

同変コホモロジーの小 Cartan モデルについて

(On the small Cartan model of equivariant cohomology)

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

G をコンパクトで連結な Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\Omega(M)$ を M の微分形式全体とすると, Cartan 複体とよばれる $((S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\text{inv}}, d_{\mathfrak{g}})$ は同変コホモロジーを与える. Alekseev-Meinrenken は最近のプレプリント [1] において, より “小さい” $((S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (\Omega(M))_{\text{inv}}, \tilde{d}_{\mathfrak{g}})$ が同変コホモロジーを与えることを示し, これを小 Cartan 複体とよんだ. ここで $\tilde{d}_{\mathfrak{g}}$ は小 Cartan 複体の普通の積に関して derivation にはならない. そのため Alekseev-Meinrenken は新しい積 $\odot$ を導入し, この積に関して $\tilde{d}_{\mathfrak{g}}$ が derivation になることを示した. ただし $\odot$ は結合的ではない. 本稿では $\tilde{d}_{\mathfrak{g}}, \odot$ に高次の積を加えて, 小 Cartan 複体上に A_{∞} -構造を与える.

2 $\mathfrak{g}$ -微分空間とその同変コホモロジー

$\mathfrak{g}$ を標数 0 の体 $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とする.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$ -微分空間とは次数付きベクトル空間 $\mathcal{M}$ とその微分 $d^{\mathcal{M}}$, そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする:

- $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ 0, -1,
- $[d^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi),$
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}}),$

$$- [\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0. \quad \square$$

定義 2.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とするとき

$$\mathcal{M}_{\text{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$$

とおく.

$\mathfrak{g}$ の基底を $\{e_a\}$, その双対基底を $\{e^a\}$ とする. そして以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1 \mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1 \mathfrak{g}^*$$

と書くことにする.

例 2.3. (a) G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. このとき M 上の微分形式全体 $\Omega(M)$ は G の作用の infinitesimal generator の Lie 微分, contraction を考えることにより $\mathfrak{g}$ -微分空間になる.

(b) $\wedge \mathfrak{g}^*$ において, $\iota^\wedge(\xi)$ を contraction, $L^\wedge(\xi)$ を余随伴表現, そして微分を

$$d^\wedge := \frac{1}{2} \sum_a y^a L^\wedge(e_a)$$

とすれば, $\wedge \mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ -微分空間となる. $\square$

$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴表現を $S\mathfrak{g}^*$ の derivation として拡張したものを $L^S(\xi)$ として,

$$(S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker(L^S(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^{\mathcal{M}}(\xi))$$

とする.

定義 2.4. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とする.

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}}, \quad d_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a \otimes \iota^{\mathcal{M}}(e_a)$$

を Cartan 複体とよび, そのコホモロジー $H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), d_{\mathfrak{g}})$ を $\mathcal{M}$ の同変コホモロジーの Cartan モデルとよぶ. $\square$

注意 2.5. G をコンパクトで連結な Lie 群, M を G が作用する多様体とする. このとき G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$, M 上の微分形式全体を $\Omega(M)$ とすると, $H_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$ はいわゆる同変コホモロジーと同型になる. つまり $EG \times_G M$ をホモトピー商とすると

$$H(EG \times_G M; \mathbb{R}) \cong H_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$$

が成り立つ (例えば [3] を参照). $\square$

3 小 Cartan 複体

以下 $\mathfrak{g}$ は reductive Lie 代数とする.

まず $\wedge \mathfrak{g}$ の次数を

$$(\wedge \mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i \mathfrak{g}, \quad (\wedge \mathfrak{g})^i := 0 \quad (i \geq 0)$$

と定める. また

$$\langle d^\wedge X, Y \rangle = \langle X, \partial Y \rangle, \quad X \in \wedge \mathfrak{g}^*, \quad Y \in \wedge \mathfrak{g}$$

により $\partial: \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge \mathfrak{g}$ を定める. そして $(\wedge \mathfrak{g})$ ではなく $(\wedge \mathfrak{g})[1]$ において Schouten 括弧 $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$ を考えることにより, $((\wedge \mathfrak{g})[1], \partial, [\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}})$ は次数付き微分 Lie 代数になる. ただし $(\wedge \mathfrak{g})[1]^i := (\wedge \mathfrak{g})^{i+1}$ とする.

