

Orbital Asymptotic Stability of Hopf Bifurcating Solutions for Some Reaction-Diffusion Systems

早稲田大学高等学院 福永 至 (Itaru Hukunaga)

Department of Mathematics

School of Science and Engineering

Waseda University

3-4-1 Okubo, Shinjuku, Tokyo 169

1 Introduction

$\Omega \subset R^n$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする. 3つの未知関数 $u = u(x, t), v = v(x, t), w = w(x, t), (x, t) \in R^n \times (0, \infty)$, についての 3-components system :

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u(a - u - w) \\ v_t = d_1 \Delta v + bu - \beta v \\ w_t = d_2 \Delta w + cv - \gamma w \end{cases} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty),$$

を以下の境界条件で考える.

$$(B.C) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

ここで, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$ は Laplacian, $\partial / \partial n$ は $\partial\Omega$ での外向き法線方向の微分を表す. 又, 方程式に現れてくる係数については次の仮定をおく.

(A.1) d_1, d_2 (拡散係数), a, b, c, β, γ はすべて正定数.

方程式 (P) は, 数理生態学, 化学反応をモデルとする反応拡散方程式系である. 方程式 (P) は, 有名な Lotka-Volterra モデルではないが, 次のような状況を考えている.

<モデル>

u : 領域 Ω 内に生息するある生物の個体密度,

v : u が生み出すある化学物質の量,

w : v が化学変化して生じる化学物質の量.

ここで注意しておかなければいけないことは, v, w は他からの影響がない状況のときは自然に量が減っていくということと, 生物 u にとって物質 v は有害でもないし, 有益でもないが, 物質 w は有害であるということである. 即ち, 生物 u は, 二次的な物質 (副産物) によって害を被るわけである. このようなモデルの具体例として次のようなものがある.

u : 人間, v : 車

w : 排気ガス

方程式 (P) を (B.C) 及び次のような (I.C) をおいて初期値境界値問題として考えてみよう.

$$(I.C) \quad u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, v(\cdot, 0) = v_0 \geq 0, w(\cdot, 0) = w_0 \geq 0, \quad \text{in } \Omega.$$

例えば, $u_0, v_0, w_0 \in C(\Omega)$ を満たす任意の初期関数にたいして, 次を満足する古典解の大域的存在がわかる [Y], [H], [S].

$$\begin{aligned} 0 \leq u(\cdot, t) &\leq \max\{\|u_0\|_\infty, a\} =: m_1, \\ 0 \leq v(\cdot, t) &\leq \max\{\|v_0\|_\infty, bm_1/\beta\} =: m_2, \\ 0 \leq w(\cdot, t) &\leq \max\{\|w_0\|_\infty, cm_2/\gamma\} =: m_3. \end{aligned}$$

この論文で問題にすることは, 解の $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動であり, とりわけ 次の i), ii), iii) を調べたい.

- i) 定数定常解 ${}^t(u^*, v^*, w^*) = \frac{a}{bc + \beta\gamma} {}^t(\beta\gamma, b\gamma, bc)$ の漸近安定性,
- ii) 定数定常解から分岐する周期解 (Hopf 分岐解) の存在,
- iii) Hopf 分岐解の軌道漸近安定性.

以下のセクションでは, i) を Theorem 1, ii) を Theorem 2, iii) を Theorem 3 と Theorem 4 にまとめ話を進めていく. i) ではスペクトル解析を, ii), iii) では Crandall & Rabinowitz の論文 [CR] を道具として用いる. i), ii), iii) のうち, i), ii) までは比較的簡単な議論で結果を導くことができるが, iii) の軌道漸近性をしめすのは簡単にはいかない. 参考のため, 方程式 (P) と似た形をした方程式系についての周期解に関する結果を紹介する.

a) Belousov - Zhabotinskii の化学反応モデル

$$\begin{cases} u_t = a(v - uv + u - bu^2) \\ v_t = a^{-1}(cw - v - uv) \\ w_t = d(u - w) \end{cases}$$

この方程式に関して, Hopf 分岐解の存在については Marsden - McCracken [MM] によってわかっているが, その軌道漸近安定性についての結果は得られていない.

b)

$$\begin{cases} du_1/dt = d_1 \Delta u_1 + u_1(\alpha_1 - \beta_1 u_1 - \gamma_1 u_2 - \delta_1 u_3) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ du_2/dt = d_2 \Delta u_2 + u_2(\alpha_2 - \beta_2 u_1 - \gamma_2 u_2 - \delta_2 u_3) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ du_3/dt = d_3 \Delta u_3 + u_3(-s + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 - \varepsilon_3 u_3) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial u / \partial n = \partial v / \partial n = \partial w / \partial n = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{cases}$$

ただし, $d_i (i = 1, 2, 3), \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i (i = 1, 2), s$ は正定数で, $\varepsilon_3 \geq 0$ とする. この方程式系について, G. Caristi - K. P. Rybakowski - T. Wessolek らによって, Hopf 分岐解の存在と, その軌道漸近安定性の結果が得られている [CRW]. ただし, 安定性の結果は, わかりやすい形に表現されていない.

