

等方乱流中の渦層—渦管遷移

京大理 岸場 清悟 (Seigo Kishiba)

京大数理研 大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

I. はじめに

滑らかな初期条件より出発した減衰乱流の高渦度領域は、その発達過程において、はじめ層状の構造をなし、その後管状になる [1-5]。この遷移過程は一般に、渦層が自らの誘導する速度場によって巻き上がって管になるという、Kelvin-Helmholtz 不安定性によるとされている [5,6]。

今回我々は、上記の渦層—渦管遷移現象をヘリカル分解によって観察し、遷移のメカニズムについての新たな見地を得た。

II. ヘリカル分解

A. 支配方程式

長さ 2π の立方体での周期境界条件における非圧縮粘性流体の運動は、3次元 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

および非圧縮条件

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

で記述される。渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ についての方程式は、(1) から

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

となる。

周期境界条件のもとでは、速度、渦度はそれぞれ、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}], \quad (4)$$

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\omega}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] \quad (5)$$

と展開される。ただし、 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ 、 $\tilde{\omega}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ はそれぞれ速度、渦度のフーリエ変換である。

$\lambda = p^2 + q^2 + r^2 (\neq 0)$ (p, q, r は整数) とすると、速度は次のようにベルトラミ分解される [7-9]。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} (\mathbf{u}_{\lambda}^{+}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{\lambda}^{-}(\mathbf{x})), \quad (6)$$

ただし、

$$\mathbf{u}_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|^2 = \lambda} \tilde{\mathbf{u}}^{\pm}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \pm \tilde{\omega}(\mathbf{k}) / |\mathbf{k}|) \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{u}_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x})$ は各波数での正の (負の) ヘリシティに対応する速度である [10]。「ベルトラミ」の名は $\mathbf{u}_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x})$ が、

$$\omega_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{u}_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x}) = \pm \sqrt{\lambda} \mathbf{u}_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

という性質を満たすことから名付けられている。さらに正の (負の) ヘリシティに対応する速度を、

$$\mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \mathbf{u}_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

と表す。これと同様に、 $\omega_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{u}_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x})$ 、 $\omega^{\pm}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{x})$ を定義する。 $\int \omega^{+}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^{+}(\mathbf{x}) > 0$ 、 $\int \omega^{-}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^{-}(\mathbf{x}) < 0$ 、 $\int \omega_{\lambda}^{\pm}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_{\lambda}^{\mp}(\mathbf{x}) = 0$ (複号同順) に注意して、 $\omega^{\pm}(\mathbf{x})$ を正の (負の) ヘリシティに対応する渦度と呼ぶ。

さて、フーリエ変換された Navier-Stokes 方程式は、

$$\frac{\partial \tilde{u}_{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial t} = -ik_{\gamma} P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \tilde{u}_{\beta}(\mathbf{p}) \tilde{u}_{\gamma}(\mathbf{q}) - \nu |\mathbf{k}|^2 \tilde{u}_{\alpha}(\mathbf{k}) \quad (11)$$

となる。ただし、

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{|\mathbf{k}|^2} \quad (12)$$

である。

そこで、各ベルトラミモードについての支配方程式は、

$$\frac{\partial \tilde{u}_\alpha^\pm(\mathbf{k})}{\partial t} = -\frac{i}{2} k_\gamma Q_{\alpha\beta}^\pm(\mathbf{k}) \sum_{p+q=\mathbf{k}} (\tilde{u}_\beta^+(p) + \tilde{u}_\beta^-(p)) (\tilde{u}_\gamma^+(q) + \tilde{u}_\gamma^-(q)) - \nu |\mathbf{k}|^2 \tilde{u}_\alpha^\pm(\mathbf{k}), \quad (13)$$

$$Q_{\alpha\beta}^\pm(\mathbf{k}) = P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \mp i \frac{\epsilon_{\alpha\beta\delta} k_\delta}{|\mathbf{k}|} \quad (14)$$

となる。2階テンソル $P_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$, $Q_{\alpha\beta}^\pm(\mathbf{k})$ は $k_\alpha P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = 0$, $k_\alpha Q_{\alpha\beta}^\pm(\mathbf{k}) = 0$ を満たす。

従って、物理空間上では

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\pm}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) \cdot \nabla (\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) = -\frac{1}{2} \nabla p \pm \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^\pm \quad (15)$$

