

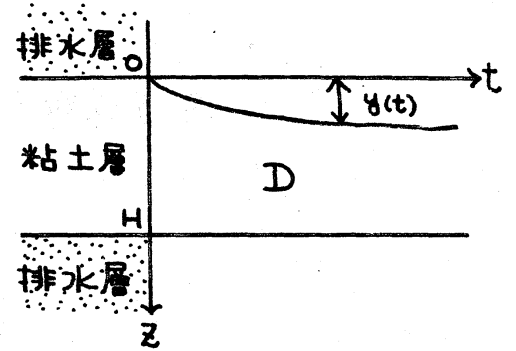
圧密係数の推定

京大 工 野木 達夫

大脇 弘

§ 1 序 水で飽和した粘土を圧縮すると、間隙水が徐々に排除され、これに伴って地盤の沈下が起こり強固になっていく現象を圧密と呼んでいる。この現象では、いつ頃沈下が終わる、地盤が十分強固になるのかの予測が重要な課題である。1次元のモデルについてこの現象は過剰間隙水圧のみたすべき方程式が定数係数の拡散方程式になることが示されたが、いろいろと現場の観測データが得られるにつれ、理論値と実測値の食い違いが問題になるようになってきた。筆者はこの理論で無視されていた沈下量の影響を考慮したモデルを考えたが([4])、ここではその上に方程式の係数(圧密係数)が時間に依存するとして沈下量の測定からこの圧密係数がどのような変化をするか求めることを考える。本稿ではこの圧密係数の決定問題が解けることの厳密な保証とその決定のためのアルゴリズムを与える。

§2 問題 右図のように上下両面を排水層でおおわれた厚さ H の粘土層の場合について考えると問題は次のように定式化される。



データ $\{\varphi(z), y(t)\}$ が与えられたとき、次の方程式系 [A] をみたす関数の組 $\{c(t), u(z, t)\}$ を求めること。

$$\begin{aligned}
 [A] \left\{ \begin{array}{ll} u_t = c(t) u_{zz} & \text{in } D = \{(z, t) \mid y(t) < z < H, 0 < t < T\} \\ u(y(t), t) = u(H, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(z, 0) = \varphi(z) \geq 0 & 0 \leq z \leq H \\ \varphi(0) = \varphi(H) = 0 & \\ y(t) = a - b \int_{y(t)}^H u(z, t) dz & 0 \leq t \leq T \\ y(0) = 0, a, b > 0 & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.1) \\ (2.2) \\ (2.3) \\ \\ (2.4) \end{array}
 \end{aligned}$$

ここで u は過剰間隙水圧、 y は沈下量を表し、 $c(t)$ のことを圧密係数と呼んでいる。データについて、 y は

$$0 < y(t) < \frac{H}{2} \quad 0 < t \leq T \quad (2.5)$$

$$y \in C^1[0, T], \quad 0 < m < \dot{y}(t) < M, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.6)$$

とし、 φ については

$$\varphi \in C^3[0, H], \quad |\varphi^{(4)}| < M_2 \quad (2.7)$$

と仮定する。

系[A]の解の定義を与えておこう。

定義 2.1 系[A]の解 $\{c(t), u(z, t)\}$ とは次の条件をみたすものをいう。

- i) $c(t) \in C[0, T], c(t) > 0$
- ii) $u \in C[\varphi(t) \leq z \leq H, 0 \leq t \leq T]$
 $u_z \in C[\varphi(t) \leq z \leq H, 0 < t \leq T]$
- iii) $u_t, u_{zz} \in C[\varphi(t) < z < H, 0 < t < T]$
- iv) 方程式(2.1)~(2.4)が満足される

