

再帰的Markov過程のPotential核の固有値 について

神戸商科大学 高須 清澄

§1. 序

確率論とPotential論の関係をKakutani-Doob-Hunt等は
hitting probabilityを用いて説明した。一方capacitary potential
を確率論によつて説明すること加Kac-Ciesielski等によつて
行なわれた。そこでの興味ある結果の一つはCapacitary
potentialをPotential核の積分作用素としての固有値と固有函
数で表現することである。

上の場合のPotential核はTransientな場合に対応するのであ
るが、M-Kacは二次元Brown運動の場合にもこれと類似な結果
が成立することを示し[1], 対数Potentialの負の固有値がその対数
Potentialを考える集合のRobin定数に關係することを示した。こ
のことは一方J-Tourtman[2]によつて解析的に示されている。

ここでは上のKacの結果をある種の再帰的なMarkov過程にも
拡張出来ることを示す。

§2. 仮定と結果

S を局所Compactで第二可算公理をみたすHausdorff空間とす
る。 S 上の位相的 σ -集合体 B 上の正のRadon測度を $m(dx)=dx$ と

する。\$S\$ 上の Markov 過程で次の仮定 1, 2, 3. をみたすものを考える。

仮定 1. Markov 過程 \$\{x_t, P_x, x \in S\}\$ の推移確率 \$P_t(x, A) = P_x(x_t \in A)\$ の Laplace 変換 \$R_\alpha(x, A)\$ (\$\alpha > 0\$) は \$m(dx)\$ に対して絶対連続で、その density function \$R_\alpha(x, y)\$ は \$R_\alpha(x, y) = R_\alpha(y, x)\$ (\$x, y \in S\$) となる。

仮定 2. 次のような函数 \$\varphi(\alpha), k(x, y)\$ が存在する。広義一様に \$\alpha \rightarrow 0\$ の時 \$|R_\alpha(x, y) - \varphi(\alpha) - k(x, y)|\$ は 0 に収束する。ただし、\$R_\alpha(x, y) = \infty\$ ならば \$k(x, y) = \infty\$ とする。更に \$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(\alpha) = \infty\$。

仮定 3. \$\Omega\$ を \$S\$ 上の固定された compact 集合とし、\$k(x, y)\$ による \$L^2(\Omega)\$ 上の積分作用素 \$Kf(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y) dy\$ (\$f \in L^2(\Omega)\$) は \$L^2(\Omega)\$ の compact 作用素を与える。ただし \$m(\Omega) > 0\$ とする。

これらの仮定のもとで次の定理が M-Kac [1] と同様にして得られる。

定理 1. 作用素 \$K\$ は高々一つしか負の固有値を持たない。

定理 2. 測度 \$\mu\$ を \$\Omega\$ の平衡測度とすると、\$C = \int_{\Omega} k(x, y) \mu(dy)\$ としたとき、\$K\$ の負の固有値が一つ存在するための必要条件是平衡定数 \$C\$ が負であること。

§3. 予備定理

定理を証明するためにいくつかの予備定理を述べよう。

$V_A(x)$ を A の 特性函数, u を正数として

$$G_\alpha^u(x, A) = E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} \exp \left\{ -u \int_0^t V_\Omega(x_2) dz \right\} V_A(x_t) dt \right]$$

と定義すれば G_α^u は次の Kac の公式をみたす。

予備定理 1. (Kac の公式)

$$\begin{aligned} (1) \quad R_\alpha(x, A) - G_\alpha^u(x, A) &= u \int_\Omega G_\alpha^u(x, dy) R_\alpha(y, A) \\ &= u \int_\Omega R_\alpha(x, dy) G_\alpha^u(y, A) \quad (\forall A \in \mathcal{B}) \end{aligned}$$

$$\text{よって (2) } 1 - \alpha G_\alpha^u(x, \Omega) = \alpha u \int_\Omega R_\alpha(x, dy) G_\alpha^u(y, \Omega) = u G_\alpha^u(x, \Omega).$$

予備定理 2. $G_\alpha^u(x, A)$ ($A \subset \Omega$) は A を Ω 内に固定したとき $\alpha \downarrow 0$ とすれば単調増加で $G_0^u(x, A)$ に近づく。また $G_0^u(x, A) \leq \frac{1}{u}$ 。

証明 $G_\alpha^u(x, A)$ の定義より単調増加は明らか。また $G_\alpha^u(x, A) \leq G_\alpha^u(x, \Omega)$ 。

$$\begin{aligned} G_\alpha^u(x, \Omega) &\leq G_0^u(x, \Omega) \\ &= E_x \left[\int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{u} \frac{d}{dt} \exp \left\{ -u \int_0^t V_\Omega(x_2) dz \right\} \right\} dt \right] \\ &= \frac{1}{u} - \frac{1}{u} \lim_{t \rightarrow \infty} E_x \left[\exp \left\{ -u \int_0^t V_\Omega(x_2) dz \right\} \right] \\ &\leq \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

次に $g(x, u) = \lim_{\alpha \downarrow 0} g(\alpha) (1 - u G_\alpha^u(x, \Omega))$ を考える。これは定義可能で次の性質をみたす。

