

Hodge Cycles on Abelian Varieties

東京電機大学 裕 文夫

§ 1. 問題の設定.

上のアーベル多様体 A について, 次のような定義をします:

(1.1) Def すべての $n \geq 1$ について, A^n の Hodge ring (=Hodge Cycle がコホモロジ環の中ではる環) が, 因子類で生成されるとき, A は "stably non-degenerate" という.

そうすると, A が stably non-deg. ならば, A のすべての n について, Hodge 予想が成り立つわけですが, 実は, このようなアーベル多様体は, その Hodge 群

を用いて次のように特徴付けられます：

$$(1.2) \text{ Th. } A \text{ が stably non-deg.} \\ \iff \text{rank } Hg(A)_{\mathbb{C}} = \text{rdim } A.$$

ここで，“rdim”の定義は述べませんが（2年前の城崎シンポジウム講演集か，今度出る東大理学部紀要 31.3 をごらん下さい），大体， $\text{End}^0 A$ の構造によって決まる，ある種の数です。任意のアーベル多様体 A については $\text{rank } Hg(A)_{\mathbb{C}} \leq \text{rdim } A$ ですから，(1.2) は，「 A が stably non-deg. $\iff$ rank $Hg(A)_{\mathbb{C}}$ ができるだけ大きい」とあいまいに言いかえることもできます。

さて，今回問題にしたいのは，ある stably non-deg. ではない A の Hodge ring の計算です。それは，おそらく，表現空間の base をとって Hodge 群不変元を線型代数でさがす，という今までのやり方では，ぼう大なものになる類のものなのですが，それを Young 図形で，うまく処理しようという試みであります。

ここで，目標とする命題を述べておきましょう。

(1 3) Prop. アーベル多様体 A について, もし $\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(A)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_6$, $H^1(A, \mathbb{C}) \cong \wedge^3 \mathbb{C}^6$ ($\mathfrak{sl}_6$ の表現空間として), が成り立つならば,

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^{2d}(A, \mathbb{Q}) \cap H^{d,d}) = 1 \quad (1 \leq d \leq 10).$$

特に, A については, Hodge 環は, 因子類で生成される.

証明の概略は §2 で述べますが, そのまえにいくつか注意しておきます.

注意 (1) (1 3) の仮定をみたす A の存在は知られている (Ribet からの手紙による).

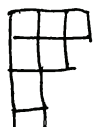
(2) A が stably non-deg. でないとすると, A^n の Hodge 環が因子類で生成されない最小の $n \geq 1$ がある. それを $i(A)$ と書くことにすると, (1. 3) の A については $i(A) = 2$. (同様の例は, 上に引用した東大の紀要をどうぞ.) 一方, CM-型の A につい

ては, 今のところこのような例は知られていない. すなわち, A が単純, CM-型, stably non-deg. ではない $\Rightarrow i(A) = 1$

§2. Young 図形.

一般論はやめて, Δl_6 に限ります (詳しくは [I] をどうぞ).

(2.1) Fact. Δl_6 のすべての既約表現は Young 図形,

(2.1.1)  とか  とか, ...

で記述できる. しかも, 行の数は 5 以下. 自明な表現は

(2.1.2) 

に対応する.

(2.1.1) の図形を (1^3) , (321^2) と, よく, 書くようになります. 従って, (2.1.2) のは (1^6) となります. ふつう

$\mathfrak{sl}_6$ の基本ウェイト $\omega_1 \sim \omega_5$ の線型結合で表わす
 流儀とは, “Young 図形の各行ごとの口の数の差 $\leftrightarrow$
 ω_i の係数” という具合に対応します。例えば, (2.1.1)
 の左の方は上から順に差が $0, 0, 1, 0, 0$ ですから
 ω_3 に対応し, 右の方は $1, 1, 0, 1, 0$ ですから,
 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_4$ に対応します。もちろん (2.1.2)
 の方は, $0, 0, 0, 0, 0$ で 0 です。従って, 目標
 とする (1.3) の表現空間 $\wedge^3 \mathbb{C}^6$ は (2.1.1) の左の
 図形に対応しているわけです。

(2.2) Fact. ω_i の係数が左右入れ換わったもの
 が, contragredient な表現に対応
 する。

たとえば $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4)^* = \omega_2 + \omega_4 + \omega_5$,
 $\omega_3^* = \omega_3$ です。

(2.2)' Fact. . . . (上の Fact の Young 図
 形版) . . .

