^m \rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK + (m-1)E)).$$

よ、 θ は E 上 order 1 の pole を持つことがわかる。

実際、 θ の E 上 pole の order を s とする。すると任意の holomorphic

n -form g に対し、 $\theta^{m-1} \cdot g \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK + (m-1)E))$ でなければならぬ。

よ、 g は少なくとも $(s-1)(m-1)$ 位の零を

E 上を持つことに出来る。 m は任意であるから、 $s=1$ で

示すことができる。

よ、 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+E)) = \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K))$ がわかる。

$$\text{よ、} h^{n-1}(E, \mathcal{O}_E) = h^0(E, K_E) = \dim \frac{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+E))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K))} = P_g(X, x) = 1$$

(よ、 Γ が、 canonical to surjective map $H_{\mathbb{C}}^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow H_{\mathbb{C}}^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$

は同型。(QED Lemma 23.1)

Lemma 2.3.1 により $(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (ii)$ が示されたので、あとは $(i), (iii) \Rightarrow (ii)$ を示せばよい。

Lemma 2.3.2. 定理の仮定の下で、 (iii) $K_X = f^* K_X + \sum m_i E_i$ ($m_i \geq -1$ for $\forall i$) が成立 (2 いうと可すると (X, X) は Du Bois.

[Lemma 2.3.2 の証明] $(iii) \Rightarrow (ii)$ $H^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ (よ、よの Lemma で証明されたことなので、 $0 < i < n-1$ に對し、

$H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ が単射であることといえは、

Prop. 1.6 により同型であることが導びかれ、Cor. 1.5 により (X, X) は Du Bois になる。 (X, X) が rational のとき、

Du Bois になることはいわゆる、2 いうので、 (X, X) を純情同型としよう。すると、 $\tilde{X} \rightarrow E \perp$ ^{nonvanishing} holomorphic $\tilde{X} \rightarrow E \perp$ で 1 位の pole をもつ n -form ω が存在するので (Lemma 2.3.1) ω をカッパ種することにより、層準同型、

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)$$

が得られ、よ、よ、無限遠点に台をもつコホモロジー群を含む可換図

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_c^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \xrightarrow{\psi_i} & H_{\omega}^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \rightarrow & H_c^{i+1}(\mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma_i & & \downarrow \\ \rightarrow H_c^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) & \xrightarrow{\mu_i} & H_{\omega}^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) & \rightarrow & H_c^{i+1}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) \end{array}$$

が成り立つ。ここで β_i は単射になる。実際、Grauert-Riemenschneider の消滅定理と Serre の双対定理より、ある n について $H_c^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ 。したがって ψ_i は $i < n-1$ について全単射、しかも ω は $\tilde{X}$ 上 $\tilde{X}-E$ では 0 にならないので、 γ_i も全単射である。よって可換式 $\gamma_i \circ \psi_i = \mu_i \circ \beta_i$ より、 β_i は単射である。

次に以下の可換図

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}} & \rightarrow & \mathcal{O}_E \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E) & \rightarrow & \mathcal{O}_E(K_E) \rightarrow 0 \end{array}$$

より、コホモロジー群の可換図

$$\begin{array}{ccccc} \rightarrow H^i(\mathcal{O}(-E)) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \xrightarrow{u_i} & H^i(\mathcal{O}_E) \\ & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \alpha_i \\ \rightarrow H^i(\mathcal{O}(K)) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}(K+E)) & \xrightarrow{v_i} & H^i(K_E) \end{array}$$

が得られる。Grauert-Riemenschneider の消滅定理より、

$i > 0$ について、 $H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K)) = 0$ 。したがって v_i は全単射である。よって可換式 $\alpha_i \circ u_i = v_i \circ \beta_i$ より、 β_i が単射であったから $v_i \circ \beta_i$ も単射、ゆえに u_i も単射となる。(QED of Lemma 2.2.)
QED of Th. 2.3)

§3. 正規弧は quasi-Gorenstein 特異点の good resolution.

