

フェルマ - 多様体に関する

ホッジ予想について

東 大 理

塩田 徹治

§0.

$m \geq 1$, $n \geq 0$ とする. $(n+1)$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の非特異超曲面

$$(1) \quad X_m^n \quad x_0^m + x_1^m + \cdots + x_{n+1}^m = 0$$

を, n 次元 m 次の Fermat 多様体とよぶ. 以下断らぬ限り, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える.

以下では, X_m^n に関する Hodge 予想: $n = 2p$ の時

$$(2) \quad H^{p,p} \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) = C(X_m^n)_{\mathbb{Q}},$$

(右辺は, p 次元の代数的サイクル類の生成する空間)を, m, n に関する条件 (P_m^n) の下に証明する方法を述べる. 以下は, m は素数の場合の最近の Ran [R] の結果の拡張を与えると同時に,

証明の簡易化に力を入れている. この際基礎となるのは, X_m^n の特約的構造 ([F], §1) である.

§1

この節では (2) の仮定を記述する. m, n は
前の節の通りとし, G_m^n は次の群とされる.

$$G_m^n = (\underbrace{\mu_m \times \cdots \times \mu_m}_{(n+2)\text{-times}}) / (\text{diagonal}).$$

μ_m は 1 の m 乗根の全体をなす巡回群. G_m^n の元を

$$g = [\zeta_0 : \cdots : \zeta_{n+1}] \quad (\zeta_i \in \mu_m)$$

とかく. G_m^n は X_m^n の自己同型として作用する:

$$g : X_m^n \rightarrow X_m^n$$

$$(x_0 : \cdots : x_{n+1}) \mapsto (\zeta_0 x_0 : \cdots : \zeta_{n+1} x_{n+1})$$

従って G_m^n は $H^i(X_m^n, \mathbb{Q}), H^i(X_m^n, \mathbb{C}), \dots$ に作用する.

$i \neq n$ のときは G_m^n は 1 のみを作用させる.

G_m^n は自明に作用する. $i = n$ のときは G_m^n の
指標 α に関する $H^n(X_m^n, \mathbb{C})$ の固有空間を $V(\alpha)$ とおき.

$$V(\alpha) = \{ \xi \in H^n(X_m^n, \mathbb{C}) \mid g^*(\xi) = \alpha(g)\xi \}. \quad \text{特に}$$

G_m^n の指標群 $\hat{G}_m^n$ は, 自然に次の同型と見做す:

$$\hat{G}_m^n = \{ \alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \mid a_i \in \mathbb{Z}/m, a_0 + \cdots + a_{n+1} = 0 \}$$

$$\alpha(g) = \zeta_0^{a_0} \cdots \zeta_{n+1}^{a_{n+1}}$$

次の記号を用いる:

$$\mathcal{A}_m^n = \{ \alpha \in \hat{G}_m^n \mid a_i \neq 0 \}$$

$$|\alpha| = \sum_{i=0}^{n+1} \langle a_i \rangle / m \quad \langle a_i \rangle \in a_i, 1 \leq \langle a_i \rangle \leq m-1.$$

$$H^{p,q} = \text{type } (p,q) \text{ - subspace of } H_{\text{prim}}^n(X_{\mathbb{C}}^n), \quad p+q=n$$

Th.I. 以上の記号の下に、次を成立する。

$$(1) \quad H_{p+1}^n(X_m^n) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}_m^n} V(\alpha), \quad \dim V(\alpha) = 1 \quad (\forall \alpha \in \mathcal{A}_m^n).$$

$$(ii) \quad H^{p,q} = \bigoplus_{|\alpha|=p+q} V(\alpha) \quad (p+q=n).$$

$$(iii) \quad (H^{p,p} \cap H^n(X_m, \mathbb{Q}))_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in B_m^n} V(\alpha) \quad (n=2p)$$

$$\mathcal{B}_m^n = \{ \alpha \in \mathcal{A}_m^n \mid |\alpha| = p+1, \forall t \in (\mathbb{Z}/m)^r \}$$

$$h_n \equiv (t_{a_0}, \dots, t_{a_{n+1}})$$

$$(vi) \quad ((H^{p,p+1} + H^{p+1,p}) \cap H^n(X^n, 0))_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in B^n} V(\alpha) \quad (n=2p+1)$$

$$\mathcal{B}_m^n = \{ \alpha \in \mathcal{A}_m^n \mid |\alpha| = p+1 \text{ or } p+2, \forall t \}.$$

52 p. 12. Oguni, Ann. Math. 108 (1978) 2 12 Katz.