いま(2.4)の両辺を t で微分し(2.2)を用いると(2.4)は

$$\dot{\varphi}(t) = b c(t) \{u_z(\varphi(t), t) - u_z(H, t)\} \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.8)$$

$$\varphi(0) = 0$$

と変形される。そこで変数変換 $t \rightarrow \theta$;

$$\theta(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau$$

を考え、 $U(z, \theta(t)) = u(z, t)$, $Y(\theta(t)) = \varphi(t)$ と $U(z, \theta)$, $Y(\theta)$ を定義すると、系[A]は次の方程式系[B]に変換されることになる。

$$[B] \left\{ \begin{array}{ll} U_\theta = U_{zz} & \text{in } D' = \{(z, \theta) | Y(\theta) < z < H, \\ & 0 < \theta < \Theta = \theta(T)\} \quad (2.9) \\ U(Y(\theta), \theta) = U(H, \theta) = 0 & 0 \leq \theta \leq \Theta \quad (2.10) \\ U(z, 0) = \varphi(z) \geq 0 & 0 \leq z \leq H \quad (2.11) \\ \varphi(0) = \varphi(H) = 0 \\ c(t) = \dot{\varphi}(t) / b \{U_z(Y(\theta), \theta) - U_z(H, \theta)\} & 0 \leq t \leq T \quad (2.12) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \int_0^t c(\tau) d\tau \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.13)$$

§3 差分法

近似解構成のために差分法を考える。空間格子間隔を h とし、 $Jh = H$ (J : 整数) とする。時間ステップ $\{t_n\}$ は $y(t_n) = (J-n)h$, $t_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k$ より決める。系(1)を解くために次の計算法を考える。

$$\frac{U_{j,n}^{(s)} - U_{j,n-1}^{(s)}}{k_n^{(s-1)}} = \frac{U_{j+1,n}^{(s)} - 2U_{j,n}^{(s)} + U_{j-1,n}^{(s)}}{h^2} \quad (3.1)^{(s)}$$

$$j = n+1, \dots, J-1$$

$$U_{n,n}^{(s)} = U_{J,n}^{(s)} = 0 \quad (3.2)^{(s)}$$

$$U_{j,0} = \varphi_j \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (3.3)^{(s)}$$

$$C_n^{(s)} = \frac{h}{b(V_n^{(s)} - W_n^{(s)} + \beta h^2)} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)^{(s)}$$

$$C_n^{(0)} = C_{n-1}, \quad C_0 = \frac{\dot{y}(0)}{b(\varphi'(0) - \varphi'(H))} \quad S = 1, 2, \dots \quad (3.5)^{(s)}$$

$$k_n^{(s-1)} = \theta_n^{(s-1)} - \theta_{n-1} = C_n^{(s-1)}(t_n - t_{n-1}) \quad (3.6)^{(s)}$$

記号の意味は $U_{j,n} = U(z_j, \theta_n)$, $z_j = jh$, $\theta_n = \sum_{p=1}^n k_p$, $\varphi_j = \varphi(z_j)$, $C_n = C(t_n)$, $V_n = (U_{n,n})_z = U_{n,n}/h$, $W_n = (U_{J,n})_z = -U_{J-1,n}/h$ で、 (s) は各時刻 t_n 毎に実行する逐次計算の回数を表わしている。また β は適当に大きな正の定数で (3.4) において分母に付加した βh^2 は逐次計算を収束させるためのものである。

§4 アプリオリ評価 (3.1)~(3.6)の解について考える。

$$\begin{array}{rcl}
 \text{補題 4.1} & 0 \leq U_{j,n} \leq A, \quad j = n, n+1, \dots, J & (4.1) \\
 & V_n \geq 0 & (4.2) \\
 & -A_1 \leq W_n \leq 0 & (4.3) \\
 & C_n > 0 & (4.4)
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (4.1) \\ (4.2) \\ (4.3) \\ (4.4) \end{array}} \right\} n=1, 2, \dots$$

ただし, $A_0 = \max_{0 \leq z \leq H} \varphi(z)$, $A_1 = \max_{0 \leq z \leq H} |\varphi'(z)|$

