

More sign patterns of McKay-Strauss' type

静岡大学理学部 浅井 哲也 (Tetsuya Asai)

無限積の展開

$$\prod_{n>0, 5 \nmid n} (1 - q^n)^6 = 1 - 6q + 9q^2 + 10q^3 - 30q^4 + 6q^5 - 25q^6 + 96q^7 + 60q^8 - 250q^9 + \dots$$

を観察して、符号のパターン (+ - + + -) の繰り返しに気付かないとすれば、注意深さが (私同様に) 足りないのである。実際、同様のことは $\prod_{n>0, 7 \nmid n} (1 - q^n)^4$ や $\prod_{n>0, 13 \nmid n} (1 - q^n)^2$ の展開にも観察できる。これらの場合、それぞれ、やがて係数の符号は周期 7 のパターン (+ - + + - - -) あるいは周期 13 のパターン (+ - - + + + - - - - + - -) を繰り返す。

McKay & Strauss [MS] は Moonshine に現れる沢山の Thompson series について、このような現象を観察して報告している。ひとつの証明は、既に多くの人が指摘してるようだが、解析数論では標準的な手法である circle method と呼ばれるものを使えば直ちにできるのである。

例えば、

$$f(z) = q^{-1} \prod_{n>0, 5 \nmid n} (1 - q^n)^6 = \sum a(n)q^n, \quad q = e^{2\pi iz}$$

とおけば、 $f(z) = (\eta(z)/\eta(5z))^6$ は $\Gamma_0(5)$ の (上半平面で) 正則な modular 関数である。 $\Gamma_0(5)$ の cusps の同値類は 2 つであるが、 $f(-1/5z) = 5^3(\eta(5z)/\eta(z))^6 = 5^3q + 5^3 \cdot 6q^2 + \dots$ であるから、0 と同値な cusp では cusp form のように値が消える。したがって、circle method で Fourier 係数 $a(n)$ を評価するとき、大きな寄与は ∞ と同値な cusp すなわち、分母が 5 の倍数であるような既約分数で起こる。なかでも最大の寄与は $h/5$, $(5, h) = 1$ で生じる。こんなわけで、結果として

$$a(n) \sim A_5(n) \cdot \frac{e^{4\pi\sqrt{n}/5}}{\sqrt{10}n^{3/4}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

と評価される。ここで、 $A_5(n)$ は Kloostermann 和 (最初の節で定義を述べる) と呼ばれるものである。実際、 $A_5(-1) = 0.381 > 0$, $A_5(0) = -1 < 0$, $A_5(1) = 2.618 > 0$, $A_5(2) = 1.236 > 0$, $A_5(3) = -3.236 < 0$ となって、符号パターン (+ - + + -) とよく符合する。すなわち、係数 $a(n)$ の符号は Kloosterman 和の符号であったのである。数論では Kloosterman 和はしばしば登場するが、このように素朴なままその顔をはっきりと見せてくれることのはおもしろいと思う。

ところでこのような周期的符号パターンの現象は、証明自体が示唆するように、何も Thompson series に特有なことではない。はるかに一般的な modular 関数について

て同様の現象が見られる。特に、無限積を持つ（したがって上半平面では正則かつ零点を持たない）modular 関数の Fourier 係数の符号は（一般化された）Kloosterman 和で説明できるものと期待される。ただし、一般化された Kloosterman 和では値がしばしば零となり、さらに特別な場合には、ある系列の Fourier 係数自身が一斉に vanish することが起きる（すなわち、符号パターンに 0 が混じる）など、かなり微妙で興味深い問題が生じる。

ところで、楕円 modular 関数 j の逆数 $1/j(z)$ は交代型 (周期 2) の Fourier 展開を持つが、これは modular 群の level や Kloostermann 和とは関係がない。これは McKay & Strauss の符号パターンとは似て非なる現象というべきかも知れない。 $1/j(z)$ は上半平面に極を持つことに注意すれば、この場合も留数計算に基づく証明も可能であるが、Asai-Kaneko-Ninomiya [AKN] で与えられた証明は全く別の原理によるものであることにも注意されたい。

この報告では、まず McKay & Strauss の観察例のうち the simplest case について、証明を解説的に述べる。それは circle method の一つの演習問題に過ぎない。同様の方法が他の Thompson series の場合にも有効であるだろうが、全ての場合を check したわけではない。最後に、中間報告的なものであるが、さらに広汎な実例ないし現象について若干の注意を補足したい。