2 結果

方程式 (P) の定数定常解は, 次の 2 つである;

$$\begin{aligned} a) & {}^t(0, 0, 0), \\ b) & {}^t(u^*, v^*, w^*) = \frac{a}{bc + \beta\gamma} {}^t(\beta\gamma, b\gamma, bc). \end{aligned}$$

これら 2 つの解の安定性を考えよう. まず一般論から, 安定性の定義を説明する. X を Banach space とし, そのノルムを $\|\cdot\|$ で表す. 作用素 A は X で定義された Henry [H] の意味での sectorial linear operator とする. このとき, $-A$ は analytic semigroup $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ を生成することが知られている [H]. A の分数べき A^α を用いて, Banach 空間 X^α を $X^\alpha = D(A^\alpha)$ と定義する. X^α のノルムは $\|\cdot\|_\alpha$ で表し,

$$\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\| + \|x\| \quad \text{for } x \in X^\alpha$$

とする. U を $x_0 \in X$ の X^α 内での近傍, f を U から X への写像として次の方程式を考える.

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} + Ax = f(x), \quad t > 0.$$

$x(t) \equiv x_0$ が定常解 (equilibrium solution), 即ち, $x_0 \in D(A)$ で $Ax_0 = f(x_0)$ が成立しているとする. 次に定常解の安定性の定義を述べよう.

Definition 1 (安定性) (i) x_0 が X^α で安定 (stable in X^α) であるとは, すべての $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して次を満足することである: $\|\xi - x_0\|_\alpha < \delta$ を満たす $\xi \in X^\alpha$ を初期値とする (2.1) の解 $x(t; \xi)$ が $[0, \infty)$ で存在し, 更に $\|x(t) - x_0\|_\alpha < \varepsilon$ が任意の $t \geq 0$ で成立する.

(ii) x_0 が X^α で安定でないとき, x_0 が不安定 (unstable in X^α) であるという.

(iii) x_0 が X^α で漸近安定 (asymptotically stable) であるとは, (i) を満足して, 更に, $\|\xi - x_0\|_\alpha < \delta$ を満たすすべての ξ に対して次の収束を満たすことである:

$$x(t; \xi) - x_0 \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ in } X^\alpha.$$

定数定常解 a), b) の安定性を調べよう. $p > \frac{n}{4}$ を固定する. Banach 空間 $X = (L^p(\Omega))^3$ にとる. 稠密な定義域をもつ線形閉作用素 A を

$$Au := -\Delta u \\ D(A) = \{u \in W^{2,p}; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

で定義する. ここで,

$$(2.2) \quad \frac{n}{4p} < \alpha < 1,$$

を満足する α を固定する. (2.2) より, $D(A^\alpha) \subset L^{2p}(\Omega)$ となる. 以下の Proposition 1 と Theorem 1 では, 空間 $\{D(A^\alpha)\}^3$ において安定性を議論する. まず $(0, 0, 0)$ の安定性から調べる.

Proposition 1 $(0, 0, 0)$ は不安定である.

次に, (u^*, v^*, w^*) の安定性の結果を述べる. ここでは, β, γ を fix して, a, bc を parameter と考える. $a - bc$ 平面において曲線 Γ を, 次の式で定義する:

$$\Gamma: f(a, bc) \equiv \beta\gamma(\beta + \gamma)a^2 + (\beta\gamma + bc)\{(\beta + \gamma)^2 - bc\}a + (\beta + \gamma)(\beta\gamma + bc)^2 = 0.$$

Γ によって領域 I と領域 II が分離される (図 1).

Theorem 1 (Stability of Stationary Solution)

(i) (a, bc) が領域 I (斜線部) に属しているとき, (u^*, v^*, w^*) は漸近安定 (asymptotically stable) である.