この § 7 は (X, x) は常に正規弧は quasi-Gorenstein 特異点とし、 $f: \hat{X} \rightarrow X$ を good resolution とする。 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ とおき、 E の dual graph を Γ_E と表す。 simplicial complex Γ_E の i -th Betti number を $b_i(\Gamma_E)$ と表す。

Proposition 3.1. 任意の $i \geq 0$ に対し、等式:

$$b_i(\Gamma_E) = \dim_{\mathbb{C}} W_0 H^i(E)$$

が成立する。ただし W は $H^i(E, \mathbb{C})$ 上の mixed Hodge structure の weight filtration.

[証明] E は simple normal crossings であるから、mixed Hodge structure の weight filtration の定義により明らか。

Prop. 3.2. 任意の $i \geq 0$ に対し、不等式:

$$b_i(\Gamma_E) \leq \dim_{\mathbb{C}} (R^i f_* \mathcal{O}_{\hat{X}})_x$$

が成立する。ここで任意の $i > 0$ に対して等号が成立しているとすると、 (X, x) は Du Bois になる。

[証明] Prop 1.6 より、 $\dim_{\mathbb{C}} (R^i f_* \mathcal{O}_{\hat{X}})_x \geq h^i(E, \mathcal{O}_E)$ が、すべての $i > 0$ について成立する。一方で、Prop 1.3 と

Prop 3.1 により, $h^i(E, \mathcal{O}_E) = \dim_{\mathbb{A}} \mathrm{Gr}_F^0 H^i(E) \geq \dim W_0 H^i(E) = b_i(\Gamma_E)$.

この不等式 $\geq$ が等号で成り立つのは, 最初の主張が示される.

等号が成立するとき, 等号 $\dim(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = h^i(E, \mathcal{O}_E)$ が得られるので, Prop. 1.6 により, $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \simeq H^i(E, \mathcal{O}_E)$ が導かれる.

Def. 3.3. quasi-Gorenstein 特異点 (X, x) の good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ に対して, $K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum_{i \in I} m_i E_i - \sum_{j \in J} m_j E_j$; $m_i \geq 0$ ($i \in I$) $m_j > 0$ ($j \in J$) と表わされるとき,

$\sum m_j E_j$ を f の essential divisor と呼ぶ.

Remark 3.4. (X, x) が rational のとき, essential divisor は空集合, 純楕円型 のとき, essential divisor は reduced になる.

Def. 3.5. good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が essential good resolution であるとは, $K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum_{\alpha} m_{\alpha} E_{\alpha}$; $m_{\alpha} \leq 0$ と表わされることである. (=0 を許していいことに注意)

Remark 3.6. (X, x) が 2 次元の場合, essential good resolution は必ず存在することがわかっている. しかし高次

と一致する。それは正しくない。例えば、3次元の $\mathbb{C}DV$ 特異点 ([7]) は、すべての good resolution が essential 一致する。

$\tilde{X}$ は mild な特異点 (具体的に terminal 特異点) と許せば、"essential good resolution" は存在するであろうと予想される。

以下に good resolution において essential divisor がいかに本質的に "essential" な役割をこなしていることを見よう。

Prop 3.7. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は quasi-Gorenstein 特異点の good resolution とする。 E_J は f の essential divisor としよう。すると、次が成り立つ。

- (1). $D \geq E_J$ とする任意の divisor D に対し $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = p_g(X, x)$
- (2). E_J の component を含まない effective divisor D に対して $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$

[証明]. $D \geq E_J$ とする divisor D をとると E_J の定理から $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}} + D)) = \Gamma(\tilde{X} - E_J, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ 。

Grauert-Riemenschneider の消滅定理により $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{よって } p_g(X, x) &= \dim \Gamma(\tilde{X} - E_J, \mathcal{O}(K)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K)) = \dim \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+D)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K)) \\ &= \dim \Gamma(D, \mathcal{O}(K_D)) \\ &= \dim H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \quad \text{(1) の証明終り} \end{aligned}$$