となる。ここで $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ は

$$\tilde{\mathbf{g}}_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{-ik_\beta}{|\mathbf{k}|} \sum_{p+q=\mathbf{k}} \tilde{u}_\alpha(p) \tilde{u}_\beta(q) \quad (16)$$

のフーリエ変換である。同様に、(15) より

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^\pm}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \times ((\boldsymbol{\omega}^+ + \boldsymbol{\omega}^-) \times (\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) \mp \nabla \times \mathbf{g}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}^\pm \quad (17)$$

となる（複号同順）。(15), (17) 式中で、各モード毎に符号の異なる $\pm \nabla \times \mathbf{g}$ の項がある点にも注意を要する。

III. 結果

A. 数値計算の方法

数値計算は格子点 128^3 で擬スペクトル法で行なった。このときの最大波数は 64 になる。時間発展は Runge-Kutta-Gill 法で時間刻み $\delta = 0.005$ で計算した。粘性は $\nu = 0.004$ とした。

異符号のヘリシティに対応する渦度 $\boldsymbol{\omega}^\pm(\mathbf{x})$ 間の相互作用を調べるために、まずできるだけ単純な初期条件について数値計算を実行した。初期条件として、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^-(\mathbf{x}), \quad (18)$$

なる速度場を用いた。ここで、

$$\mathbf{u}^+(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin z + \cos y \\ \sin x + \cos z \\ \sin y + \cos x \end{pmatrix} \quad (19)$$

および

$$\mathbf{u}^-(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos z + \sin y \\ \cos(x + \pi/2) + \sin z \\ \cos y + \sin(x + \pi/2) \end{pmatrix} \quad (20)$$

はそれぞれ正(負)のヘリシティをもつABC流 [11] である。位相シフト $\pi/2$ は $|\omega^+|$ と $|\omega^-|$ の大きな領域が初期状態で重ならないように設定した(図3参照)。速度場 $\mathbf{u}^+$ と $\mathbf{u}^-$ はそれぞれ $\omega^+ = \nabla \times \mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^+$, $\omega^- = \nabla \times \mathbf{u}^- = -\mathbf{u}^-$ を満たすベルトラミ流であるが、それらの和 $\mathbf{u}$ はベルトラミ流にはなっていない。また $\omega(\mathbf{x}) = \omega^+(\mathbf{x}) + \omega^-(\mathbf{x})$ である。

図1にエネルギーとエネルギー散逸の時間発展を示した。エネルギー散逸は $t \approx 4$ で最大となる。このとき、コルモゴロフ波数も最大値(60程度)をとる。このあたりのエネルギースペクトル $E(k)$ は1桁たらずの $k^{-5/3}$ の領域を持っている。また散逸スペクトル $k^2 E(k)$ のピークを与える波数は約14で、じゅうぶん最大波数(64)の中に入っている。

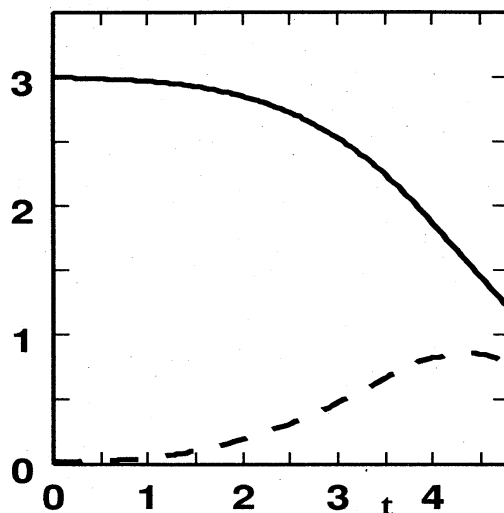


図1：エネルギー(実線)とエネルギー散逸(破線)の時間発展

B. 高渦度領域の振舞い

エンストロフィー $|\omega(\mathbf{x})|^2$ とエネルギー散逸 $S^2 = S_{ij}S_{ij}$ の初期状態を図2に示した。この2つの量は同じ形をしているが、位相がずれている。

図3は初期状態の $|\omega^+(\mathbf{x})|^2$ と $|\omega^-(\mathbf{x})|^2$ の等値面である。はじめ、 $|\omega^+(\mathbf{x})|^2$ (または $|\omega^-(\mathbf{x})|^2$) と $|\omega(\mathbf{x})|^2$ の位置は食い違っている。