$(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ と $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の間には非退化な pairing が存在するので, $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}, (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の積はそれぞれ $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ の余積を導く. ただし $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ は $\mathfrak{g}$ の随伴表現の不変部分空間とする. このとき $x \in (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ が primitive であるとは, Δ を $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ の余積とすると

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

をみたすこととする. $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の場合も同様にして, $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}, (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の primitive な元全体からなる次数付き部分空間をそれぞれ $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ とする. 実は $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ の間にも非退化な pairing が存在し, $\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間となる. $\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底, $\{c^j\}$ をその双対基底とする.

また $S\mathfrak{g}^*$ の次数を

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i \mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0 \quad (i \geq 0)$$

と定め, $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^S(\xi)$ とおく. “Chevalley’s transgression theorem” により c^j に対応する元を $p^j \in (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ と書くことにする (詳しくは [1] 参照).

そして $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$ を次数付き代数の準同型写像として

$$\iota: \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$$

と自然に拡張する.

定義 3.1. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とする.

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\text{inv}}, \quad \tilde{d}_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j)$$

を小 Cartan 複体とよび, そのコホモロジー $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \tilde{d}_{\mathfrak{g}})$ を $\mathcal{M}$ の同変コホモロジーの小 Cartan モデルとよぶ. $\square$

Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であると主張したが, その証明にはギャップがあることがわかっている.

これを示すためには $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ の間にコチェイン写像であり, コホモロジーの同型を導くものを構成すればよいのだが, 自然な包含写像 $i: \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を考えると

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \\ \tilde{d}_{\mathfrak{g}} \downarrow & & \downarrow d_{\mathfrak{g}} \\ \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \end{array}$$

は可換にならない.

$f = f_1 \otimes f_2 \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$ に対して

$$\iota(f)(p \otimes y) := f_1 p \otimes \iota^{\wedge}(f_2) y$$

と定めることにより $\iota(f): C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \rightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ をえる. これを用いて, ある $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$ により $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ 上で“ひねって”

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{e^{\iota(f)}} & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \\ \tilde{d}_{\mathfrak{g}} \downarrow & & \downarrow e^{-\iota(f)} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)} & & \downarrow d_{\mathfrak{g}} \\ \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{e^{\iota(f)}} & C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \end{array}$$

が可換になるようにしたい.

ここで $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ 上では, $|f|$ が偶数ならば,

$$e^{-\iota(f)} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \iota(\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge \mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a)$$

となるので, 結局

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge \mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j \quad (1)$$

をみたす $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$ が存在すればよいことがわかる. ただし $\wedge \mathfrak{g}$ の ∂ , $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$ を

$$\partial(p \otimes y) := p \otimes \partial y, \quad [p \otimes y, p' \otimes y']_{\wedge \mathfrak{g}} := pp' \otimes [y, y']_{\wedge \mathfrak{g}}$$

として $(S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$ 上に拡張した.

以上のことにより, Alekseev-Meinrenken は [1] において次のことを示した.

定理 3.2 ([1, Theorem 3.8]). $(\mathfrak{k}, \partial)$ を次数付き微分 Lie 代数であり, $i \ll 0$ または $i > 0$ ならば $\mathfrak{k}^i = 0$ であるものとする. $\mathfrak{k}$ の中心 $\mathfrak{z}$ の部分空間 $\mathfrak{l}$ であり, 次をみたすものが存在すると仮定する:

- 任意の $X \in \mathfrak{l}$ に対して $\partial X = 0$,
- 包含写像 $\mathfrak{l} \hookrightarrow \mathfrak{k}$ が擬同型.

このとき,

- (a) 任意の $X \in \mathfrak{g}_{\text{even}}$ に対して $\partial X = 0$ ならば, 方程式

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\mathfrak{k}} = X \pmod{\mathfrak{l}}$$

をみたす解 $f \in \mathfrak{k}_{\text{odd}}$ が存在する.