次に $D \in E_J$ の component $\geq$ 全 $\subset$ 含まない effective な divisor とする。 $D' = E_J + D$ とすると D' は (1) の条件を満たす。 D の仮定により、 $E_J \cap D$ の次元は $n-2$ 以下であるから、 D の φ は 全射となる。

$$H^{n-1}(D', \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\varphi} H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \oplus H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^{n-1}(E_J \cap D, \mathcal{O})$$

E_J, D' に対して (1) の結果を用いると φ は $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ の同型になる。 かつ $H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$

Prop. 3. 8. 上の 3. 7 と同様の仮定のもとで、 $D \leq E_J$ とする。 任意の effective divisor D に対して、

$$h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \leq p_2(X, x).$$

[証明] $E_J = D + D'$ と分解しよう ($D' > 0$).

Adjunction formula を用いては次の exact sequence が得られる

$$0 \rightarrow K_D \rightarrow K_{E_J} \rightarrow K_{E_J}|_{D'} \rightarrow 0$$

E_J の定義により、 $K_{E_J} \geq 0$ 。 かつ、 global section の map

$\Gamma(E_J, K_{E_J}) \rightarrow \Gamma(D', K_{E_J}|_{D'})$ は zero map ではない

(したがって canonical injection $\Gamma(D, K_D) \rightarrow \Gamma(E_J, K_{E_J})$ は

全射にならない。 Serre の双対性より命題が得られる。

Cor. 3.9. (X, x) を純情円型 quasi-Gorenstein 特異点とし、
 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を good resolution とすると、essential divisor
 E_J は connected である。 E_J が irreducible ではないとき、
 $D \leq E_J$ とする。この任意の effective divisor D に対し、
 $H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$ とする。

[証明] $P_g(X, x) = 1$ であるから命題 3.8 より
 明らか。 E_J が irreducible ではないとし、 $E_J = D_1 + D_2$
 $(D_1, D_2 > 0)$ と分解する。 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ とすると

$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-2}(D_1 \cap D_2, \mathcal{O}_{D_1 \cap D_2}) & \rightarrow & H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) & \xrightarrow{\varphi} & H^{n-1}(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) \oplus H^{n-1}(D_2, \mathcal{O}_{D_2}) & \rightarrow & H^{n-1}(D_1 \cap D_2, \mathcal{O}) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

より φ が同型になる。先に示したことから、 $\oplus H^{n-1}(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) = 0$
 とするはずであるから、これは矛盾。

§4. 純情円型特異点の分類

$f: \tilde{X} \rightarrow X$ を純情円型特異点 (X, x) の good resolution
 とする。 E_J を f の essential divisor とする。

E_J は simple normal crossings であるから Prop. 1.3 より、

$$H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \cong \text{Gr}_F^0 H^{n-1}(E_J) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H_{n-1}^{0,i}(E_J)$$

Prop. 3.7 より $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) = \mathbb{C}$ であるから $\text{Gr}_F^0 H^{n-1}(E_J)$ は $H^{0,1}(E_J)$ と一致する。

Def. 4.1. 純情同型特異点 (X, x) が $(0, i)$ 型である ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) とは、 $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ が $(0, i)$ -Hodge component から成ることをいう。

ここで $H^{n-1}(E \otimes \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ は同型であるから $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ が $(0, i)$ -Hodge comp から成ることは $H^{n-1}(E \otimes \mathbb{C})$ が $(0, i)$ -Hodge component から成ることを同値であることに注意。

Prop. 4.2. Γ で定義した純情同型特異点 (X, x) の型は、good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ の $\tilde{X}$ に依らない。

[証明] $f_i: X_i \rightarrow X$ ($i=1, 2$) は (X, x) の good resolutions とする。 $f_i^{-1}(x)_{\text{red}} = E_i$ と置く。 birational morphism $g: X_1 \rightarrow X_2$ が存在する場合に証明すれば十分である。
 Γ で完備化することにより X_i は完備だと思えばよい。
 E_i の外側で g は同型だから、次の mixed Hodge structure の exact sequence が得られる。

Theorem の証明のために Lemma 5.1 を準備しよう (易しいので証明は省く)

Lemma 4.5. D は 1次元の 完備連結多様体で simple normal crossings であるとする. $K_D \cong \mathcal{O}_D$ とすると.