その後の各時間のエンストロフィー $|\omega(x)|^2$ とエネルギー散逸 S^2 の等値面を見ると、高渦度領域がはじめ層状になり、その後渦管に変わっている。

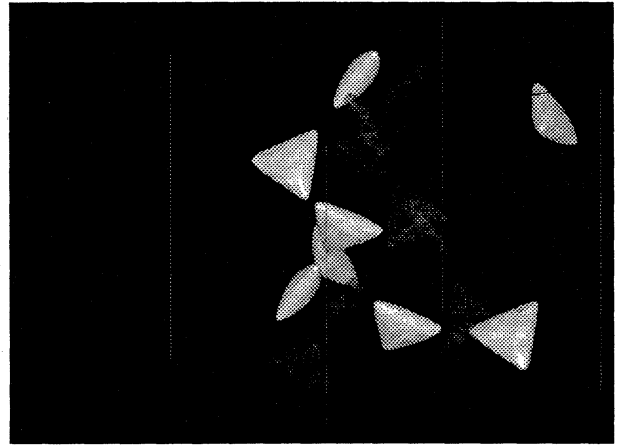
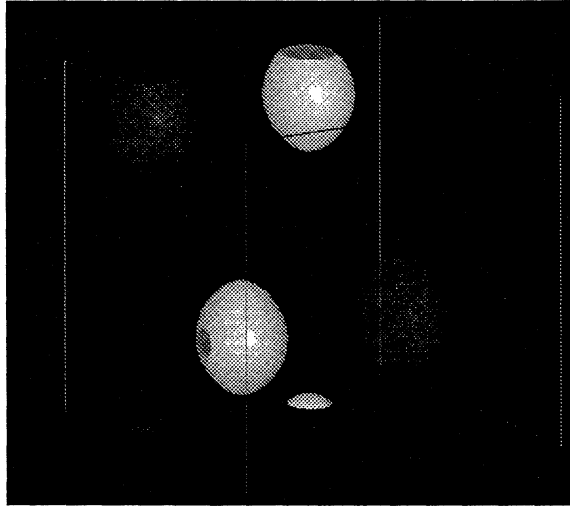


図2：初期状態でのエンストロフィー $|\omega(x)|^2$ (白) 図3：初期状態での $|\omega^+(x)|^2$ (白) と $|\omega^-(x)|^2$ とエネルギー散逸 $S^2 = S_{ij}S_{ij}$ (灰) の等値面 (最 (灰) の等値面 (最大値の 97.5%) 大値の 97.5%)

$\omega^\pm(x)$ の一般的性質を知るために、 $|\omega^+(x)|^2$ と $|\omega^-(x)|^2$ の時間発展を調べた。初期段階では、正 (または負) のヘリシティに対応する高 $|\omega^\pm|^2$ 領域は層状の構造をなす ($t = 0.9$)。その後、2つの高 $|\omega^\pm|^2$ 領域が互いに近付き ($t = 1.2 - 1.6$)、それらが重なりあって渦管を作る ($t = 2.8$)。その後、高 $|\omega^\pm(x)|^2$ 領域は $|\omega(x)|^2$ と同様に消滅していく。

C. 物理的描像

ベルトラミ分解で見た各高 $|\omega^\pm|^2$ 領域の役割を明らかにするために、渦層から渦管への遷移過程を詳しく見てみよう。(図4、5)

$t = 1.2$ では $|\omega(x)|^2$ で見るとただ1つの渦層が発達しているが、これを $|\omega(x)^\pm|^2$ で見ると、大きな層 (主層) と小さな層の2つが重なりあっているのが分かる。小さい方の層は $t \approx 1.6$ までは大きくなっていくが、その後主層に吸収されてしまう。しかしその時に2つの主層が重なり合い、 $t = 2.0$ では渦管の前身が現れ、 $|\omega(x)|^2$ で見た高渦度領域と類似の構造になり始める。この後の時間でも、ベルトラミ分解で見た構造と高渦度領域の構造とは類似を保ちつづける。