(証明) (4.1)は最大値原理より従う。したがって定義より

$V_n \geq 0$, $W_n \leq 0$ を得, これと(3.4)から(4.4)が従う。次に $W_n \geq -A_1$

を示すためにバーリヤ

$$\omega_{j,n} = \omega(z_j, \theta_n) = A_1(H - z_j)$$

を考える。この関数は(3.1)の形の方程式を満たし, かつ

$$\omega_{n,n} = A_1(H - z_n) > 0, \quad \omega_{J,n} = 0, \quad \omega_{j,0} = A_1(H - z_j) \geq \varphi(z_j)$$

であるから, 最大値原理より

$$\omega_{j,n} \geq U_{j,n}$$

$j = J-1$ とおくと $A_1 h \geq U_{J-1,n}$ となり, したがって

$$-A_1 \leq -U_{J-1,n}/h = W_n \text{ を得る。}$$

§5 逐次計算の収束性

$0 < p \leq n-1$ に対しては(3.1)~(3.6)の解 $(C_p, U_{j,p})$ が既に定められているとする。このとき $S \rightarrow \infty$ に対して(3.1)^(s)~(3.6)^(s)の解 $C_n^{(s)}$, $U_{j,n}^{(s)}$ が収束することを示す。

補題 5.1 $\{k_n\}$ が与えられているとき(3.1)~(3.3)を V_n, W_n について解くと

$$\begin{aligned}
V_n &= [1 - k_n G_\xi(z_{n+1}, \xi_n; \theta_n, \tau_{n-1})]^{-1} \\
&\times \left[-\varphi_{J-1} G(z_{n+1}, \xi_J; \theta_n, 0) + h \sum_{j=1}^{J-1} (\varphi_j)_\xi G(z_{n+1}, \xi_j; \theta_n, 0) \right. \\
&\quad \left. + h^2 \sum_{p=1}^n V_{p-1} G_\xi(z_{n+1}, \xi_p; \theta_n, \tau_{p-1}) + \sum_{p=1}^{n-1} k_p V_p G_\xi(z_{n+1}, \xi_p; \theta_n, \tau_{p-1}) \right] \quad (5.1)
\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}
V_n &= [1 - k_n G_\xi(z_{n+1}, \xi_n; \theta_n, \tau_{n-1})]^{-1} \\
&\times \left[h^2 V_{n-1} G(z_{n+1}, \xi_{n+1}; \theta_n, \tau_{n-1}) - h^2 W_{n-1} G(z_{n+1}, \xi_J; \theta_n, \tau_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. + h \sum_{j=n+1}^{J-1} G(z_{n+1}, \xi_j; \theta_n, \tau_{n-1}) (U_{j,n-1})_\xi \right] \quad (5.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_n &= h^2 V_{n-1} G(z_J, \xi_{n+1}; \theta_n, \tau_{n-1}) - h^2 W_{n-1} G(z_J, \xi_J; \theta_n, \tau_{n-1}) \\
&\quad + h \sum_{j=n+1}^{J-1} G(z_J, \xi_j; \theta_n, \tau_{n-1}) (U_{j,n-1})_\xi + k_n V_n G_\xi(z_J, \xi_n; \theta_n, \tau_{n-1}) \quad (5.3)
\end{aligned}$$

ここで G は $r, j \leq J$ に対して次のように定義される関数で、

方程式 (3.1) の $z_r < H$ における第2種境界値問題の Green 関数

と呼ばれる；

$$G(z_r, \xi_j; \theta_n, \tau_{p-1}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=p}^n \Lambda_k^{-1} [e^{-i(j-r-k)\omega} + e^{-i(2J-r-j-k)\omega}] d\omega & p \leq n \\ \frac{1}{h} \delta_{r,j} & p-1 = n \end{cases} \quad (5.4)$$

ただし, $\Lambda_k = 1 + 4\lambda_k \sin^2 \frac{\omega}{2}$, $\lambda_k = k_k / h^2$