(0) $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ が $(0,0)$ -Hodge-component から成るというとき D は rational curves の cycle である.

(1) $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ が $(0,1)$ -Hodge-component から成るというとき D は irreducible elliptic curve である.

[Th 4.3 の証明] $E(r, s)$ は non-singular $(r+1)$ -fold の 完備連結な effective divisor で simple normal crossings, である.

$K_D \cong \mathcal{O}_D$, $H^r(D, \mathcal{O}_D) = \mathbb{C}$ は $(0, s)$ -Hodge-component から成るというものの全体の集合とする. E_J は $E(r-1, s)$ の元であることに注意すれば $E(r, s)$ の勝手な元 D に対し.

dual graph Γ_D が $(r-s)$ 次元であることと示せばよい.

$r=1$ には帰納法で示そう.

$r=1$ のときは Lemma 4.5 より明らか.

$r > 1$ とし $E(r-1, s)$ ($s \leq r-1$) の元 D に対し. 主張が成立しているとする. $E(r, r)$ の元は D であり irreducible であることとまず示そう.

$D \in E(r, r)$ が irreducible ではないとす。 $D = D' + D''$ と自明でない分解とす ($D', D'' > 0$)。 Mayer-Vietoris から induce される exact sequence

$$H^{r-1}(D' \wedge D'', \mathcal{O}_{D' \wedge D''}) \rightarrow H^r(D, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\psi} H^r(D', \mathcal{O}_{D'}) \oplus H^r(D'', \mathcal{O}_{D''})$$

1. $H^r(D, \mathcal{O}_D)$ は $(0, r)$ -Hodge component から成り立っている。
 $H^{r-1}(D' \wedge D'', \mathcal{O}_{D' \wedge D''})$ には、その F の component は r 以上である。
 1. したがって、 ψ は単射になる。 $\Rightarrow$ $H^r(D', \mathcal{O}_{D'}), H^r(D'', \mathcal{O}_{D''})$ は Cor 3.9 と同じ議論により、0 になるが矛盾。
 2. ψ は単射になる。 $\Rightarrow$ $H^r(D', \mathcal{O}_{D'}), H^r(D'', \mathcal{O}_{D''})$ は Cor 3.9 と同じ議論により、0 になるが矛盾。

$A < r$ と仮定しよう。 $D \in E(r, s)$ に対し $D_j \in D$ の irreducible component とし、 $D'_j = D - D_j$ とおく。
 $D'_j|_{D_j}$ は連結成分 $C_i (i=1, \dots, t)$ に分解する。 すると、adjunction formula により、 $K_{D'_j} = -\sum_{i=1}^t C_i$ かつ $K_{C_i} \cong \mathcal{O}_{C_i}$ が成り立つ。 $\Rightarrow$ Mayer-Vietoris から induce される exact sequence を考えよう。

$$H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j}) \oplus H^{r-1}(D'_j, \mathcal{O}_{D'_j}) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{i=1}^t H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \rightarrow H^r(D, \mathcal{O}_D) \rightarrow 0$$

$H^r(D, \mathcal{O}_D)$ は $(0, s)$ -Hodge-comp から成り立っているが、 $H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i})$ ($i=1, \dots, t$) の u 成分は 1 つは $(0, s)$ -type ではないからなる。
 それで $H^{r-1}(C_t, \mathcal{O}_{C_t})$ としよう。 $t=1$ の場合は、帰納法の仮定より、 $D'_j|_{D_j} = C_1$ の dual graph の次元は $r-1-\rho$ であるから D_j は Γ_D の中で、 $r-\rho$ 次元の単体の頂点と取り

それより大きい単体の頂点にはなり得ないことがわかる。

$t > 1$ としよう。 $\rho \in H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j})$ に制限した map を ρ' と表そう

$$0 \rightarrow K_{D_j} = \mathcal{O}_{D_j}(-\sum C_i) \rightarrow \mathcal{O}_{D_j} \rightarrow \mathcal{O}_{\sum C_i} \rightarrow 0$$