たとえば

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}^* = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \text{ など。}$$

要するに行の数が元の長方形から与えられた図形を引けばいいのです。もちろんタテにもコナらんだらのぞくことができます。

(2.3) Fact. 表現のテンソル積をYoung図形で“かんたんに”行なうことができる。

これも例でやったほうがわかりやすいので $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$ をやります。

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \overset{\text{番号を入れる}}{=} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline & 3 & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline & 3 & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 2 & \\ \hline & 3 & \\ \hline \end{array}.$$

本当は、 $\otimes$ の右にくるのが1列とはかぎらないので、もっとむずかしいのですが、(1.3)を証明するのには要りません。(もっと詳しいことは[S]をどうぞ。ただし、この $\otimes$ のルールの証明はのっていません。)

(2.4) Fact. Young 図形を見て, その空間の次元を知ることが出来る.

これも, 例。

$$\dim \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{分子} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \\ \text{分母} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \right.$$

$$\dim \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 7 \\ \hline 5 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 1 \cdot 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{分子} \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 7 \\ \hline 5 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \\ \text{分母} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \right. \quad (\text{いわゆる hook length})$$

$$\dim \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 7 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{分子} \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 7 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\ \text{分母} \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \right.$$

(もっと詳しくは [8] をどうぞ. ただし, 証明はありません.)

(2.5) Fact. Young 図形を見て, その表現の "Index" I_2 を知ることが出来る.

求め方:

$$I_2 = \left\{ I_0 / (N^2 - 1) \right\} \cdot \left\{ (1 + N) M_{01} - \underbrace{(1/N) M_{01}^2} + M_{02} - 2 M_{11} \right\}$$

ここに, $I_0 =$ 表現の次数

$$N = 6 \quad (\Delta \ell_N \text{ の } N)$$

$$M_{nm} = \sum_{j=1}^5 j^n \cdot (\text{Young 図形の } j \text{ 行目の口の数})^m$$

もともとは, I_{2p} は $I_{2p} = \sum_{\omega \in M(R)} (\omega, \omega)^p$ ($M(R)$ は今の表現 R のウェイト空間, $(\ , \)$ は長さ, $0 \leq p \in \mathbb{Z}$), で定義される量で, それが $(2, 5)$ のように計算されるわけです。(詳しくは, $[\overset{SKK}{\curvearrowright}]$ をどうぞ。ただし, p. 2254 の式 (A9) は上の $\sim$ の部分が $(1/N^2)$ というふうになっていますから, $(2, 5)$ のようになおさなければなりません。)

さて, ようやく本題に入ることが出来ます。(1.3) は, 表現のことばで言いなおせば,

$$(2.6) \quad \text{Prop} \\ \dim_{\mathbb{C}} [\wedge^{2d} (\wedge^3 \mathbb{C}^6)]^{\Delta \ell_6} = 1 \quad (1 \leq d \leq 10)$$

ということになります。Hard Lefschetz により, $1 \leq d \leq 5$ としてもよいですから, 結局 $V = \wedge^3 \mathbb{C}^6$ とおいて, $\wedge^2 V, \wedge^4 V, \wedge^6 V, \wedge^8 V, \wedge^{10} V$ が $\Delta \ell_6$ の

自明な表現をみなしつづつしか含まないことを言えばよいわけでは。そのために以下の定義, 性質を思い出します。

(2.7) Def $\mathfrak{g}$ が Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環, $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(W)$ が $\mathfrak{g}$ のある既約表現とすると, ρ を $\mathfrak{g}$ に制限して, $\mathfrak{g}$ のいくつかの既約表現に分解する。その分解のかたを, ρ の $\mathfrak{g}$ に対する “branching rule” といい, “ $\rho \rightarrow \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$ ” などと書く。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n,$$

(2.8) Prop. (2.7) の記号のもとで, $\rho \rightarrow \bigoplus_j l_j \rho_j$ ($l_j \geq 1$) とすると,

$$(2.8.1) \quad I_0(\rho) = \sum_j l_j I_0(\rho_j),$$

$$(2.8.2) \quad I_2(\rho) = c_2 \sum_j l_j I_2(\rho_j),$$

ここに,

$$c_2 = \{I_2(\mathfrak{sl}_n \text{ の標準表現})\}^{-1}.$$

少し例を見てみましょう。

例(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{20}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_6$, ($\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ は $\Lambda^3 \mathbb{C}^6$ で与えられるものとする)

$$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(S^2 V),$$

($V =$ いっぽ $\Lambda^3 \mathbb{C}^6$, $S^2 V = V$ の 2 階

対称テンソル空間)