(証明) [2]参照

この V_n に対する表示 (5.1) を用いて, まず V_n に対する局所的なア priori 評価を出す。

補題 5.2 ある正の定数 $\tilde{M}$ が存在して, 十分小さい h に対

して $\theta_n < \sigma = \sigma(A, \tilde{M})$ ならば $V_n < \tilde{M}$ (5.5)

この評価は局所的なものであるが、これより従う局所的な解の存在より、この評価が大域的に拡張されることを後で示す。以下、この評価より従うアッリオリ評価を与える。

補題 5.3 十分小さな n に対して

$$b\beta h^{\frac{1}{2}} \leq \frac{h}{k_n} < \bar{M} \quad (5.6)$$

ただし、 $\bar{M} = 2b(\tilde{M} + A_1)$

(証明) (3.4), (3.6) より $h/k_n = b(v_n - w_n + \beta h^{\frac{1}{2}})$

したがって (4.3), (5.5) より (5.6) を得る。

補題 5.4 $|(U_{j,n})_z| \leq M_3 \quad j = n, \dots, J-1 \quad (5.7)$

$$|(U_{j,n})_{z\bar{z}}| \leq M_4 \quad j = n+1, \dots, J-1 \quad (5.8)$$

ただし、 $M_3 = \max(\tilde{M}, A_1)$, $M_4 = \max(\tilde{M}\tilde{M}, A_2)$, $A_2 = \max_{0 \leq z \leq H} |\varphi''(z)|$

(証明) $P_{j,n} = (U_{j,n})_z$ とおくと $P_{j,n}$ も $n < j < J-1$, $0 < n$ に対して

(3.1) の形の方程式をみたし、さらに

$$|P_{n,n}| = |v_n| < \tilde{M}, \quad |P_{J-1,n}| = |w_n| \leq A_1, \quad |P_{j,0}| = |(y_j)_z| \leq A_1$$

したがって最大値原理より (5.7) を得る。(5.8) も同様で

$Q_{j,n} = (U_{j,n})_{\bar{z}}$ とおくと $Q_{j,n}$ も $n < j < J$, $0 < n$ に対して (3.1)

の形の方程式をみたし、 $|Q_{n,n}| = |1 - \frac{h}{k_n} \cdot v_{n-1}| < \tilde{M}\tilde{M}$,

$$|Q_{J,n}| = 0, \quad |Q_{j,0}| = |(y_j)_{z\bar{z}}| \leq A_2. \quad \text{したがって } (U_{j,n})_{\bar{z}}$$

$= (U_{j,n})_{z\bar{z}}$ より (5.8) が得られる。

いま $0 < p \leq n-1$ に対しては (3.1) ~ (3.6) の解 $(c_p, U_{j,p})$ が既に求められているとすると補題 (5.4) より

$$|(U_{j,n-1})_{\bar{z}}| \leq M_3 \quad (5.9)$$

$$|(U_{j,n-1})_{z\bar{z}}| \leq M_4 \quad (5.10)$$

そこで, (5.2), (5.3) より $V_n^{(s)} - V_n^{(s-1)}, W_n^{(s)} - W_n^{(s-1)}$ を評価すると次の結果を得る.

$$\text{補題 5.5} \quad |V_n^{(s)} - V_n^{(s-1)}| < \frac{C_1}{\sqrt{h}} |k_n^{(s-1)} - k_n^{(s-2)}| \quad (5.11)$$

$$|W_n^{(s)} - W_n^{(s-1)}| < \frac{C_2}{\sqrt{h}} |k_n^{(s-1)} - k_n^{(s-2)}| \quad (5.12)$$

ここに, $C_1 = C_1(\bar{M}, M_3, M_4, H)$, $C_2 = C_2(M_1, \bar{M}, M_3, M_4, H)$

(証明) [2] 参照

補題 5.6

$$|k_n^{(s)} - k_n^{(s-1)}| < \frac{\sqrt{h}}{b\beta^2} \{|V_n^{(s)} - V_n^{(s-1)}| + |W_n^{(s)} - W_n^{(s-1)}|\} \quad (5.13)$$

(証明) $k_n^{(s)} = h / b(V_n^{(s)} - W_n^{(s)} + \beta h^{\frac{1}{2}})$ より明らか.