偶々 Prof. McKay さんご自身から [MS] の事実のご教示を享けるという幸せに私は恵まれ、長すぎるほどに楽しませていただいた。心から感謝申し上げたい。

1. N は 2, 3, 5, 7, 13 のいずれかを表すものとして、以下これを固定する。いずれの場合も N は素数であり、 $N-1$ は 12 の約数である。

$$f(z) = e^{-2\pi iz} \prod_{n>0, (n,N)=1} (1 - e^{2\pi inz})^{24/(N-1)} = \sum_{n=-1}^{\infty} a(n) e^{2\pi inz}$$

と定義する。つぎのことを証明しよう：

定理 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$a(n) = A_N(n) \cdot \frac{2\pi}{N\sqrt{n}} \cdot I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{N}\right) + O(e^{2\pi\sqrt{n}/N})$$

系 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$a(n) \sim A_N(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2N}n^{3/4}} \cdot e^{4\pi\sqrt{n}/N}$$

ここで $A_N(n)$ は Kloostermann 和 : $A_N(n) = \sum_{h \pmod{N}, (h,N)=1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(nh+h')}$

($hh' \equiv -1 \pmod{N}$) であり、

$I_1(t)$ は変形 Bessel 関数 : $I_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ である。

さて、無限積が絶対収束することから、 $f(z)$ および $1/f(z)$ は複素上半 z -平面上の正則関数である。 $f(z)$ の Fourier 係数に周期 N の符号パターンが現れることは、 $f(z)$ が level N の modular 関数であることに起因する、ということが出来る。すなわち、

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \quad W_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき、つぎのことが成立つ。

補題 1

$$f(\sigma z) = f(z) \quad (\forall \sigma \in \Gamma_0(N))$$

$$f(\sigma z) = N^{12/(N-1)} \cdot \frac{1}{f(z)} \quad (\forall \sigma \in W_N \Gamma_0(N))$$

$GL_2^+(\mathbf{R})$ は一次分数変換によって上半平面に作用するのであった。 W_N は Fricke involution と呼ばれることがある。 $PGL_2(\mathbf{R})$ に落として考えれば $\Gamma_0(N) \cup W_N \Gamma_0(N)$ は部分群になっている。補題 1 はよく知られたことである。modular 関数のコンパクトな入門的事項と合わせて、例えば [Ogg] を参照されたい。

上半平面における $\Gamma_0(N)$ の基本領域には ∞ と 0 で代表される 2 つの cusp が現れる。またこれに閉 Riemann 面の構造を入れるとき、われわれの場合は、その genus は 0 となる。したがって modular 関数体は有理関数体となるが、実は $f(z)$ がその生成元となっている。定義式および補題 1 で見られる通り $f(z)$ は ∞ (と同値な cusp) で 1 位の極、0 (と同値な cusp) で 1 位の零点である他は非零かつ正則な関数であるからである。

さて Fourier 展開

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$$

の係数は

$$a(n) = \int_L f(z) e^{-2\pi i n z} dz \quad (1)$$

と表すことができる。 $f(z)$ は上半平面で正則な関数だから L は始点を z_0 とするとき、終点が $z_0 + 1$ でありさえすれば、どんな経路でもよい。まず単純に

$$L : z = x + i\varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 1$$

としてみる。ここで $\varepsilon > 0$ が十分小さければ、積分路は実軸の近くを平行に進むことになるが、実軸には $f(z)$ の極 (∞ に同値な有理点) と零点 (0 に同値な有理点) がそれぞれ密集している。当然、積分への寄与は、極の近くで大きいと期待される。いまの場合、有理点を既約分数で表すとき、 ∞ に同値になるのは、 N の倍数を分母とするときである。そのうちでも、分母の大きさが小さいほど、積分への寄与がより大

であることが、少しの予備計算で分かる。そこで各有理点 h/N ($h = 1, 2, \dots, N-1$) の近くで、 L の部分区間となるように小区間 L_h をつぎのように定める：

$$L_h : z = x + i\varepsilon, \quad |x - h/N| \leq \delta$$

ここで $\varepsilon > 0$ と $\delta > 0$ の値をどのように取るかについては、若干の予備計算と試行錯誤が必要である。いまの場合、われわれの目的のためには

$$\varepsilon = \frac{1}{2N\sqrt{n}}, \quad \delta = \sqrt{3}\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2N\sqrt{n}}$$