(ii) (a, bc) が領域 II に属しているとき, (u^*, v^*, w^*) は不安定 (unstable) である.

Theorem 1 で, bc を fix して, a だけを parameter と考える. figure 1 において, $bc = k$ (k は $k > (\beta + \gamma)(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})^2$ を満たす定数) と Γ の交点の a 座標を小さい方から順に a_0^-, a_0^+ と置く. 今, β, γ, b, c はすべて fix した状況で考えているわけであるから, a の代わりに $u^* (= \frac{a\beta\gamma}{bc + \beta\gamma})$ を parameter と思うことができる. そこで, u^* を parameter と思い, parameter らしく λ と表すことにしよう. このようにした方が, 後の議論がわかりやすくなるという利点がある. また, $\lambda_0^\pm = \frac{a_0^\pm \beta\gamma}{bc + \beta\gamma}$ と定義し, λ_0^+ と λ_0^- との区別をする必要がない場合にはまとめて λ_0 と表すことにしよう.

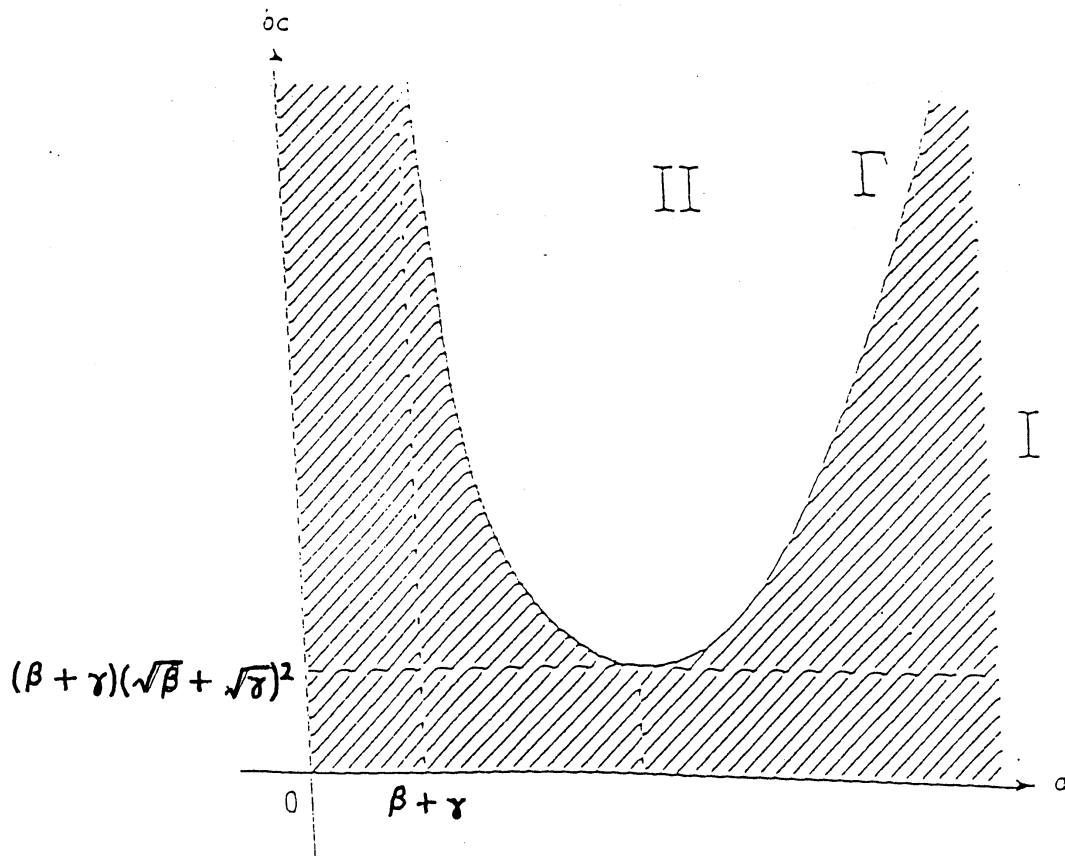


図 1:

新しく未知関数を

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u^* \\ v - v^* \\ w - w^* \end{pmatrix}$$

によって変換すると、次のように変形できる.

$$(P.1) \quad \begin{cases} U_t = \Delta U - (U + \lambda)(U + W) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ V_t = d_1 \Delta V + bU - \beta V & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ W_t = d_2 \Delta W + cV - \gamma W & \text{in } \Omega \times (0, \infty). \end{cases}$$

更に

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u^* \\ v - v^* \\ w - w^* \end{pmatrix}, \\ L_0 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & d_1 \Delta & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & -\lambda_0 \\ b & -\beta & 0 \\ 0 & c & -\gamma \end{pmatrix}, \\ f(\lambda, X) = -(\lambda - \lambda_0) \begin{pmatrix} U + W \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -U(U + W) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

とおく. ただし, 作用素 L_0 は Neumann 境界条件 (B.C) のもとで考える. そうすると (P.1) は

$$(P.2) \quad \frac{dX}{dt} = L_0 X + f(\lambda, X)$$

のように変形できる.