この2つの補題より次の定理を得る.

定理 5.1 h, n に無関係に β が選べば, その β に対して数列 $\{C_n^{(s)}\}, \{U_{j,n}^{(s)}\}$ は収束する;

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C_n^{(s)} = C_n, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} U_{j,n}^{(s)} = U_{j,n}$$

(証明) (5.11) ~ (5.13) より

$$|V_n^{(s)} - V_n^{(s-1)}| + |W_n^{(s)} - W_n^{(s-1)}| < \frac{C_1 + C_2}{b\beta^2} \{|V_n^{(s-1)} - V_n^{(s-2)}| + |W_n^{(s-1)} - W_n^{(s-2)}|\}$$

そこで δ を $0 < \delta < 1$ をみたす定数とすると, β を

$$(C_1 + C_2) / b\beta^2 \leq \delta \quad \text{となるように大きく選べば, 上の不等}$$

式より $\{V_n^{(s)}\}, \{W_n^{(s)}\}$ が収束することかわかる. したがって

(3.4)^(s) より $\{C_n^{(s)}\}$ が収束する. (3.6)^(s) より直ちに $\{k_n^{(s)}\}$ も

収束するの2". (3.1)^(s) ~ (3.3)^(s) の解 $\{U_{j,n}^{(s)}\}$ も収束することになる。

§6 差分法の収束性と解の存在

$h \rightarrow 0$ のとき (3.1) ~ (3.6) の解 $\{C_n, U_{j,n}\}$ が収束し, その極限で系[B]の解が与えられること, したがって系[A]の解が存在することを示す。

補題6.1 ある正の定数 γ ($\gamma < A_1$) が存在して, θ_n が十分小さければ

$$W_n < -\gamma < 0 \quad (6.1)$$

(証明) いま $R_{j,n} = (U_{j,n})_{\bar{\theta}\bar{\theta}}$ とおくと $R_{j,n}$ は $n < j < J, 0 < n$ に対して (3.1) の形の方程式を満たし, さらに

$$|R_{J,n}| = 0, \quad |R_{j,0}| = |(y_j)_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}}| < M_2$$

また, (3.1) の形の方程式をみたす有界な関数 $U_{j,n}$ の領域内での任意高階差分商は (z_j, θ_n) , h に関して一様に有界である

([6]参照) から, j として $j \cdot h > \frac{1}{2}$ をみたす最小の整数とすれば, $|R_{j,n}| = |(U_{j,n})_{\bar{\theta}\bar{\theta}}| < M$ となるような正の定数 M が存在する。したがって最大値原理より $\max(M_2, M) = M'$ とおくと $|R_{j,n}| < M'$, すなわち

$$|(U_{j,n})_{\bar{\theta}\bar{z}\bar{z}}| < M' \quad (j_1 < j < J, 0 < n) \quad (6.2)$$

が成り立つ。このとき

$$(U_{J,n})_{\bar{\theta}\bar{z}} - (U_{j_1,n})_{\bar{\theta}\bar{z}} = \sum_{v=j_1}^{J-1} (U_{v,n})_{\bar{\theta}\bar{z}\bar{z}} \cdot h$$

より

$$\begin{aligned}
|(U_{j,n})\bar{\theta}\bar{z}| &\leq |(U_{j,n})\bar{\theta}\bar{z}| + \sum_{\nu=j_1}^{j-1} |(U_{\nu,n})\bar{\theta}\bar{z}| \cdot h \\
&\leq |(U_{j,n})\bar{\theta}\bar{z}| + \frac{H}{2} M'
\end{aligned}$$