Ann. ENS. 2 (1969) $\frac{2}{3}$ D₂, (iii), (iv) et $H^n(\mathcal{O})_{\otimes \mathbb{Q}}(\xi_m) =$

h. 14 b G_m^n と $G_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_m)/\mathbb{Q}$ の 1 対 1 の可換性: 1. 5. 3.

± 2. n が偶数のとき $C(X_m^n)_{\mathbb{Z}} \subset H^n(X_m^n, \mathbb{Z})$
 と X_m^n の次元 $n/2$ の代数的サイクルを生成する
 部分群, $C_{\text{prim}}(X_m^n)_{\mathbb{Z}}$ とは primitive part とし

$$C_{\text{prim}}(X_m^n) = C_{\text{prim}}(X_m^n) \otimes \mathbb{C} \subset H_{\text{prim}}^n(X_m^n)$$

とある。明かには G_m^n -部分加群だから
 3. ある $\mathcal{C}_m^n \subset \mathcal{O}_m^n$ がある。

$$C_{\text{prim}}(X_m^n) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{C}_m^n} V(\alpha).$$

4. $p = n/2$ のとき

$$H^{p,p} \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \supset C(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$$

だから $\mathcal{C}_m^n \subset \mathcal{B}_m^n$ である。 X_m^n の (1) 上の Hodge
 予想は次のように述べられている:

$$\text{Hodge}(X_m^n): \quad \mathcal{C}_m^n = \mathcal{B}_m^n \quad ? \quad (n: \text{even})$$

任意の m に対し、これは $n=0$ と $n=2$ の時
 正しい。($n=0$ は自明, $n=2$ は Lefschetz の定理
 による。)

以下に示す。 m は固定して、 n は偶数で
 17 以上とする。 $\forall \alpha \in \mathcal{B}_m^n$ が $\mathcal{C}_m^n$ に属する条件を
 問う。

§2.

前節で X_m^n 上の type (p, p) の有理係数コホモロジー類 (特に Hodge class) の構造を明らかにしたから、対応する 代数的サイクルを構成すること を目標にする。

まず X_m^n の $\bar{\mathbb{Q}}$ 上の構造を復習する ([F] §1.)
次のような図式が知られている: $n = r + s, r, s \geq 1$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \beta^{-1}(Y) \hookrightarrow_j Z_m^{r,s} & \xrightarrow{\pi} & Z_m^{r,s}/\mu_m \hookrightarrow (X_m^{r-1} \times \mathbb{P}^s) \amalg (\mathbb{P}^r \times X_m^{s-1}) \\
 \beta' \downarrow & \searrow \psi & \downarrow \bar{\varphi} & \downarrow \text{proj.} \\
 Y = X_m^{r-1} \times X_m^{s-1} \hookrightarrow_j X_m^r \times X_m^s & \xrightarrow{\varphi} & X_m^n & \hookleftarrow X_m^{r-1} \amalg X_m^{s-1} \\
 & (x_i) \quad (y_j) & (z_k)
 \end{array}$$

① は次の順序で与えられる。

φ : m 次の有理写像: $z_i = x_i y_{s+1}, z_{r+1+j} = \varepsilon x_{r+1} y_j$

($0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s$) ε は $\varepsilon^m = -1$ となる数。

Y : φ の不確定点 $x_{r+1} = y_{s+1} = 0$ 。

$\beta: X_m^r \times X_m^s \rightarrow Y$ の blow-up, β' は制限。

$\psi = \beta \circ \varphi$ morphism とする。

$\pi, \bar{\varphi}$ は上の図式に $\bar{\mathbb{Q}}$ の作用を合せて考えたと。

φ は次の同型式に關して equivariant:

$$h: G_m^r \times G_m^s \longrightarrow G_m^n$$

$$([z_0: \dots: z_r: 1], [z'_0: \dots: z'_s: 1]) \longmapsto [z_0: \dots: z_r: z'_0: \dots: z'_s]$$