- (b)

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\mathfrak{k}} - X \in \mathfrak{l}$$

は f によらない. □

この定理より

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{k}^i, & \mathfrak{k}^i &= (S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge^{1-i}\mathfrak{g})_{\text{inv}}, \\ \mathfrak{l} &= \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{l}^i, & \mathfrak{l}^i &= (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (\wedge^{1-i}\mathfrak{g})_{\text{inv}}, \\ X &= - \sum_a v^a \otimes e_a \end{aligned}$$

とすると方程式 (1) の解 f の存在がわかる. ここで $\mathfrak{k}$ の次数の付け方により, $|f|$ は偶数であることを注意しておく.

定理 3.3 ([1, Theorem 4.2]). $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数, $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とする. 方程式 (1) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$ に対して

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は微分 $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群としてのホモトピー同値写像である.

つまり $H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \cong \tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が成り立つ. □

略証. $d'_{\mathfrak{g}} := e^{-\iota(f)} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)}$ とおく. また

$$h := - \sum_a L^S(e_a) \otimes \iota^{\mathcal{M}}(B^{\sharp}(e^a))$$

により $h: C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \rightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を定める. ただし $\mathfrak{g}$ 上の内積 B により定まる同型を $B^{\sharp}: \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ とした.

このとき $\mathcal{L} := [d'_{\mathfrak{g}}, h]$ とすると $\ker \mathcal{L} = \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ であることがわかる.

さらに $\Pi: C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \rightarrow \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を射影, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{L}$ の Green 作用素として, $\mathcal{H} := h\mathcal{G}$ とおくと $[d'_{\mathfrak{g}}, \mathcal{H}] = 1 - \Pi$ が成り立つ. ■

4 小 Cartan 複体上の A_∞ -構造

$\mathfrak{g}$ -微分空間 $\mathcal{M}$ が次数付き代数でもあるとき, $\tilde{d}_{\mathfrak{g}}$ は普通の積に関して一般に derivation ではない. そこで Alekseev-Meinrenken [1] は新しい積 $\odot$ を導入した.

天下りではあるが, $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g} \otimes \wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ において方程式

$$\partial u + \frac{1}{2}[u, u]_{\wedge(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})} = \sum_j p^j \otimes (\Delta(c_j) - \phi(c_j))$$

を考える. ただし $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, $\xi \mapsto (\xi, \xi)$ より導かれる写像を $\phi: \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \cong \wedge \mathfrak{g} \otimes \wedge \mathfrak{g}$ とした.

定理 3.2 より

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{k}^i, \quad \mathfrak{k}^i = \bigoplus_{s+t=1-i} (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (\wedge^s \mathfrak{g} \otimes \wedge^t \mathfrak{g})_{\text{inv}}, \\ \mathfrak{l} &= \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{l}^i, \quad \mathfrak{l}^i = \bigoplus_{s+t=1-i} (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \{(\wedge^s \mathfrak{g})_{\text{inv}} \otimes (\wedge^t \mathfrak{g})_{\text{inv}}\}, \\ X &= \sum_j p^j \otimes (\Delta(c_j) - \phi(c_j)) \end{aligned}$$

とすれば, 解 $u \in (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g} \otimes \wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}^-$ の存在がわかる.

これより, $\mathcal{M}$ の積を $\mu_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ として

$$(p \otimes y) \odot (p' \otimes y') := (1 \otimes \mu_{\mathcal{M}}) e^{\iota(u)} (pp' \otimes y \otimes y')$$

と新しい積を定義する.

このとき Alekseev-Meinrenken [1] は, 微分 $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群としての準同型写像 $H: \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \otimes \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \rightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ であり

$$e^{\iota(f)}(x \odot x') - (e^{\iota(f)}x) \cdot (e^{\iota(f)}x') = d_{\mathfrak{g}}H(x, x') + H(\tilde{d}_{\mathfrak{g}}x, x') + (-1)^{|x|}H(x, \tilde{d}_{\mathfrak{g}}x')$$

をみたすものが存在することを示した.

これより直ちに $\tilde{d}_{\mathfrak{g}}$ が $\odot$ に関して derivation であることがわかる. しかし $\odot$ は結合的ではない!

以下では $\tilde{d}_{\mathfrak{g}}$, $\odot$ に高次の積を加えて $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ 上に A_∞ -構造を与える.