ここで $(U_{j,n})\bar{\theta}\bar{z}$ も一様に有界であるから、結局ある正の定数 M'' が存在して

$$|(U_{j,n})\bar{\theta}\bar{z}| < M'' \quad (0 < n) \quad (6.3)$$

いま $(U_{j,n})\bar{z} = (\varphi_j)\bar{z} + \sum_{p=1}^n (U_{j,p})\bar{z}\bar{\theta} \cdot k_p$ であるから、(6.3) より $(U_{j,n})\bar{z} < (\varphi_j)\bar{z} + M'' \cdot \sum_{p=1}^n k_p$. そこで十分小さい n に對して $(\varphi_j)\bar{z} < -2\gamma$ ($\gamma > 0$) となっているならば

$$\sum_{p=1}^n k_p = \theta_n < \frac{\gamma}{M''} \quad \text{をみたす } \theta_n \text{ に対しては}$$

$$(U_{j,n})\bar{z} < -\gamma$$

すなわち (6.1) が成り立つ。

いま h_α は $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $h_\alpha \rightarrow 0$ とするものとし、空間格子間隔 $h = h_\alpha$ で与えられるときの (3.1) ~ (3.6) の解を C_α^α , $U_{j,n}^\alpha$ のように表わす。そして各点 $t = t_n$ において C_α^α , θ_n^α と一致する折れ線をそれぞれ $C_\alpha(t)$, $\theta_\alpha(t)$ とする。また、(5.5), (6.1) が成り立つような t の上限を t' , 対応する θ の値を θ' とする。

補題 6.2 $\{\alpha\}$ の部分列 S が存在し、折れ線の列 $\{C_\alpha(t); \alpha \in S\}$ は $\alpha \rightarrow \infty$ のときある $C(t) \in L_1[0, t']$ に弱収束し

$$\theta(t) = \int_0^t C(\tau) d\tau \quad (6.4)$$

とおくとき、極限

$$\lim_{\substack{\alpha \in S \\ \alpha \rightarrow \infty}} \theta_\alpha(t) = \theta(t) \quad (0 < t < t') \quad (6.5)$$

をもつ。

(証明) (2.6), (3.4), (4.2), (6.1) より

$$0 < c_\alpha(t) < M_1/b\gamma \quad (0 < t < t')$$

であり、折れ線の列 $\{c_\alpha(t)\}$ は $L_2[0, t']$ の有界集合であること

がわかる。したがってその中から弱収束する部分列

$\{c_\alpha(t) : \alpha \in S\}$ がとり出せ、その極限関数 $c(t)$ が $L_1[0, t']$ に属

していることがわかる。また

$$\theta'_\alpha(t) = \int_0^t c_\alpha(\tau) d\tau$$

とおく。不等式

$$|\theta_\alpha(t) - \theta(t)| \leq |\theta_\alpha(t) - \theta'_\alpha(t)| + |\theta'_\alpha(t) - \theta(t)|$$

において $\alpha \in S, \alpha \rightarrow \infty$ のとき右辺第1項は $h_\alpha \rightarrow 0$ のとき、そ

れに応じて決まる時間ステップ中 $\{h_\alpha\}$ も0に収束することか

ら0に収束し、第2項は $c_\alpha(t)$ が $c(t)$ に弱収束することから

0に収束する。したがって (6.5) を得る。

補題6.3 $Y_\alpha(\theta_\alpha(t)) = y(t), Y(\theta(t)) = y(t)$ で $Y_\alpha(\theta), Y(\theta)$ を

$$\text{定義すると } \lim_{\substack{\alpha \in S \\ \alpha \rightarrow \infty}} Y_\alpha(\theta) = Y(\theta) \quad (0 < \theta < \theta') \quad (6.6)$$

で、極限の曲線 $y = Y(\theta)$ はリプシッツ連続である。

(証明) $\theta_\alpha(t), \theta(t)$ は正の単調増大関数であるから、それ

の逆関数を $t_\alpha(\theta), t(\theta)$ とすると、(6.5) より $\alpha \in S, \alpha \rightarrow \infty$ の