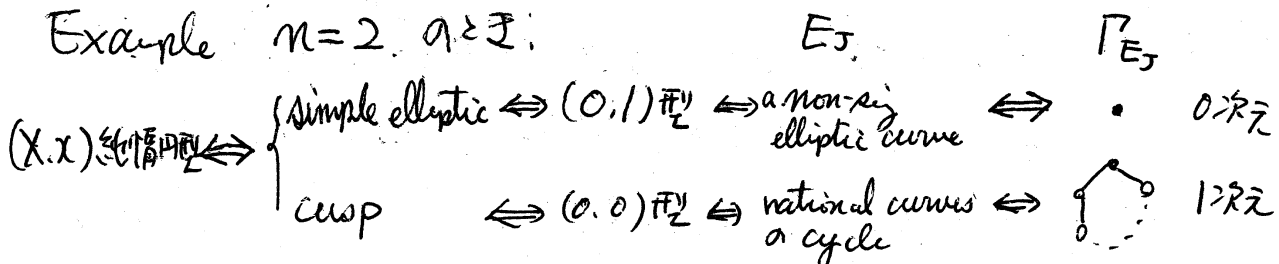
は exact sequence だ。

$$H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j}) \xrightarrow{\rho'} \bigoplus_{i=1}^t H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \rightarrow H^r(D_j, K_{D_j}) \rightarrow H^r(D_j, \mathcal{O}_{D_j})$$

$\parallel$ $\parallel$
 0 0

が導びかれるが、これにより $\text{Im } \rho'$ は $t-1$ 次元であることがわかる。 $\text{Im } \rho' \leq \text{Im } \rho$ であって、 t が ρ の次元が等しく t かつ $t=1$ のとき $\text{Im } \rho' = \text{Im } \rho$ 。 $H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j})$ は $(0, r-1)$ -Hodge-component しか持たないが $\text{Im } \rho$ も $(0, r-1)$ -Hodge-component しか持たない。 よって $H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i})$ ($i < t$) は $(0, i)$ 型、 $H^{r-1}(C_t, \mathcal{O}_{C_t})$ は前にみたように $(0, s)$ 型。 帰納法の仮定により、 $\Gamma_{C_i, i < t}$ は one point Γ_{C_t} は $(r-1-s)$ 次元になる。 よって D_j は Γ_D の中で $r-s$ 次元の単体の頂点となり、それより大きい次元の単体の頂点にはなり得ない (Q.E.D.)

Example $n=2$ のとき:



Theorem 4.6. (X, x) を 3次元 純情用型 quasi-Gorenstein 特異点. $f: \hat{X} \rightarrow X$ を essential good resolution.

E_J を f の essential divisor とする.

すると E_J (あるいは dual graph Γ_{E_J}) は 次のいずれか

型 $R^1 f_* \mathcal{O}_{\hat{X}}$	0	2	----	2g	----
0,2	$\Gamma_{E_J}: \circ$ a K3-surface	$\Gamma_{E_J}: \circ$ an Abelian surface	—	—	—
0,1	$\Gamma_{E_J}: \circ \cdots \circ$ $\circ$: rat. surface $\circ$: elliptic ruled $-$: elliptic curve	$\Gamma_{E_J}: \circ \cdots \circ$ $\circ$: elliptic ruled $-$: elliptic curve	—	—	—
0,0	$\Gamma_{E_J}: S^2$ の単体分割  $\circ$: rat surface $-$: rat curve	$\Gamma_{E_J}: T^2$ の単体分割  $\circ$: rat surface $-$: rat curve	----	Γ_{E_J} : genus g の $1-2$ 面の 単体分割 $\circ$: rat surface $-$: rat curve	----

にほし — は存在しないことを示す.

[証明] E_J は simple normal crossings で, $K_{E_J} \cong \mathcal{O}_{E_J}$ になることに注意する. E_J が irreducible のとき, 当然 (0,2) type となり, 曲面の分類論より, K3 か又は Abelian になることがわかっていて $\dim R^1 f_* \mathcal{O}_{\hat{X}} = h^1(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ になる.