新しく未知数 ρ を導入して (P.2) の $2\rho\pi$ 周期を持つ, non-trivial な解を見つけることをめざす. そこで, unknown な周期が方程式に現れるように $t = \rho\tau$ という変換をして (P.2) を次の方程式に書き直す.

$$(P.3) \quad \frac{dX}{dt} = \rho(L_0 X + f(\lambda, X)).$$

ここで注意しておかなければいけないことがある. それは, Theorem 1 では方程式 (P) を L^p -空間で考えていたわけだが, これからの話では, 次のような関数空間 X, Y で解析を進めることである.

$$X = \{u \in C_{2\pi}^{2+2l, 1+l}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, \infty)\}, Y = C_{2\pi}^{2l, l}(\Omega), \quad 0 < l < 1/2.$$

L^p -framework のままでも話を進めていくことは可能であると予想されるが, Hopf 分岐解の存在, 特に, その軌道漸近安定性を示すには, X, Y の空間で考えた方が計算がやりやすいという利点がある. これは積分方程式として (P.3) を扱うか, 微分方程式のままで扱うかの相違といってもよい. さて,

$$(P.4) \quad F(\lambda, \rho, X) \equiv \frac{dX}{dt} - \rho(L_0 X + f(\lambda, X)).$$

と F を定義する. F は, $R \times R \times X^3$ から Y^3 への写像となっている.

Lemma 2.1 (P.4) の線形部分, 即ち,

$$(2.3) \quad \frac{dX}{d\tau} - \rho \left\{ \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & d_1 \Delta & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ b & -\beta & 0 \\ 0 & c & -\gamma \end{pmatrix} \right\} X = 0,$$

は, $\rho = \rho_0 (\equiv 1/\sqrt{(\beta + \gamma)\lambda_0 + \beta\gamma})$, $\lambda = \lambda_0$ において, non-trivial な 2π 周期解を持つ.

L, L^* を, X^3 から Y^3 への写像として, 次のように定義する.

$$(2.4) \quad L = \frac{d}{d\tau} - \rho_0 L_0, \quad L^* = -\frac{d}{d\tau} - \rho_0 L_0^*,$$

ここで,

$$L_0^* = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & d_1 \Delta & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_0 & b & 0 \\ 0 & -\beta & c \\ -\lambda_0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

ゼロ Neumann 境界条件のもとでの $-\Delta$ のゼロ固有値に対する固有関数を $\phi_0 = 1/\sqrt{|\Omega|}$ で決める.

Lemma 2.2 (i) $\ker L = \text{span} \{X_0, X_1\}$. ただし,

$$X_0 = \text{Re } \Phi(\tau), \quad X_1 = \text{Im } \Phi(\tau).$$

ここで,

$$\Phi(\tau) = e^{i\tau} \begin{pmatrix} (\beta + \gamma)(\frac{i}{\rho_0} - \lambda_0) \\ b(\frac{i}{\rho_0} + \gamma) \\ bc \end{pmatrix} \phi_0.$$

(ii) $\ker L^* = \text{span} \{\bar{X}_0, \bar{X}_1\}$. ただし,

$$\bar{X}_0 = \text{Re } \Psi(\tau), \quad \bar{X}_1 = \text{Im } \Psi(\tau).$$

ここで,

$$\Psi(\tau) = e^{i\tau} \begin{pmatrix} -bc \\ c(\frac{i}{\rho_0} - \lambda_0) \\ (\beta + \lambda_0)(\frac{i}{\rho_0} + \gamma) \end{pmatrix} \phi_0.$$

$f, g \in X^3$ に対して,

$$(2.5) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \int_0^{2\pi} (f, g) d\tau dx$$

と定義する. ただし, $(\cdot, \cdot)$ は R^3 の内積を表すことにする. $Z = (\ker L^*)^\perp$ と取り, X^3 を次のように直和分解する.