とき $t_\alpha(\theta)$ も $t(\theta)$ に収束する。 $y(t)$ は連続関数であるから、

これより (6.6) を得る。(6.4) より $\theta(t)$ は絶対連続であるから、
ほとんどいたるところ微分可能で $\theta'(t) = c(t)$ が成り立つ。
したがってほとんどいたるところ

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{dY}{dx} \cdot \frac{1}{c(t(\theta))}$$

が成立し、(2.7), (3.4) より $0 < \frac{dY}{d\theta} < \bar{M}$ であることがわかる。
これより $z = Y(\theta)$ は $0 < \theta < \theta'$ においてリプシッツ連続であることがわかる。

この $z = Y(\theta)$ を境界にもつ領域を D_1 ;

$$D_1 = \{(z, \theta) \mid Y(\theta) < z < H, 0 < \theta < \theta'\}$$

とすると、この結果より次のことが従う。

補題 6.4 D_1 の格子点上で定義される関数

$U_\alpha(z_j, \theta_n) = U_{j,n}^\alpha$ は D_1 上のすべての点に連続的に拡張でき、
その拡張定義された関数をあらためて $U_\alpha(z, \theta)$ とおくと、
 S の部分列 S' が存在し、極限

$$\lim_{\substack{\alpha \in S' \\ \alpha \rightarrow \infty}} U_\alpha(z, \theta) = U(z, \theta) \quad \text{in } D_1 \quad (6.7)$$

をもち、 $U(z, \theta)$ は (2.10) ~ (2.13) を満たす。

(証明) (4.1), (5.7), (5.8), 補題 6.3 より示される。(〔6〕参照)

さらに (2.14) がみたされ、補題 6.2 の $c(t)$ が実は連続関数になることが示される。

補題 6.5 極限

$$\lim_{z \rightarrow Y(\theta)} U_z(z, \theta) = U_z(Y(\theta), \theta) \quad 0 < \theta < \theta' \quad (6.8)$$

$$\lim_{z \rightarrow H} U_z(z, \theta) = U_z(H, \theta) \quad 0 < \theta < \theta' \quad (6.9)$$

が存在して、連続である。そして補題 6.2 の $C(t)$ に対して (2.14) が成り立つ。

(証明) (5.8) より $Y(\theta) < z, z' < H$ に対して

$$|U_z(z, \theta) - U_z(z', \theta)| < M_4 |z - z'| \quad 0 < \theta < \theta' \quad (6.10)$$

が成り立つので (6.8), (6.9) の存在は明らか。また D_1 の内部で $U_z(z, \theta)$ は連続であり, (6.8), (6.9) は θ に関して一様であるから $U_z(Y(\theta), \theta), U_z(H, \theta)$ は $0 < \theta < \theta'$ で連続となる。

そして D_1 の格子点上で定義される関数

$$U_{\alpha z}(z_0, \theta_n) = (U_{z_0, n}^\alpha)_z$$

は D_1 のすべての点に対して $\lim_{\substack{\alpha \in S' \\ \alpha \rightarrow \infty}} U_{\alpha z}(z, \theta) = U_z(z, \theta)$ が成立するように拡張定義できる。その $U_{\alpha z}(z, \theta)$ に対しても (6.10) と同じ評価が成立するので、極限

$$\lim_{z \rightarrow Y(\theta)} U_{\alpha z}(z, \theta) = U_{\alpha z}(Y(\theta), \theta)$$

$$\lim_{z \rightarrow H} U_{\alpha z}(z, \theta) = U_{\alpha z}(H, \theta)$$

が存在する。したがって (3.4) において $h_\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha \in S', \alpha \rightarrow \infty$) とすると (2.14) が成立することになる。

補題 6.6 $\theta = 0$ 上の任意の点 $A(z_0, 0)$ ($0 \leq z_0 \leq H$) に対して

$$\lim_{D_1 \ni (z, \theta) \rightarrow A} U_z(z, \theta) = \varphi'(z) \quad (6.11)$$