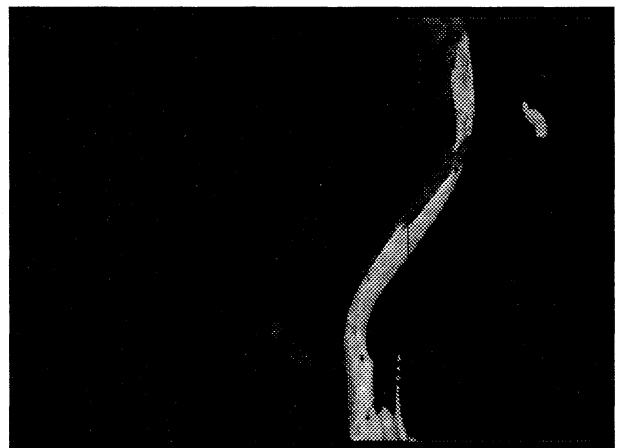
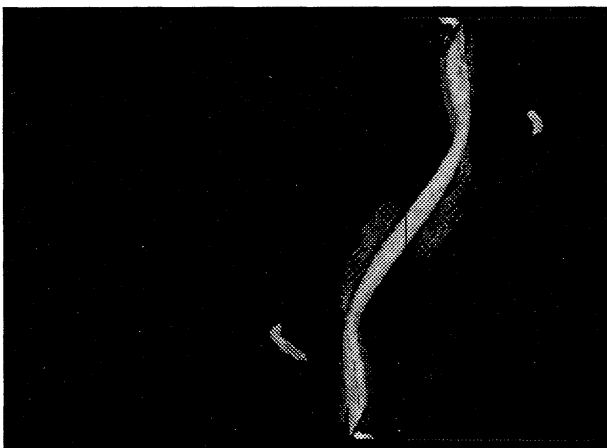
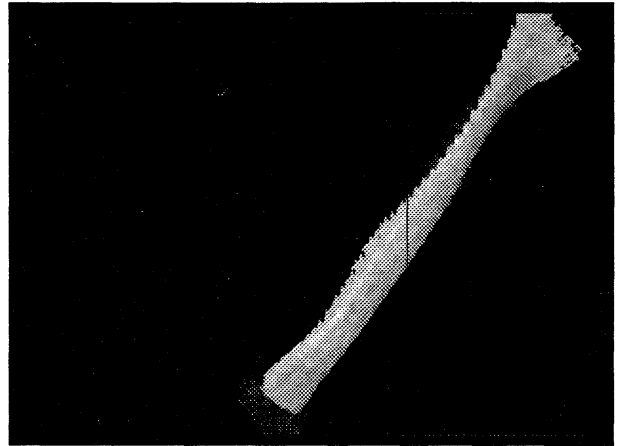
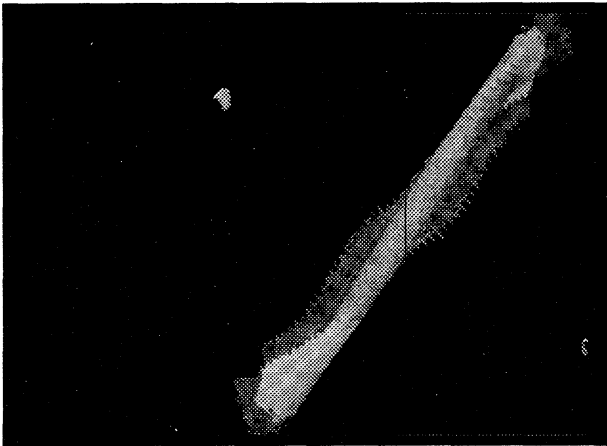
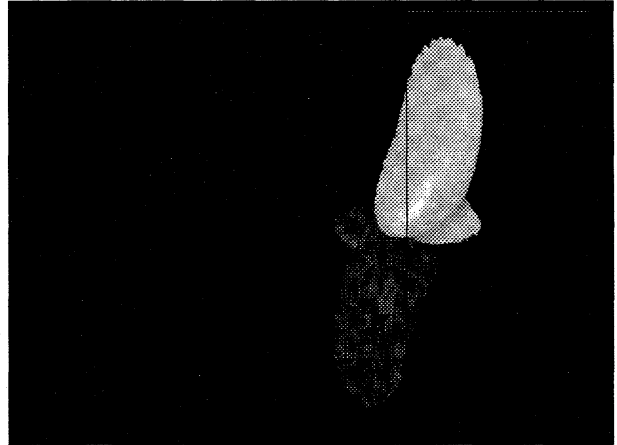
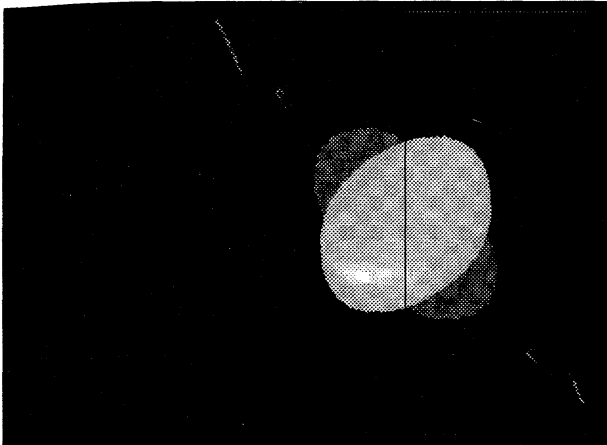