その値はそれぞれ $0, 2$ となる。

E は irreducible と仮定しよう。adjunction formula より、 $K_{E_i} = -\sum_{j \neq i} E_j|_{E_i}$ 、 $C = \sum_{j \neq i} E_j|_{E_i} \in \pi_1 C$ と $K_C \cong \mathcal{O}_C$ となる。Lemma 4.5 より、 C の connected component は elliptic curve または rational curves の cycle と表わされる。[6] の p. 967 と [12] の Lemma 2 を用いる。組 (E_i, C) は次のいずれかに属する。と仮定する。

- (α) E_i : rational surface C : elliptic curve 1本
- (β) E_i : elliptic ruled surface C : elliptic curves 2本の disjoint union
- (γ) E_i : rational surface C : rational curves cycle 1本

そこで Cor 3.9 により、次の exact sequence が成り立つ

$$H^1(E_i, \mathcal{O}) \oplus H^1(\sum_{j \neq i} E_j, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^2(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \rightarrow 0$$

より、 $H^2(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \simeq (0, 1)$ -型ならば $H^1(C, \mathcal{O}_C) \simeq (0, 1)$ -型の comp を含む。これは Lemma 4.5 より (α) か (β) のいずれかに属する。以下で P_{E_j} は

(α) (β) ... (β) (α) または (β) (β) (β) (β) のいずれかに属する。

$R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = h^1(E_j, \mathcal{O}_{E_j})$ の計算は容易。

$H^2(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \simeq (0, 0)$ -型ならば $H^1(C, \mathcal{O}_C) \simeq (0, 0)$ -型の comp を含む。

ならず. Lemma 4.5 より, E_J の π^{-1} の component は (γ) の π^{-1} である. よって, P_{E_J} は boundary の π^{-1} compact surface になる. 従って, $H^2(E_J \otimes \mathcal{O}_{E_J})$ は $(0,0)$ の π^{-1} である. $W_0 H^2(E_J) \cong \mathbb{C}$ であり, $b_2(P_{E_J}) = 1$ である. Γ_{E_J} は orientable になる.

§5. 純情用型特異点の構成

この § では高次元の purely elliptic singularity の例を blow up blowdown により構成する。

Lemma 5.1. Y を normal Gorenstein variety とする. rational Du Bois 特異点しかも, π^{-1} である. $E \in Y$ の compact connected effective divisor π^{-1} simple normal crossing になる, π^{-1} である. $K_Y = -E$ と仮定する.

E が exceptional であるとする. それを contract して得る特異点 (X, x) は purely elliptic quasi-Gorenstein 特異点である.

[証明] まず $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y)) = 0$ for $i > 0$ を示そう.

$f: Y \rightarrow X$ を contraction morphism とし, $g: \tilde{X} \rightarrow Y$ を Y の singularities の resolution とする. ($\tilde{X}$ は 3-fold である.)

それは Grauert-Riemenschneider vanishing theorem を用いて

$$H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0 \quad R^i g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}) = 0 \quad (i > 0) \text{ かつ } R^0 g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}) \cong \mathcal{O}(K_Y)$$

(2.0.2) spectral sequences

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0$$

は E_2 で degenerates (2. $H^i(Y, g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0 \quad (i > 0)$ と 2.0.2.

Y は rational singularity である (1.6) かつ 2.0.1.9 (2. $g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}) = \mathcal{O}(K_Y)$).

$$\mathcal{O}(K_Y) \cong \mathcal{O}(-E) \text{ であるので } H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-E)) = 0 \quad (i > 0) \text{ かつ } H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-E)) = 0$$

$$(1.6) \text{ 2. } H^i(Y, \mathcal{O}_Y) \cong H^i(E, \mathcal{O}_E) \text{ for } i > 0.$$