$$X^3 = \ker L \oplus Z$$

$h \in X^3$ に対して, $\alpha, \beta \in R$ と, $z \in Z$ が決まり,

$$h = \alpha X_0 + \beta X_1 + z$$

と表現することができる. 実際, $\langle h, \tilde{X}_0 \rangle, \langle h, \tilde{X}_1 \rangle$ を計算すれば,

$$\begin{pmatrix} \langle h, \tilde{X}_0 \rangle \\ \langle h, \tilde{X}_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle X_0, \tilde{X}_0 \rangle & \langle X_1, \tilde{X}_0 \rangle \\ \langle X_0, \tilde{X}_1 \rangle & \langle X_1, \tilde{X}_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

となり,

$$\det \begin{pmatrix} \langle X_0, \tilde{X}_0 \rangle & \langle X_1, \tilde{X}_0 \rangle \\ \langle X_0, \tilde{X}_1 \rangle & \langle X_1, \tilde{X}_1 \rangle \end{pmatrix} \neq 0,$$

を示すことができる. これより, (α, β) が決まる. そして, $z = h - (\alpha X_0 + \beta X_1)$ とおけば, $z \in (\ker L^*)^\perp$ となる.

Theorem 2 (Hopf 分岐解の存在)

正定数 η と連続微分可能な関数 $(\hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{Z}) \in C^1((- \eta, \eta); R \times R \times Z)$ が存在して, 次の (i), (ii) を満足する;

(i) $F(\rho(\varepsilon), \lambda(\varepsilon), X(\varepsilon)) = 0$ for $|\varepsilon| < \eta$, ここで,

$$\begin{aligned} X(\varepsilon) &= \varepsilon(X_0 + \hat{Z}(\varepsilon)), \hat{Z} \in Z \\ \rho(\varepsilon) &= \rho_0 + \hat{\rho}(\varepsilon), \\ \lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \hat{\lambda}(\varepsilon), \end{aligned}$$

(ii) $\hat{Z}(0) = 0, \hat{\rho}(0) = 0, \hat{\lambda}(0) = 0$, and $\hat{\lambda}(\varepsilon) \neq 0$ if $\varepsilon \neq 0$.

Theorem 2 で示されていることは, $\lambda = \lambda_0^+, \lambda_0^-$ いずれの点においても, $X = 0$ から周期解が分岐するということである. 方程式 (P) に立ちかえて考えるならば, 定常解 ${}^t(u^*, v^*, w^*)$ から $a = a_0^+$ および $a = a_0^-$ いずれの点においても Hopf 分岐が起きるということである. (図 2 参照)

Theorem 2 で得られた Hopf 分岐解の軌道漸近安定性を調べたい. まず, その定義から説明しよう. X を Banach 空間とする. X で定義された B は sectorial linear operator とする. $g(t, x)$ を, $R \times X^\alpha$ から X への連続微分可能な関数とする. 任意の $(t, x) \in R \times X^\alpha$ に対して, $g(t+p, x) = g(t, x)$ を満たすと仮定する. 次の方程式を考える.

$$(2.6) \quad \frac{dx}{dt} + Bx = g(t, x), \quad t > 0,$$

$x_0 \in X$ を初期値とする (2.6) の解を, $x(t, x_0)$ と表す. $x_p(t)$ を (2.6) の p -periodic な解とすると, その安定性を次のように定義する.