Young 図形でいうと,

$$\square \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$I_0 \ 210 = 175 + 35, \quad (\leftarrow (2.8.1))$$

$$I_2 \ 22 \rightarrow 120 + 12 = 22 \times 6. (\leftarrow (2.8.2))$$

例(2) $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ は上と同じ,

$$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\Lambda^2 V).$$

Young 図形では,

$$\square \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$I_0 \ 190 = 189 + 1$$

$$I_2 \ 18 \rightarrow 108 + 0 = 18 \times 6.$$

(しかし, 上の 2 つの例の branching rule は, いきなりわかるわけではありません。それは次のような手順で行います)

$$1^\circ \quad \square \otimes \square = \square \oplus \square \quad (\leftarrow (2, 3))$$

2° I_0 の計算 ($\square$ は Δl_{20} の標準表現に対応していることに注意して)

$$20 \times 20 = 210 + 190$$

$$(210 = \frac{20 \cdot 21}{2 \cdot 1}, \quad 190 = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1})$$

$$3^\circ \quad \square \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square$$

4° I_0 の計算 (この $\square$ は Δl_6 の標準表現)

$$20 \times 20 = 175 + 189 + 35 + 1$$

5° 2° と 4° を見比べて,

$$210 = 175 + 35,$$

$$190 = 189 + 1,$$

すなわち, 上の例 (1), (2) の branching rule がわかる

もちろん, branch させたい表現の $\square$ の数がふえていくと, 当然見比べるのがむずかしくなっていきます。更に, I_0 だけでは解が2つ以上でてくることもしばしばあります。その時は, 上の step 2°, 4° で I_2 も計算しておいて, (2.8) を使うとうまくいきます (少なくとも (1.3) の証明には)。

--- ここで少し脱線して, branching rule の関係の文献についてご紹介します。(きっと, まだまだ他にもあると思いますが, 目についたものだけ。) 大体, J. of Math. Physics には毎号1つ以上この関係の論文が出ると思ってまちがいないようです。

[NP 1967] ... index を branching に利用した初めての論文のようです (Index の def. は Dynkin にさかのぼらしい)。しかし, 一般論とほんの少しの例だけです。

[BR 1970] - 題名のとおりです。

[D 1970] - multiplicity の Weyl formula に似た式が branching について作ってありますが, 実際の計算にはどうも余り役に立たないようです。

[F 1981] ... q が $\Delta_{\ell n}$ 以外のときにも Young 図形の類似を作ってやろうというもので将来使えそうな気がします。 Δ_8 や Δ_{10} の低い次数の表現の Clebsch-Gordan 係数の表があります。

[SKK 1982] ... 今回最もお世話になった論文で、計算法を豊富な具体例とともに非常に丁寧に説明してあります。例えば、 $\dim [\Lambda^4(\Lambda^3 \mathbb{C}^6)]^{\Delta_{\mathbb{C}^6}} = 1$ であることが、p. 2250 の右下の表からわかります。ただ、 $\Lambda^m(\Lambda^n \mathbb{C}^N)$ の m と n の積が 12 以上になると計算がむずかしい、とも書いてあります ("In general, even with the help of a computer, it turn out to be very hard to go beyond $mn=12$ ", p. 2247, §. 2-3)。

以上は論文ですが、次の本は次数が低い表現の Index の表をのせていて計算機がないとき便利です。ただかなり字がこまかくて、マイコンがあればそのほうがはやいようです。... [MP 1981]。

脱線終わり。 ---

さて、上の計算で $\Lambda^2 V$ の branching がわかっていました。

$$\Lambda^2 V \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

この左辺に $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ をかけます。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} (3^2 2 1)^{1960}_{1932} \oplus (3^2 1^3)^{560}_{456} \oplus (3 2^3)^{560}_{456} \oplus (3 2^2 1^2)^{540}_{378} \\ \oplus (2 1)^{70}_{33} \oplus (2^4 1)^{70}_{33} \oplus (1^3)^{20}_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} (1^3)^{20}_0 \end{array}. \quad (\text{右上} = I_0, \text{左下} = I_2)$$

一方,

$$I_0(\Lambda^3 V) = 1140,$$

$$I_2(\Lambda^3 V) = 153,$$

ですから,

$$\Lambda^3 V \rightarrow (3^2 1^3) \oplus (3 2^3) \oplus (1^3)$$

$$\left(\begin{array}{l} I_0: 1140 = 560 + 560 + 20 \\ I_2: 153 \rightarrow 456 + 456 + 6 = 918 \\ \qquad \qquad \qquad = 153 \times 6 \end{array} \right.$$