5.2. Prop 1.4 より, (X, x) は non-rational ($\because H^1(E, \mathcal{O}_E) = \mathbb{C}^n$)

は Du Bois singularity である。これは quasi-Gorenstein

である (2.0.2) である。 $K_Y = -E$ であるから

$$\Gamma(Y-E, \mathcal{O}(K_Y)) \cong \Gamma(Y-E, \mathcal{O}_Y) \cong \mathbb{C} \text{ かつ } f = 1 \text{ である。}$$

$$\text{同型 } \Gamma(X-\{x\}, \mathcal{O}(K)) \cong \Gamma(X-\{x\}, \mathcal{O}) \text{ かつ } n > 2. \text{ である。}$$

より $X-\{x\} \subset \mathbb{C}^n$ non-vanishing holomorphic n -form

が存在する。

Lemma 5.2. Z は non-singular n -fold, $E_0 \subset Z$ は connected 射影的 simple normal crossing divisor かつ $K_Z = -E_0$ を満たす。 L は E_0 上の divisor かつ $L \otimes \mathcal{N}_{E_0/Z}^{-1}$ が ample になる。

$|L|$ の general member C について Σ を blow up した Y , E_0 を proper transform $\Sigma \rightarrow Y$ として Lemma 5.1 の条件を満たす。

[証明] C が general であることは、 C は E_0 の各 component 上では non-singular であり、singular points は $\Sigma \cap E_0$ である。 $\Sigma \cap E_0 = \{x_1 = \dots = x_k = 0\}$ とする。 Σ の方程式を $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ と定義し、 $x_1 = \dots = x_k = 0$ とすると、 $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ は $x_1 = \dots = x_k = 0$ 上の方程式で定義される singularity である。これは Example 1.8 により rational Du Bois である。 $E \rightarrow E_0$ は E_0 の Cartier divisors を blow up した同型になる。したがって E は simple normal crossing variety になる。また $K_Y = b^* K_\Sigma + D$ であり、 $b: Y \rightarrow \Sigma$ は C を center として blow up する。 D はその exceptional divisor であり、 D は reduced になる理由は codimension 2 である。 general である non-singular Σ の center である blow up である。したがって $K_Y = -E - D + D = -E$ 。また $N_{E/Y} \cong N_{E/\Sigma} - C$ であるから negative であり、 E は Y の中での exceptional になる ([5])。したがって Lemma 5.1 の条件は満たされる。

以下 $a \geq 2$ に対し simple normal crossing variety $\sum E_i$ $\sum$
 pure dimension $(n-1)$ の t の $\mathbb{P}^n$ non-singular n -fold $\sum$
 $K_X = -E_0$ と仮定する。このように仮定を置く。それと
 適当に center $\sum$ blow up blow down (2. 純情同型特異点
 点から構成できる $\sum$ であるから、以下具体的に構成し
 みる。

Example 5.3. $H \subset \mathbb{P}^n$ は degree $n+1$ の hypersurface
 $\sum$ degree 1 の component $n-s-1$ 個と degree $s+2$
 の irreducible component 1 個との和で simple normal
 crossing である。 $C = H \cap H_d$ とおく。 $\sum$
 H_d は general $\sum$ degree $d \geq n+2$ の hypersurface
 である。 $\mathbb{P}^n \supset H \supset C$ に対し Lemma 5.2 の条件を満たす
 ことから blow up + blow down により、純情同型特異点
 点からなる exceptional divisor の Hodge type は H の Hodge
 type と同じであるから、特異点 $\sum$ $(0, s)$ 型であることが
 わかる (これについては証明を略す。 cf. [15]) である。
 任意の $n \geq 2$ と $0 \leq s \leq n-1$ に対して n 次元 $(0, s)$ 型
 純情同型特異点 点からなる $\sum$ であることが、 $\sum$ により
 作られるものは $H^1(H, \mathcal{O}_H)$ の計算により、 $\sum$ $Gorenstein$
 には $\sum$ である。