かつ $G_m^r \times G_m^s$ は γ を不変とし $\text{Ker}(h) = \mu_m$ は γ 上自明に作用する。従って $G_m^r \times G_m^s$ は $Z_m^{r,s}$ に作用し μ_m は $\beta^{-1}(\gamma)$ を真部分群に固定する。

$\pi: Z_m^{r,s}$ から $\mu_m = \text{Ker}(h)$ による商写像をとると

$$\psi = \bar{\psi} \circ \pi \quad \text{を分解することができる。} \quad (Z/\mu_m \text{ は非特異})$$

また、この $\bar{\psi}$ は実は X_m^n の部分多様体

$$X_m^{r-1} = \{(x_0: \dots: x_r: 0: \dots: 0)\} \quad \text{と}$$

$$X_m^{s-1} = \{(0: \dots: 0: y_0: \dots: y_s)\}$$

を中心とした blow-up を行う。これより $\bar{\psi}$ は $Z_m^{r,s}/\mu_m$ に作用する $G_m^r \times G_m^s/\mu_m \simeq G_m^n$ に作用する equivariant

上の図式を引くと $H^n(Z_m^{r,s}/\mu_m) \cong \mathbb{Q}^n$ となる

したがって計算することができる:

$$\begin{aligned} (1) \quad H^n(Z_m^{r,s}/\mu_m) &\cong H^n(Z_m^{r,s})^{\mu_m} \\ &\cong_{\mathbb{Q}} [H^n(X_m^r \times X_m^s) \oplus H^{n-2}(X_m^{r-1} \times X_m^{s-1})]^{\mu_m} \\ &\cong H^n(X_m^r \times X_m^s)^{\mu_m} \oplus H^{n-2}(X_m^{r-1} \times X_m^{s-1})^{\mu_m} \end{aligned}$$

$$(2) \quad H^n(Z_m^{r,s}/\mu_m) \cong_{\bar{\psi}} H^n(X_m^n) \oplus \sum_{j=1}^r H^{n-2j}(X_m^{r-1}) \oplus \sum_{k=1}^s H^{n-2k}(X_m^{s-1})$$

blow-up による $\mathbb{Q}^n$ の分解は $\mathbb{Q}^n$ の部分空間に分解される。

SGA7II, XVIII. Katz, SGA5 VII, 2 は "Complex Analysis and Algebraic Geometry" (Cambridge) の 101 頁 6 の 1 番 2 と 参照 2 番 1 である。

2 (1) は (2) の 1 通り。 G_m^n -加群 2 あり 1 あり。 Künneth 分解 2, Th.I (i) を使って 2 あり。 $\hat{G}_m^n \ni \alpha$ に関する固有空間に分解する。 然る後 $\mathcal{O}_m^n \ni \alpha$ なる α に関する固有空間の直和と 2 あり。 次の結果を得る。

Th. II. m は 固定。 $n = r + s$, $r, s \geq 1$ かつ

次の性質 1 (1) 型 あり存在する:

$$H_{\text{prim}}^n(X_m^n) \cong \left[H_{\text{prim}}^r(X_m^r) \otimes H_{\text{prim}}^s(X_m^s) \right]^{\mu_m} \oplus \left[H_{\text{prim}}^{r-1}(X_m^{r-1}) \otimes H_{\text{prim}}^{s-1}(X_m^{s-1}) \right].$$

a) f は G_m^n -equivariant.

b) x (21 7) は右辺の χ - 項 (21 7 = 17) に属する。

3 2 3. x は type $(p, q) \Rightarrow f(x)$ は type (p, q) .

y は type $(p', q') \Rightarrow f(y)$ は type $(p'+1, q'+1)$.

c) f は代数 5 の π の 7 12 2 保存する。 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(c1) r, s 偶数 7 3 $f: [C(X_m^r) \otimes C(X_m^s)]^{\mu_m} \hookrightarrow C(X_m^n)$.

(c2) r, s 奇数 7 3 $f: C(X_m^{r-1}) \otimes C(X_m^{s-1}) \hookrightarrow C(X_m^n)$.

∴ $C(X^n)$ は偏数次元 ($n = 2p$) の多様体 X^n 上の p -次元の代数的サイクルの primitive part.