が出ます。ここで I_0 だけだと, $560 = 540 + 20$ で unique に決まらないのですが, そこが I_2 の威力甚大なるところであります。ただし, $\Lambda^3 V$ が V の symplectic structure から自然に定まる non-deg. pairing をもっていることに注意すれば, $\Lambda^3 V$ は全体として self-dual になり, “560” は必ず pair で出てくることかわかるので, $1140 = 560 + 540 + 20 + 20$ とはならないことになります。このことは以下何回も使います。

めとは、次のような step ですすみます:

- 1° $\Lambda^k V$ の branching rule の右辺に μ をかけ、
 I_0, I_2 をすべての成分について求める。
- 2° $I_0(\Lambda^{k+1} V), I_2(\Lambda^{k+1} V)$ を求める。
- 3° 1°, 2° の結果を見比べて $\Lambda^{k+1} V$ の branching
 を決める。

その際、次の性質が計算を楽にしてくれます。

(2.9) Prop. $\omega_0 \in [\Lambda^2 V]^{\Delta l_6}$ を一つ fix する
 Σ , $1 \leq k \leq 8$ に対し、次の map は単射かつ
 Δl_6 -equivariant:

$$\varphi: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+2} V.$$

$$\underset{\psi}{v} \longmapsto v \underset{\psi}{\wedge} \omega_0$$

Proof. 1) Δl_6 -equivariant であること

$v \in \Lambda^k V$, $X \in \Delta l_6$ に対し,

$$\begin{aligned} \varphi(Xv) &= (Xv) \wedge \omega_0 \\ &= X(v \wedge \omega_0) \quad (\because X\omega_0 = 0) \\ &= X \cdot \varphi(v) \end{aligned}$$

2) 単射であることは、ちょっと不純ですが, Hard

Lefschetz から直ちに出来ます。

つまり, 上の $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ において, 2つ前の step の表が
 考えようとする branching に必ずあらわれることがわ
 かるわけです。また, 次の性質は $\Lambda^{10}V$ を考察する必要が
 ないことを教えてください。

(2. 10) Prop.

$$\dim [\Lambda^k V \otimes V]^{\Delta_{\mathbb{A}_6}} = 1 \text{ ならば}$$

$$\dim [\Lambda^{k+1} V]^{\Delta_{\mathbb{A}_6}} = 1. \text{ (証明略)}$$

つまり, $\Lambda^k V$ に $\square$ が 1 回しかあらわれなければ, $\Lambda^{k+1} V$
 に $\square$ は 1 回しかあらわれない, ということです ($\Lambda^k V \otimes V$
 $\cong \text{Hom}_{\Delta_{\mathbb{A}_6}}(V^*, \Lambda^k V) \cong \text{Hom}_{\Delta_{\mathbb{A}_6}}(V, \Lambda^k V)$ に注意)。

ここまでがテクニックのすべてで, あとはひたすら計算すれ
 ばよく, (1. 3) が出てしまいます。たとえば,

$$\Lambda^4 V \rightarrow (432^21) \oplus (3^4) \oplus (3^2) \oplus (2^21^2) \oplus (1^6),$$

$$\Lambda^5 V \rightarrow (53^22^2) \oplus (4^23^21) \oplus (431^2)$$

$$\oplus (3^21^3) \oplus (32^3) \oplus (1^3),$$

以下, 飛躍的に成分がふえるので省略します。いずれ, どこ

かに詳細を發表できたら, と思っています。

最後になってしまいました, 講演のあとで, Schur function との関連を教えて下さった 丹後先生に感謝いたします。

文 献 表

- [NP 1967] Navon, A., Patera, J. Embedding of a simple Lie group into a simple Lie group and branching rules. J. of Math. Physics, 8.3 (1967) 489-493.
- [BR 1970] Brunet, M., Resnikoff, M. Branching rules for $U(n) \supset SO(n)$. J. of Math. Physics, 11.4 (1970) 1471-1473.
- [D 1970] Daele, A. van, General formula to derive branching rules. J. of Math. Physics, 11.11 (1970) 3275-3282.
- [F 1981] Fischler, M. Young-tableau methods for Kronecker products of representations of the classical groups. J. of Math. Physics, 22.4 (1981) 637-648.
- [SKK 1982] Schellekens, A. N., Koh, In-Gyu, Kang, Kyungsik. Reduction of tensor products with definite permutation symmetry: Embeddings of irreducible representations of Lie groups into fundamental representations of $SU(M)$ and branchings. J. of

Math. Physics, 23.12 (1982) 2244-2256.

- [MP 1981] McKay, W.G., Patera, J. Tables of dimensions, indices, and branching rules for representations of simple Lie algebras. Marcel Dekker, INC. 1981.

[I] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論,
岩波講座 基礎数学.

[S] 島 和久, 連続群とその表現, 岩波応用数学叢書.