とすれば十分である。ただし $n \geq 4$ としておく。このとき、各 L_h は disjoint となる。 $\cup L_h$ を主区間 (major arc), $L \setminus \cup L_h$ を副区間 (minor arc) と呼ぶことがある。主区間上の積分から積分値 ($= a(n)$) の主要項を取りだし、副区間上の積分は誤差項に押し込めよう、というのが Hardy-Ramanujan [HR] らに始まる circle method の考え方である。(Rademacher [R] も参照されたい。)

2. 最初に副区間上の積分を評価しよう。そのために

$$z = x + i\varepsilon \in L \setminus \cup L_h \implies |f(z)| = O(e^{\pi\sqrt{n}/N})$$

を示す。そうすれば $|e^{-2\pi inz}| = e^{2\pi\varepsilon n} = e^{\pi\sqrt{n}/N}$ と合わせて

$$\int_{L \setminus \cup L_h} f(z) e^{-2\pi inz} dz = O(e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}}) \quad (2)$$

が得られる。したがって、後に見るように、この分は誤差項に含まれることになる。

補題 2 上半平面上の任意の点 z に対して、 $\sigma \in \Gamma_0(N) \cup W_N \Gamma_0(N)$ を適当に選んで、つぎのようにできる：

$$z_1 = \sigma z = x_1 + iy_1, \quad y_1 \geq y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2N}$$

この補題は、例えば $y_1 = \min\{\operatorname{Im} \sigma z \mid \sigma \in \Gamma_0(N) \cup W_N \Gamma_0(N)\}$ として、これが満たすべき条件を書き表すことによって容易に示すことができる。いまは N が素数であることに注意されたい。

さて $z = x + i\varepsilon \in L \setminus \cup L_h$ に対して、**補題 2** のように σ を選んだとする。 $\sigma \in W_N \Gamma_0(N)$ ならば

$$f(z) = N^{\frac{12}{N-1}} \cdot \frac{1}{f(z_1)} = N^{\frac{12}{N-1}} \cdot e^{2\pi iz_1} + \dots$$

$|e^{2\pi iz_1}| \leq e^{-2\pi y_0}$ だから $|f(z)| = O(1)$ である。

$\sigma \in \Gamma_0(N)$ のときは

$$f(z) = f(z_1) = e^{-2\pi iz_1} + O(1)$$

であるから, $y_1 \leq \sqrt{n}/2N$ を示すことができれば $|f(z)| = O(e^{\pi\sqrt{n}/N})$ が従う.

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ とするとき}$$

$$y_1 = \text{Im } z_1 = \frac{\varepsilon}{|cz + d|^2} \quad \therefore \frac{1}{y_1} = \frac{(cx + d)^2}{\varepsilon} + c^2\varepsilon$$

$c = 0$ とすると $d = \pm 1$, $y_1 = \varepsilon \not\leq \sqrt{3}/2N$ だから $c > 0$ としてよい.

$c \equiv 0 \pmod{N}$ にも注意して, もしも $c \geq 2N$ ならば

$$\frac{1}{y_1} \geq c^2\varepsilon \geq \frac{2N}{\sqrt{n}} \quad \therefore y_1 \leq \frac{\sqrt{n}}{2N}$$

残るは $c = N$ の場合. $y_1 > \sqrt{n}/2N$ ($\therefore 1/y_1 < 2N/\sqrt{n}$) として矛盾を導く:

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{\varepsilon}(Nx + d)^2 + N^2\varepsilon < \frac{2N}{\sqrt{n}} \quad \therefore 2N\sqrt{n}(Nx + d)^2 < \frac{2N}{\sqrt{n}} - N^2\varepsilon = \frac{3N}{2\sqrt{n}}$$

したがって

$$\therefore (Nx + d)^2 < \frac{3}{4n} \quad \therefore |x + \frac{d}{N}| < \frac{\sqrt{3}}{2N\sqrt{n}} = \sqrt{3}\varepsilon \quad \left(< \frac{1}{2N} \right)$$

ここで $0 \leq x \leq 1$ だから $d = -h$ ($1 \leq h \leq N-1$) のはず. すなわち $z \in L_h$ となるが, これは $z \in L \setminus \cup L_h$ に矛盾する. これで (1) が示された.