定義 4.1. A_∞ -代数とは, 次数付きベクトル空間 V についての reduced テンソル余代数

$$\overline{TV}[1] := \sum_{i \geq 1} V[1]^{\otimes i}$$

と次数 1 の coderivation $b: \overline{TV}[1] \rightarrow \overline{TV}[1]$ で $b \circ b = 0$ をみたすものの組とする.

A_∞ -代数については、例えば [4] 等を参照.

reduced テンソル余代数

$$\bar{T}\tilde{C}_g(\mathcal{M})[1] := \bigoplus_{i \geq 1} \tilde{C}_g(\mathcal{M})[1]^{\otimes i}$$

の次数 1 の coderivation b を与えることは、次数 1 の写像 $b_i : \tilde{C}_g(\mathcal{M})[1]^{\otimes i} \rightarrow \tilde{C}_g(\mathcal{M})[1]$ の族を与えることと同値であり、 $\{b_i\}$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned} b_1(x) &:= (-1)^{|x|} \tilde{d}_g x, \\ b_2(x_1, x_2) &:= (-1)^{|x_1|(|x_2|+1)} x_1 \odot x_2, \\ b_3(x_1, x_2, x_3) &:= (-1)^{(|x_1|+|x_2|+1)|x_3|} \Pi e^{-\iota(f)} H(b_2(x_1, x_2), x_3) \\ &\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+|x_3|+1)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_2(x_2, x_3)) \\ &\quad + (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|+1)+|x_2||x_3|+|x_3|} \times \\ &\quad \Pi e^{-\iota(f)} \{e^{\iota(f)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, x_2) \cdot e^{\iota(f)} x_3 \\ &\quad - (-1)^{|x_1|} e^{\iota(f)} x_1 \cdot e^{\iota(f)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_2, x_3)\}, \\ b_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= (-1)^{(|x_1|+|x_2|+|x_3|)|x_4|} \Pi e^{-\iota(f)} H(b_3(x_1, x_2, x_3), x_4) \\ &\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+|x_3|+|x_4|)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_3(x_2, x_3, x_4)) \\ &\quad + (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|+|x_4|+1)+|x_2|(|x_3|+|x_4|)+|x_3|(|x_4|+1)} \times \\ &\quad \Pi e^{-\iota(f)} \{(-1)^{|x_1|+|x_2|} e^{\iota(f)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, x_2) \cdot e^{\iota(f)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_3, x_4)\}, \end{aligned}$$

そして $i \geq 5$ かつ奇数のとき

$$\begin{aligned} b_i(x_1, \dots, x_i) &:= (-1)^{(|x_1|+\dots+|x_{i-1}|+1)|x_i|} \Pi e^{-\iota(f)} H(b_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}), x_i) \\ &\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+\dots+|x_i|+1)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_{i-1}(x_2, \dots, x_i)), \end{aligned}$$

最後に $i \geq 6$ かつ偶数のとき

$$\begin{aligned} b_i(x_1, \dots, x_i) &:= (-1)^{(|x_1|+\dots+|x_{i-1}|)|x_i|} \Pi e^{-\iota(f)} H(b_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}), x_i) \\ &\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+\dots+|x_i|)} \Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_{i-1}(x_2, \dots, x_i)). \end{aligned}$$

上の $\{b_i\}$ がすべての $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{n=r+s+t, \\ u=r+1+t}} b_u(1^{\otimes r} \otimes b_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0$$

をみたすことと、 $\{b_i\}$ より次数 1 の coderivation

$$b : \bar{T}\tilde{C}_g(\mathcal{M})[1] \rightarrow \bar{T}\tilde{C}_g(\mathcal{M})[1]$$

が unique に定まることから、次が成り立つ.

定理 4.2. 上記のように b を定めると $b \circ b = 0$ が成り立つ. つまり $(\overline{TC}_g(\mathcal{M})[1], b)$ は A_∞ -代数になる. $\square$

注意 4.3. M. Franz が同様のことを主張している ([1]) が, 詳細は未発表. $\square$

参考文献

- [1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, math.DG/0406350 v2, to appear in Duke Mathematical Journal.
- [2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.
- [3] V. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.
- [4] B. Keller, *Introduction to A -infinity algebras and modules*, Homology Homotopy Appl. 3 (2001), no.1, 1–35.