Example 5.4 $D_1 \in \text{non-singular elliptic curve}$.
 $D_2 \in \mathbb{P}^2$ の general position にある 3 本の lines の和
 とする。 $E = D_1 \times D_2 \subset D_1 \times \mathbb{P}^2 = Z$, E は ample
 divisor. $C \sim \text{blow up blow down}$ してやると 3 次の
 の純楕円型特異点で (0,1) 型で $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ の次元が 2
 になるものが得られる。ここで D_2 は non-singular 2 degree
 の curve にとりかえてやると同じやり方で純楕円型の (0,2)
 型特異点で $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ の次元が 2 になるものが得られる。もちろん
 Abelian surface を negative line bundle a zero section として入れ
 ることに基づいて使う方法でも得られる。

(Th 4.6.2 を用いて)

これらにより E_T の各々の型に対応する 3 次の純楕円
 型特異点が存在することがいえる。

型	0	2	---	2g	---
0.2	Example 5.3	Ex 5.4	-		
0.1	Example 5.3	Ex 5.4			
0.0	Ex. 5.3	工務 [16]	-- [16] --	[16]	----- [16]

Remark 1 non-degenerate to hypersurface 特異点か?

純惰用型にたまるかどうかは、その Newton 境界が

$(1, \dots, 1)$ を通るかどうかで判定される。さらに詳しく

$(0, 1)$ 型にたまるのはどのような場合かとやはり

Newton 境界の言葉で判定できる。おもしろいと思われる。

$\{f=0\}$ で定義された純惰用型特異点 (X, x) について

(X, x) が $(0, 1)$ 型 $\iff f$ の Newton 境界で $(1, \dots, 1)$ を通る
face の次元が A 次元。

という予想があるがこれは一般には正しく open である

しかし Newton 境界が単体的複体にたっているのは

f に関し正しいことが証明されている (飯田 [17])

Remark 2 Example 5.4 と、渡辺の示した Lemma 2.3.2

以外は、石井の [15] のひきうつしである。

そのため命題等の番号がとんでしまったこととあわせて。

証明は [15] より詳しく書いておきである。

Remark 3. Th 2.3 は $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 特異点 (rK が Cartier
divisor にたまる, CM 条件は仮定しない) に対しても成立する。

REFERENCES

- 1 Deligne, P.: Théorie de Hodge II, III. Publi. Math. I.H.E.S., 40, 5-58 (1971), 44, 5-78 (1974).
- 2 Dolgachev, I.: Cohomologically insignificant degenerations of algebraic varieties. Compositio Math., 42, 279-313 (1981).
- 3 Du Bois, P.: Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière. Bull. Soc.math. France 109, 41-81 (1981).
- 4 Friedman, R.: Global smoothings of varieties with normal crossings. Annals of Math. 118, 75-114 (1983).
- 5 Grauert, H.: Über modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Annalen 146, 331-368 (1962).
- 6 Kulikov, V.: Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces. Math. USSR Izvestija 11, 957-989 (1977).
- 7 Reid, M.: Canonical 3-folds. Proc. Conf. Alg. Geom., Angers ed. A Beauville, Sjithoff and Nordhoff. (1979).
- 8 ——— : Minimal models of canonical 3-folds. Symposia in Math. 1 Kinokuniya-North Holland (1981).
- 9 Schmid, W.: Variation of Hodge structures; the singularities of

the period mapping. *Inv. Math.* 22, 211-319 (1973).

- 10 Steenbrink, J.: Cohomologically insignificant degenerations. *Compositio Math.*, 42, 315-320 (1981).
- 11 ——— : Mixed Hodge structures associated with isolated singularities. *Proc. Sym. in Pure Math.*, 40 Part 2 513-536 (1983).
- 12 Umezū, Y.: On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf. *Tokyo J. Math.* 4, 343-354 (1981).
- 13 Vieweg, E.: Rational singularities of higher dimensional schemes. *Proceedings of the A.M.S.* 63, 6-8 (1977).
- 14 Watanabe, K.: On plurigenera of normal isolated singularities I. *Math. Annalen* 250, 65-94 (1980).
- 15 Ishii, S.: On normal isolated Gorenstein singularities. preprint
16. Tsuchihashi : Higher dimensional analogues of periodic conti. fractions and cusp singularities. *Tohoku Math. J.* 35. 607-639 (1983)
17. Iida, S.: Letter to K.Watanabe.