つぎに, 各主区間 L_h 上の積分から主要項を取り出そう. ($h = 1, 2, \dots, N-1$)

$z \in L_h$ すなわち $z = x + i\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{1}{2N\sqrt{n}}$, $|x - \frac{h}{N}| \leq \sqrt{3}\varepsilon$ とせよ. このときは

$$\sigma = \begin{pmatrix} h' & \ell \\ N & -h \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \quad (hh' \equiv -1 \pmod{N}) \text{ をとれば, いつでも}$$

$\text{Im } z_1 = y_1 \geq \sqrt{n}/2N$ となる. 実際, $z_1 = \sigma z$ だから

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{\varepsilon}(Nx - h)^2 + N^2\varepsilon = N^2\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left|x - \frac{h}{N}\right|^2 + 1\right) \leq 4N^2\varepsilon = \frac{2N}{\sqrt{n}}$$

したがって $f(z) = f(z_1) = e^{-2\pi iz_1} + O(1)$ となり, 再び $|e^{-2\pi inz}| = e^{\pi\sqrt{n}/N}$ と合わせて

$$\int_{L_h} f(z) e^{-2\pi inz} dz = \int_{L_h} e^{-2\pi inz - 2\pi iz_1} dz + O(e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{N}})$$

あとは右辺の積分 (初等関数の積分!) から主要部を取り出せばよい.

$$z_1 = \frac{h'z + \ell}{Nz - h} = \frac{h'}{N} - \frac{1}{N(Nz - h)} \quad \text{だから} \quad v = -i\sqrt{n}(Nz - h) \quad \text{とおけば}$$

$$-2\pi inz = -2\pi i \frac{nh}{N} + 2\pi \frac{\sqrt{n}}{N} v, \quad -2\pi iz_1 = -2\pi i \frac{h'}{N} + 2\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \frac{1}{v}.$$

そして $z = x + i\varepsilon$ だから $x - \frac{h}{N} = z - \frac{h}{N} - \frac{i}{2N\sqrt{n}} = \frac{i}{N\sqrt{n}}(v - \frac{1}{2})$. すなわち

$$-\sqrt{3}\varepsilon \leq x - \frac{h}{N} \leq \sqrt{3}\varepsilon \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq i(v - \frac{1}{2}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

$$\int_{L_h} e^{-2\pi inz - 2\pi iz_1} dz = \frac{i}{N\sqrt{n}} e^{-\frac{2\pi i}{N}(hn + h')} \int_M e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}(v + 1/v)} dv$$

ただし M は $v_1 = (1 + i\sqrt{3})/2$ から $v_2 = (1 - i\sqrt{3})/2$ へ向かう直線路である.

さて, これをつぎの直線路たちと合わせて v 平面上の原点 0 を周る閉積分路にして考えよう. J は -1 から $v_0 = i\sqrt{3}/2$ へ向かう直線路, K は v_0 から v_1 へ向かう直線路, K' は v_2 から $v_3 = -i\sqrt{3}/2$ へ向かう直線路, 最後に J' は v_3 から -1 へ戻る直線路とすると, 積分路 $J \cup K \cup M \cup K' \cup J'$ は閉じている.

被積分関数 $e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}(v + 1/v)}$ は原点以外で正則だから

$$\int_J + \int_K + \int_M + \int_{K'} + \int_{J'} = - \int_C$$

ただし C は 0 を中心として -1 を始点および終点とする正方向の単位円周である.

ところが $v \in J \cup J'$ のときは $\operatorname{Re} v \leq 0, \operatorname{Re} 1/v \leq 0$ だから $|e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}(v + 1/v)}| \leq 1$ であるし, また $v \in K \cup K'$ のときは簡単な計算で $0 \leq \operatorname{Re}(v + 1/v) \leq 1$ であることが分かるので $|e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}(v + 1/v)}| \leq e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}}$ となり, これらの積分は誤差項に含まれてしまう. こうして

$$\int_M e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}(v + 1/v)} dv = - \int_C e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}(v + 1/v)} dv + O(e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}}).$$

と評価できた. さらに右辺の積分は Bessel 関数を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}(v + 1/v)} dv &= (-i) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}i(t - 1/t)} dt \\ &= (-i) \cdot J_{-1}\left(-\frac{4\pi\sqrt{n}i}{N}\right) = -i \cdot J_1\left(i\frac{4\pi\sqrt{n}}{N}\right) = I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{N}\right) \end{aligned}$$

と表される. ([W] など母関数公式 $e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$ を参照されたい.)