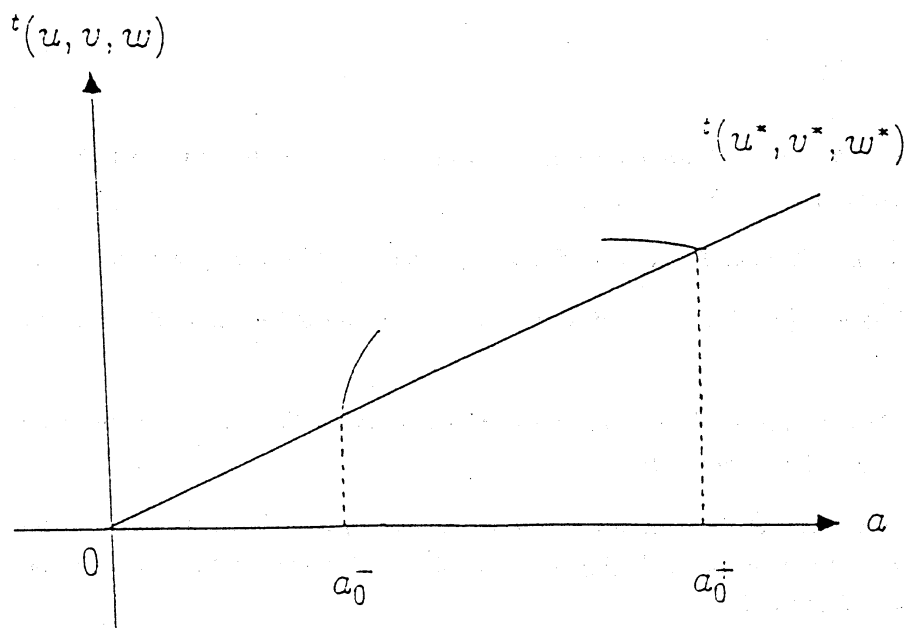


図 2:

Definition 2 (軌道漸近安定性)

(i) $x_p(t)$ が X^α で軌道安定 (orbitally stable) であるとは,

$$\Gamma = \{x_p(t), 0 \leq t \leq p\} \subset X^\alpha$$

が安定であることである。即ち、 Γ の任意の近傍 $U (\subset X^\alpha)$ に対して Γ のある近傍 $V (\subset X^\alpha)$ が存在して、もし $x_1 \in V$ ならば、 $x(t; x_1) \in U$ for $\forall t \geq 0$ となることである。

(ii) $x_p(t)$ が X^α で軌道漸近安定 (orbitally asymptotically stable) であるとは、(i) の条件に加えて、次のことが成立することである。

$$\text{dis}(x(t, x_1), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ in } X^\alpha \text{ for } \forall x_1 \in V \text{ となることである。}$$

Theorem 3 Theorem 2 で得られた、 $\rho^\pm(\varepsilon)$, $\lambda^\pm(\varepsilon)$ (ただし、 $\rho^+(\varepsilon)$, $\lambda^+(\varepsilon)$ (resp. $\rho^-(\varepsilon)$, $\lambda^-(\varepsilon)$) はそれぞれ λ_0^+ (resp. λ_0^-) からの分岐関数), は次の (i), (ii) を満足している。

$$(i) \frac{d\rho^\pm}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \frac{d\lambda^\pm}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0.$$

$$(ii) (a) \exists k_1 \text{ が存在し, } bc < k_1 \text{ ならば, } \frac{d^2\lambda^-}{d\varepsilon^2}|_{\varepsilon=0} > 0.$$

$$(b) \exists k_3, \exists k_4 \text{ が存在し, } bc < k_3 \text{ ならば, } \frac{d^2\lambda^+}{d\varepsilon^2}|_{\varepsilon=0} < 0. \quad bc > k_4 \text{ ならば, } \frac{d^2\lambda^+}{d\varepsilon^2}|_{\varepsilon=0} > 0.$$

Remark 1 Theorem 3 で、(ii)(a) の $k_1 < bc$, (ii)(b) の $k_3 < bc < k_4$ のときに、 $\frac{d^2\lambda^\pm}{d\varepsilon^2}|_{\varepsilon=0}$ の符号については、まだ判定できていない。

Theorem 3 と CR 理論 [CR] を組み合わせると 次の Theorem 4 になる。

Theorem 4 (i) $bc < k_1$ のとき、 $\lambda = \lambda_0^-$ から分岐する Hopf 分岐解 は軌道漸近安定である。

(ii) $\lambda = \lambda_0^+$ から分岐する Hopf 分岐解 は、

(a) $bc < k_3$ のとき、軌道漸近安定である。

(b) $bc > k_4$ のとき、不安定である。

参考文献

- [H] D.Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math. 840, Springer verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1981.
- [Y] Y.Yamada, *A Certain Class of Reaction-Diffusion Systems with feedback effects*, to appear. in *Adv. Math. Sci. Appl.*
- [S] J.Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1982.
- [MM] J.Marsden & M.McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, *Applied Mathematical Sciences 19*, Springer, New York 1978.
- [CRW] G.Caristi-K.P.Rybakowski-T.Wessolek, *Persistence and Spatial Patterns in a One-Predator-Two-Prey Lotka-Volterra Model with Diffusion*, *Annali di Matematica pura ed applicata (TV)*, Vol.CLXI (1992), pp.345-377.
- [CR] M.G.Crandall-P.H.Rabinowitz, *The Hopf Bifurcation Theorem in Infinite Dimensions*, *Arch. Rational. Mech. Anal*, 67(1977), pp.53-72.