より詳しく, Z_1 (又は Z_2) が X_m^{r-1} (又は X_m^{s-1}) 上の p -次元の代数的サイクル γ であるとき,

$$f(d(Z_1) \otimes d(Z_2)) = \text{const. } d(Z_1 \vee Z_2)$$

と仮定し, $Z_1 \vee Z_2$ は X_m^n 上の $2p$ -次元の $Z_1 \subset X_m^{r-1}$ と $Z_2 \subset X_m^{s-1}$ と P^1 を結ぶ $2p$ 個の点の代数的サイクル (join) である.

注意. 上の Th. II の (c1), (c2) は Fermat 多様体 X_m^n 上の代数的サイクル γ 係数 γ の X_m^n , $n < n$ から構成する方法と等しい. 即ち (c1) は, $X_m^r \times X_m^s$ 上のサイクルから X_m^n ($n = r+s$) 上の γ を導く方法の特別な場合である. これは [F] にある. 標数 p の X_m^n が supersingular である条件, 或は標数 p の X_m^2 (曲面) に関する Tate 予想の証明に使用した. これは又 (c2) は $X_m^{r-1} \times X_m^{s-1}$ 上のサイクルから X_m^n ($n = r+s$) のサイクルを導く方法である. Ran [R] による最初の導入と等しい. この証明は, 図式 (*) に基づく上の証明の様に見易くない.

§ 3.

$n = r + s$, $r, s \geq 1$ とし、次の記号を定義する:

$$\alpha_m^{r,s} = \{(\beta, \gamma) \in \sigma_m^r \times \sigma_m^s \mid \beta = (b_0, \dots, b_{r+1}), \\ \gamma = (c_0, \dots, c_{s+1}), b_{r+1} + c_{s+1} = 0\}$$

$$\alpha_m^{r,s} \ni (\beta, \gamma) \mapsto \beta \# \gamma = (b_0, \dots, b_r, c_0, \dots, c_s) \in \sigma_m^n$$

2. $\sigma_m^{r-1} \times \sigma_m^{s-1} \ni (\beta', \gamma') \mapsto \beta' * \gamma' \in \sigma_m^n$ と同様

に定義する: $\beta' = (b_0, \dots, b_r)$, $\gamma' = (c_0, \dots, c_s)$ に対して

$$\beta' * \gamma' = (b_0, \dots, b_r, c_0, \dots, c_s).$$

明し 6. 12.

$$\sigma_m^n \xleftrightarrow{\text{bijection}} \sigma_m^{r,s} \coprod (\sigma_m^{r-1} \times \sigma_m^{s-1})$$

これは Th. II の分解は、これは正しいと見られる。 i.e.

$$\begin{cases} V(\alpha) \longleftrightarrow V(\beta) \otimes V(\gamma) & \text{if } \alpha = \beta \# \gamma. \\ V(\alpha) \longleftrightarrow V(\beta') \otimes V(\gamma') & \text{if } \alpha = \beta' * \gamma'. \end{cases}$$

Th. II, (c1), (c2) 1. 5

$$\text{Cor. } \mathcal{C}_m^n \hookrightarrow \bigcup_{\substack{r+s=n \\ r, s \text{ even}}} [(\mathcal{C}_m^r \times \mathcal{C}_m^s) \cap \sigma_m^{r,s}] \cup [\mathcal{C}_m^{r-1} \times \mathcal{C}_m^{s-1}]$$

$r, s \text{ odd}$

これは 5.1 節 < 右辺は直和群 $\mathcal{S}_{n+2}$ の作用で動かすことができる。 $\mathcal{C}_m^n$ を含む。

よって $\text{Hodge}(X_m^n)$ は n 次元のベクトル空間であることが証明される。 次のように示す。

$\forall \alpha \in B_m^n$ ($n: \text{even} > 2$) に対し 次の条件

(P1) $\exists \beta \in B_m^r, \exists \gamma \in B_m^s, (\beta, \gamma) \in \mathcal{O}_m^{r,s}$ s.t.

$$\beta \# \gamma \sim \alpha \quad (\sim \text{は } \mathcal{G}_{n+2}\text{-同値の意})$$

(P2) $\exists \beta' \in B_m^{r-1}, \exists \gamma' \in B_m^{s-1}$ s.t.