これで、主区間の積分から主要項を取り出すことができた：

$$\int_{L_h} f(z) e^{-2\pi i n z} dz = \frac{2\pi}{N\sqrt{n}} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}(nh+h')} \cdot I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{N}\right) + O(e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{N}}) \quad (3)$$

これが主要項であることは、公式 $I_1(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^t$ ($t \rightarrow \infty$) ([W], p.203) により

$$\int_{L_h} f(z) e^{-2\pi i n z} dz \sim \frac{1}{\sqrt{2N}n^{3/4}} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}(nh+h')} \cdot e^{\frac{4\pi\sqrt{n}}{N}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

という漸近公式が成り立つからである。(1), (2), (3) によって、定理およびその系の証明、したがって、 $f(z)$ の示す符号パターンの解明がひとまず終わった。

3. もう少し広汎な無限積に現れる符号パターンの実例を挙げよう。

$N \geq 3$, $(\mu, N) = 1$ とする。このとき

$$b(\mu, N) = \frac{N}{2} \cdot B_2\left(\frac{\mu}{N}\right), \quad B_2(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6}$$

$$H_N^\mu(z) = q^{b(\mu, N)} \prod_{\substack{n>0, \\ n \equiv \pm \mu(N)}} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i z}$$

と定義すれば、 $H_N^\mu(z)$ は level N の modular 関数である。詳しくいえば

$$H_N^\mu(z) = \chi(\sigma) H_N^{d\mu}(\sigma z) \quad (\forall \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N))$$

が成り立つ。 $\chi(\sigma)$ は σ と μ, N で定まる 1 のべき根。特に $H_N^\mu(z)$ は $\Gamma_1(N)$ の指標付きの modular 関数。ただし $\Gamma_1(N) = \{\sigma \in \Gamma_0(N) \mid d \equiv \pm 1 \pmod{N}\}$ 。

一般にはこの関数を η 積で表すことはできないが、 ϑ 関数をも用いてつぎのように表示される：

$$H_N^\mu(z) = \frac{-ie^{\pi i \nu^2 z/N} \vartheta_1(\nu z | Nz)}{\eta(Nz)}$$

すなわち、この関数は Kronecker 第二極限公式に現れる関数そのものでもある：

$$N \cdot y \sum_{m, n}' \frac{e^{2\pi i m \mu / N}}{|m + nNz|^2} = -2\pi \log |H_N^\mu(z)|^2$$

ϑ 関数, η 関数：

$$\vartheta_1(v|z) = 2q^{1/8} \cdot \sin \pi v \cdot \prod_{n>0} (1 - q^n)(1 - e^{2\pi i v} q^n)(1 - e^{-2\pi i v} q^n), \quad \eta(z) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n)$$

のよく知られた変換公式 (cf. [R]) を用いることにより $H_N^\mu(z)$ の変換公式、因子 $\chi(\sigma)$, あるいは、各 cusp での展開を計算することができる。

具体例を見るために, $N=5$ としよう. したがって

$$H_5^1(z) = q^{1/60} \prod_{\substack{n>0 \\ n \equiv \pm 1(5)}} (1 - q^n), \quad H_5^2(z) = q^{-11/60} \prod_{\substack{n>0 \\ n \equiv \pm 2(5)}} (1 - q^n)$$

これらのベキ積も同時に考えることにして

$$P(k, \ell) = H_5^1(z)^k \cdot H_5^2(z)^\ell = q^{(k-11\ell)/60} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n$$

とおく. 先に詳しく考察した $f(z)$ ($N=5$) は $P(6, 6)$ に相当する. $P(k, \ell)$ はすべて $\Gamma_1(5)$ に関する指標付きの modular 関数であり, cusp 以外で正則かつ非零である. ただし 4 つの非同値な cusp がある.

さて, $P(k, \ell)$ の q 展開係数の符号を観察すると, 大概是周期 5 のパターンを繰り返す. 符号パターンに 0 が現れる 11 通りの特別な場合を除き, 一般的状況はつぎのようにまとめられる. 以下の表は, 主に計算機実験に基づいて作成した. 一部について未証明な部分があり, ことによると修正が必要となるかも知れない.