図4: エンストロフィー $|\omega(x)|^2$ (白) とエネルギー散逸 $S^2 = S_{ij}S_{ij}$ (灰) の等値面 (上) $t = 1.2$, (中) $t = 2.0$, (下) $t = 2.8$.
 図5: $|\omega^+(x)|^2$ (白) と $|\omega^-(x)|^2$ (灰) の等値面 (上) $t = 1.2$, (中) $t = 2.0$, (下) $t = 2.8$.

$t = 2.2 - 2.8$ の間ではひと組の高 $|\omega^\pm|^2$ 領域は渦管の中で相互作用し続ける。そして $t = 3.0$ では高 $|\omega^\pm|^2$ 領域の管が縦につながった渦管を見ることができた。この2つの管が重なったところで粘性散逸が起こり、それによって異符号のヘリシティを持つ領域が再びちぎれて、渦管は消滅していく。中間段階 ($t \approx 2$) では渦管はひと組の高 $|\omega^\pm|^2$ 領域が重なりあって作り出されていることがわかる。この内部のダイポール構造が渦管の周囲のエネルギー散逸のダイポール構造と対応することも分かった (図略)。

さらに興味深い現象として、遷移中における正負の高 $|\omega^\pm|^2$ 領域の位置関係の変化がある。図6に $t = 1.2, 2.0, 2.8$ での渦度ベクトルと各領域の関係を模式的に示した。 $t = 1.2$ では渦度ベクトルは高 $|\omega^-|^2$ 領域から高 $|\omega^+|^2$ 領域へ、その重なりあったところを通っている。この時の渦度ベクトルの向きは、渦度の伸長が外部からのシア一流によると考えると理解できる。ところが、その後渦管の形成につれて高 $|\omega^\pm|^2$ 領域の位置が入れ換わり、 $t = 2.8$ では渦度ベクトルが高 $|\omega^+|^2$ 領域から高 $|\omega^-|^2$ 領域へ向かっている。渦管ができると、管を通る渦度によって引き起こされる速度場によって自分自身を伸長させるが、この効果は管の中央部で強く、周辺部では弱い。この時の流線のねじれを考えると渦度が $|\omega^+|$ から $|\omega^-|$ へ向かうことが理解できる。