予備定理 3

(3) $g(x, u)$ は固定された u に対して, x について有界で

$$\int_\Omega g(x, u) dx = \frac{1}{u}.$$

(4) $P(u) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \varphi(\alpha) (1 - u \int_{\Omega} \varphi(\alpha) \alpha G_{\alpha}^u(y, S) dy)$ とおけば,

$$g(x, u) = P(u) - u \int_{\Omega} k(x, y) g(y, u) dy.$$

[証明] Kac[1]による。

予備定理4 compact operator K が固有値 λ_j とそれに属する固有函数 ϕ_j ($\|\phi_j\|=1$) を持てば ($\lambda_j=0$, 各重複度も入れて, completeにとる。)

$$(5) \quad (P(u))^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (u^{-1} + \lambda_j)^{-1} \left(\int_{\Omega} \phi_j(y) dy \right)^2 \quad (u \neq -\lambda_j^{-1})$$

が成立する。

[証明] g が有界函数だから $L^2(\Omega)$ に属し, $\{\phi_j\}$ で展開出来るから予備定理3を用いて整理すれば上の結果となる。

予備定理5 Ω は capacity 正だから potential 核 k について平衡測度 μ_0 が存在する。 $C = \int k(x, y) \mu_0(dy)$ (Ω 上 capacity 0 の集合を除いて) としたとき

$$(6) \quad C \leq \lim_{u \rightarrow \infty} P(u) (\equiv C_0)$$

$$(7) \quad 1 = C_0 \sum \lambda_j^{-1} \left(\int_{\Omega} \phi_j(y) dy \right)^2.$$

[証明] (6) は予備定理3と平衡測度の定義からただちに出る。

また (7) は予備定理4で $u \rightarrow \infty$ として得られる。

§3. 定理の証明

[定理1の証明] [1]と同様.

[定理2の証明] $C > 0$ とする. 定理1より負の固有値は高々1つだから $\lambda_1 < 0$ と仮定する. K は $N = \{f \in L^2 \mid \int_{\Omega} f(x) dx = 0\}$ 上で non-negative だから $\int \phi_1(y) dy \neq 0$.

$$(P(u))^T = (u^T + \lambda_1)^T \left(\int \phi_1(y) dy \right)^2 + \sum_{j=2}^{\infty} (u^T + \lambda_j)^T \left(\int \phi_j(y) dy \right)^2$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(u) \geq C > 0$$

$$\lim_{u \downarrow -\lambda_1^{-1} > 0} (P(u))^T = -\infty$$

だから $u > -\lambda_1^{-1}$ で $(P(u))^T = 0$ となる. 一方 $P(u)$ は $u \geq \lambda_0 > 0$ で有界だから, これは矛盾である. 次に $C = 0$ のとき $P(u) \geq 0$.
これは $(P(u))^T = \sum_{j=1}^{\infty} (u^T + \lambda_j)^T \left(\int \phi_j(y) dy \right)^2$ ($u \neq -\lambda_1^{-1}$)
より λ_j が負になることと許さない.

注意 $k(x, y)$ が連続な場合には $C = C_0$ で $C < 0$ は十分条件である.

§4. 例

仮定1, 2, 3. をみたす例を示す.

1. 次元 λ ($1 \leq \lambda \leq 2$) 次元安定過程 [3]

$$k_{\lambda}(x, y) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} (\alpha + |z|^{\lambda})^{-1} \cos(x-y) z^{\lambda} dz$$

$1 < \lambda \leq 2$ のときには

$$q_{\lambda}(\alpha) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} (\alpha + |z|^{\lambda})^{-1} dz$$

$$k_{\lambda}(x, y) = \left(2 P(\lambda) \cos \frac{\pi \lambda}{2} \right)^{-1} |x-y|^{\lambda-1}$$

$\lambda = 1$ のときには

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\alpha} + C_1 \quad (C_1 \text{ (定数)})$$

$$k(x, y) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{|x-y|}$$

2. 次元 Brown 運動 [1][3]

$$r_\alpha(x, y) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi t} \exp \left\{ -\frac{|x-y|^2}{2t} - \alpha t \right\} dt$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{2}{\alpha} + C_2 \quad (C_2 \text{ (定数)})$$

$$k(x, y) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{|x-y|}$$

3. 一次元の対称な出生死滅過程. $\lambda \neq 1$ する時間が平均 $\frac{1}{\alpha}$ の指数分布に従う。[4]

$$r_\alpha(n, m) = (\alpha(c+2\alpha))^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{c+\alpha - \sqrt{\alpha(c+2\alpha)}}{c} \right)^{|n-m|} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi(\alpha) = (\alpha(c+2\alpha))^{-\frac{1}{2}}$$

$$k(n, m) = -|n-m|$$

これらの例 1, 2, 3. のすべては, k を compact 集合 Ω ($m(\Omega) < \infty$) 上の $L^2(\Omega, m)$ 上で考えれば, k は $L^2(\Omega \times \Omega)$ に属するので k を積分核とする $L^2(\Omega)$ の作用素は compact 作用素を与える。

上の例 1 の $\lambda=1$ の場合と例 2 の場合は k が定符号の値を取らないから考える集合 Ω によって平衡定数 c の符号も変る。

[参考文献]

[1] M. Kac : On some probabilistic aspects of classical analysis.

Amer. Math. Month. No. 6. vol 77. (1970).

[2] J. Troutman : The logarithmic potential operator.

Ill. J. of Math., 11 (1967)

[3] S. Watanabe : Seminar on probability vol 13 安定過程.

[4] W. Feller : Probability theory and its applications. vol 2,
Wiley, New York, (1966).