指標付きの Kloosterman 和は, しばしば 0 となり, 状況は単純ではない. (主要項ではないが, Kloosterman 和が 0 となる例は, 既に [HR] でも観察されていた!) $P(5, 5)$ の周期が 25 であることは, このことから大略説明できる. 符号パターンに現れる 0 もやはり Kloosterman 和の消えることと深い関係があるようだが, 現時点では未説明のままである. あるいは, twisting operator といったもので, 説明が可能となるのであろうか.

いづれも $n \rightarrow \infty$ のときの現象であること, すなわち十分大きな $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$ についての $c(n)$ の符号パターンであること, また k, ℓ の一方は負でもよい (ともに負であれば符号パターンは自明) が, そのときは他方は十分大きな正数でなければならない, などのことにも注意されたい.

例 (表の見方) $P(22, -3)$ を展開すると, 第 5 項目から, $c(5) = -29900$, $c(6) = 87972$, $c(7) = -199343$, $c(8) = 318134$, $c(9) = -199304$ となって, 符号パターン $(-+-+-)$ の繰り返しが始まる. これは, $22 - (-3) = 25 \equiv 90 + 35 \pmod{10^2}$ で, 表のパターン $\alpha(9)$ と一致すべきだが, 確かにそうである.

I $P(k, \ell)$ の符号パターンに 0 が現れる場合

$$\bullet P(3, -2), P(4, -1), P(5, 0), P(6, 1) : (+-+-0)$$

$$\bullet P(1, 1) : (+--00), \quad \bullet P(3, 3) : (+-0+0), \quad \bullet P(1, 6) : (+--0+)$$

$$\bullet P(0, 5) : (+0---), \quad \bullet P(-1, 4) : (++--0), \quad \bullet P(-2, 3) : (++0--)$$

$$\bullet P(5, 5) : (+-++---++---++-0-++-0-++-)$$

II $P(k, \ell)$ の符号パターン. 一般の場合

- $k > \ell$ のとき

$0 \leq i \leq 9$ を条件 $k - \ell \equiv 10i + j \pmod{10^2}$ を満たすもの, ただし
 $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, -35$ (when $l \geq 1$), or $+35$ (when $l \leq 0$),
 とするとき $P(k, \ell)$ の符号パターンは $\alpha(i)$ (下表) で与えられる.

- $k < \ell$ のとき

$0 \leq i \leq 9$ を条件 $9k + l \equiv 10i + j \pmod{10^2}$ を満たすもの, ただし
 $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, +5$ (when $k \geq 0$), or -5 (when $k \leq -1$),
 とするとき $P(k, \ell)$ の符号パターンは $\beta(i)$ で与えられる.

- $k = \ell$ のとき

$0 \leq i \leq 9$ を $k \equiv i \pmod{10}$ となるものとするとき, $P(k, k)$ の符号パターンは $\gamma(i)$ で与えられる.

i	$\alpha(i)$	$\beta(i)$	$\gamma(i)$
0	+ - + + -	+ + - - +	+ - - - -
1	- - + - +	+ - - - +	+ - - - -
2	- + - + +	+ - - + +	+ - - + +
3	+ - - + -	- - - + +	+ - + + -
4	+ - + - +	- - + + +	+ - + + -
5	- + - - +	- - + + -	+ - + + -
6	+ + - + -	- + + + -	+ - + + -
7	+ - + - -	- + + - -	+ - + + -
8	- + + - +	+ + + - -	+ + + - -
9	- + - + -	+ + - - -	+ - + - -

参考文献

- [MS] J.McKay & H.Strauss, The q-series of monstrous moonshine, Comm. Algebra, 18(1), 253-278 (1990)
- [HR] G.H.Hardy & S.Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc., (2) 17, 75-115 (1927)
- [AKN] T.Asai, M.Kaneko & H.Ninomiya, Zeros of certain modular functions, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, 46, 93-101 (1997)
- [O] A.Ogg, Survey of modular functions, L.N.Math. 320, 1-36, Springer (1973)
- [W] G.N.Watson, Theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press (1966)
- [R] H.Rademacher, Topics in Analytic Number Theory, Springer (1973)