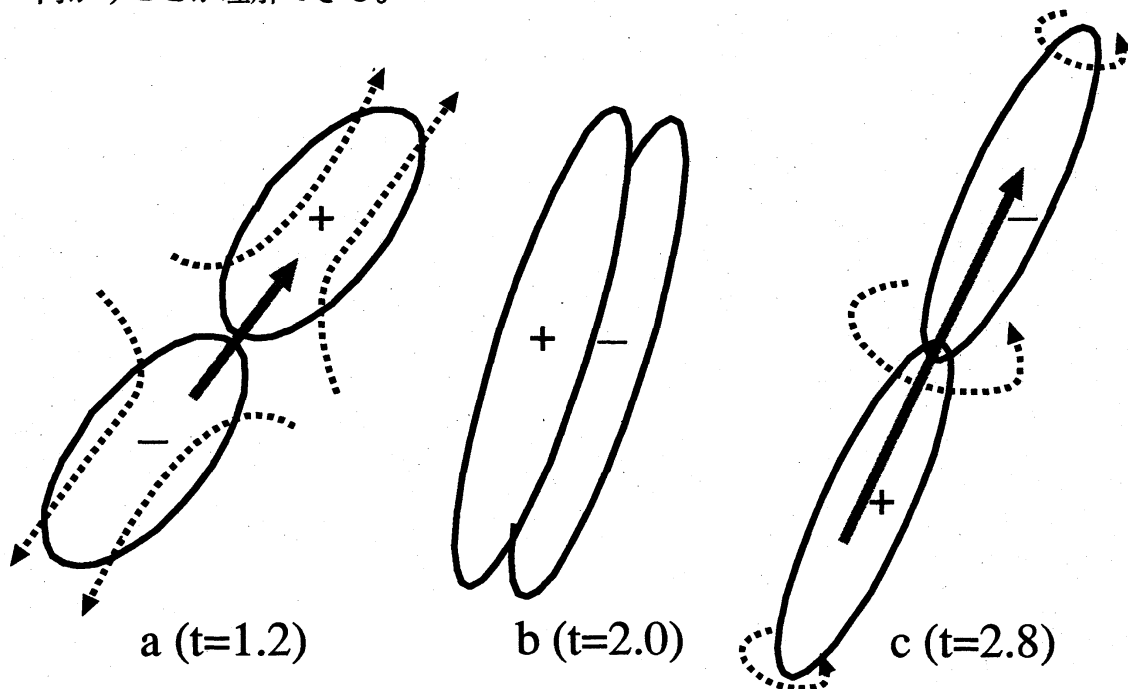


図6：渦層-渦管遷移過程における渦度ベクトルと高 $|\omega^\pm|^2$ 領域の位置関係の変化

→ は渦度ベクトル、aの点矢線は外部からのシア一流、cの点矢線は渦管自身が誘導する速度

IV. まとめ

渦層-渦管遷移をベルトラミ分解を用いて調べた結果、遷移過程について次のような知見を得た。

[1] 初期段階では高 $|\omega^\pm|^2$ の球状領域は薄くなりながら互いに近付く。渦度は $|\omega^-| \rightarrow |\omega^+|$ の方向を向いている。

[2] 発達した高 $|\omega^\pm|^2$ 領域が重なり合って管状の構造を作る。そしてさらに各領域は互いの内部を抜けて反対側へ移動していく。

[3] 渦管は $|\omega^\pm|^2$ が縦につながった形で作られる。この渦管は有限の長さを持つので、管の端では渦度が弱い。従って、速度場がねじれて、渦度は $|\omega^+| \rightarrow |\omega^-|$ の方向を向く。

実際、上記の過程はランダムな位相を持つ初期条件から出発した減衰乱流でも見られるものである。この過程は乱流中の渦度構造の形成に関わる基本的なメカニズムを示すと思われる。

REFERENCES

- [1] E.D. Siggia, "Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence," J. Fluid Mech., **107**, 375(1981).
- [2] M.E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag, B.G. Nickel, R. H. Morf and U. Frisch, "Small-scale structure of the Taylor-Green vortex", J. Fluid Mech., **130**, 411(1983).
- [3] M. Brachet, "The geometry of small-scale structures of the Taylor-Green vortex", C. R. Acad. Sci. Paris **311**, 775(1990).
- [4] G.R. Ruetsch and M.R. Maxey, "Small-scale features of vorticity and passive scalar fields in homogeneous isotropic turbulence," Phys. Fluids A. **3**, 1578(1991).
- [5] G.R. Ruetsch and M.R. Maxey, "The evolution of small-scale features structures in isotropic turbulence," Phys. Fluids A. **4**, 2747(1992).

- [6] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- [7] P. Constantin and A. Majda, "The Beltrami spectrum for incompressible fluid flows," *Commun. Math. Phys.* **115**, 435(1988).
- [8] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.
- [9] F. Walleffe, "The nature of triad interactions in homogeneous turbulence," *Physics of Fluids A* **4**, 2025(1992).
- [10] H.K. Moffatt, "The degree of knottedness of tangled vortex lines," *J. Fluid Mech.*, **35**, 117(1969).
- [11] T. Dombre, U. Frisch, J.M. Greene, M. Hénon, A. Mehr and A.M. Soward, "Chaotic streamlines in the ABC flows," *J Fluid Mech.* **167**, 353(1986).