$$\beta' * \gamma' \sim \alpha$$

のいずれかが成立する。

$$\pm 2. \quad \alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathcal{O}_m^n \quad \text{for}$$

$$\alpha \sim (\underbrace{1, \dots, 1}_{x_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{x_2}, \dots, \underbrace{m-1, \dots, m-1}_{x_{m-1}})$$

とあるとき $\alpha \in B_m^n$ とある条件は

$$\sum_{v=1}^{m-1} \langle t, v \rangle x_v = \left(\frac{n}{2} + 1\right)m, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m)^*$$

である。今

$$\sum \langle t, v \rangle x_v = my$$

の非負整数解 $(x_1, \dots, x_{m-1}, y)$ (ただし $y \geq 1$) の存在
半群を M_m とかく。 M_m の元 $\bar{x}$ は x の $\bar{x}$ の
和とみなすとき indecomposable とよぶ。 x は
この集合 $I_m \subset M_m$ は有限個から成り ("Jordan
の補題")。勿論 M_m の最小の生成元系を与える。

一方 $M_m(y)$ とする x は y を持つ部分集合と

$\exists$ 3. $M_m(1)$ は $[\frac{m}{2}]$ の元 $(1, 0, \dots, 0, 1; 1), (0, 1, 0, \dots, 0, 1; 1)$
 $\dots (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0; 1)$ (ただし $[\frac{m}{2}]$ の元 ξ は m : 偶数の
 時のみ) により成る. $\xi \in M_m$ の元 ξ は quasi-
decomposable とは $\exists \eta \in M_m(1)$ s.t. $\xi + \eta = \xi' + \xi''$,
 $\xi', \xi'' \in M_m, \neq \xi$ と $\eta \neq 0$ と定義する.

$\mathbb{Z}$ の子集 $\neq (P_m), (P_m^n)$ を考へる. ($m \geq 1, n$: even)

(P_m) $I_m \ni \xi$ は $\forall \xi \in I_m$ quasi-decomposable.

(P_m^n) I_m の元 ξ に対し $3 \leq y \leq \frac{n}{2} + 1$ に対し ξ は quasi-decomposable.

以上より M_m は $M_m(1) \cup M_m(2)$ と生成され、
 (P_m) は I_m により成る. 以上の用語で、結論は

Th III. $\begin{cases} (P_m^n) \Rightarrow \text{Hodge}(X_m^n) \\ (P_m) \Rightarrow \text{Hodge}(X_m^n) \text{ for all } n \text{ (even)}. \end{cases}$

Lemma. m の素数 2 は $m=4$ の時 $I_m = M_m(1)$.

証明は $\text{rank}(\langle t, v \rangle_{1 \leq t, v \leq m-1}) = \frac{m+1}{2}$ による.

Cor(II) m の素数 2 は $m=4$ の時 $\text{Hodge}(X_m^n)$ は
 任意の n で成立. しかも $C(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$ は X_m^n 上の
 $\frac{n}{2}$ 次元の線型部分空間 $P_n \simeq \mathbb{P}^{\frac{n}{2}}$ として表され、
 226

最後の部分は Th II の末尾と X_m^0 が m 本の
 素数から成ることから帰納法で出る。(これは
 ①より、 $\mathbb{Z}$ 上でいえるか否かは 明白 味ある問
 題である。)

m が素数でないとき、一般に $I_m \not\subseteq M_m(1)$ であ
 る。しかし m の実験より、条件 (P_m) を満
 ちさせている ($m \leq 10$ では、少くとも、よい)。

問題 (i) $d_m = \max_{(x,y) \in I_m} y$ は m で評価できるか?
 (ii) (P_m) はいつ成立するか?

最後に、次の結果を述べよう。

Th. IV. 条件 (P_m) の下 (とくに m が素数 2 は ≤ 10
 であり、よい)。任意の直積 $X_m^{r_1} \times \cdots \times X_m^{r_k}$ の (任意
 の $p \leq r_1 + \cdots + r_k$ について) Hodge 予想が成立する。

文献: (詳細は、近く出される予定の論文を参照)

[R] Z. Ran, Cycles on Fermat hypersurfaces. (to appear)

[F] T. Katsura - T. Shioda, On Fermat varieties

Tôhoku Math. J. (1979)