(証明) [6]

したが、補題6.5と補題6.6, (3.5)より $C(t)$ は $0 \leq t < t'$ で連続であることがわかる。また $\theta(t)$ は $0 \leq t < t'$ で連続的微分可能となる。

以上から次の結果を得る。

定理6.1 データ (φ, ψ) が(2.5)~(2.7)および $\varphi'(H) < 0$ をみたすとき系[A]の解 $\{C(t), u(z, t)\}$ が $0 \leq t < t'$ において存在する。この解は差分法(3.1)~(3.6)の $h \rightarrow 0$ の極限より得られる。

この結果は局所的なものであるが、次にこれを任意の区間に拡張できることを示そう。これには局所的な評価(5.5), (6.1)が延長できることを示せばよい。

まず(5.5)については、(2.9)~(2.11)の解の表示より $V(\theta) = U_2(Y(\theta), \theta)$ とおくと、十分小さい η に対して $0 < \theta \leq \theta_0$ で解が存在するならば $V(\theta_0 - \eta)$ は θ_0 に関係なく η に関して一様に有界である([4]参照)ことを用いると、 $V(\theta)$ の連続性より、 h が十分小さければ σ に無関係なある正数 ε が存在して $\theta_n < \sigma + \varepsilon$ でも同様な評価が成り立つことがわかる。

次に(6.1)については(2.9)~(2.11)の解にフリードマンの定理([5]参照)を用いると $W(\theta) = U_2(H, \theta) < 0$ であることが示されるので、 $W(\theta)$ の連続性よりある θ_1 が存在して $\theta_n \rightarrow \theta_1$ のとき $W_n \rightarrow 0$ となるとすると矛盾することが示される。した

かつ、 z (6.1) の評価も拡張されること加わける。

§7 解の一意性

矛盾によって示す。

補題7.1 (c, u) を系 $[A]$ の解とすると、 $v(t) = u_z(y(t), t)$

$w(t) = u_z(H, t)$ は次のように表わされる；

$$\begin{aligned} v(t) = & 2 \int_0^H \{ K_z(y(t), \theta(t); \xi, 0) - K_z(y(t) - 2H, \theta(t); -\xi, 0) \} \varphi(\xi) d\xi \\ & - 2 \int_0^t \{ K_z(y(t), \theta(t); y(\tau), \theta(\tau) - K_z(y(t) - 2H, \theta(t); -y(\tau), \theta(\tau)) \\ & \times v(\tau) d\tau \quad (7.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t) = & 2 \int_0^H K_z(H, \theta(t); \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi \\ & - 2 \int_0^t K_z(H, \theta(t); y(\tau), \theta(\tau)) v(\tau) d\tau \quad (7.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad k(z, t; \xi, \tau) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \\ \theta(t) = & \int_0^t c(\tau) d\tau \end{aligned}$$

(証明) (2.9) ~ (2.11) の解の表示より

$$\begin{aligned} V(\theta) = & 2 \int_0^H \{ K_z(Y(\theta), \theta; \xi, 0) - K_z(Y(\theta) - 2H, \theta; -\xi, 0) \} \varphi(\xi) d\xi \\ & - 2 \int_0^\theta \{ K_z(Y(\theta), \theta; Y(\sigma), \sigma) - K_z(Y(\theta) - 2H, \theta; -Y(\sigma), \sigma) \} \\ & \times V(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

$$W(\theta) = 2 \int_0^H K_z(H, \theta; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi - 2 \int_0^\theta K_z(H, \theta; Y(\sigma), \sigma) V(\sigma) d\sigma$$

と表わされる。(4) 参照)

θ をもとの変数 t に戻せば (7.1), (7.2) を得る。

定理7.1 方程式系 $[A]$ の (有界連続な) 解 $\{c(t), u(z, t)\}$

は一意的である。

(証明) いま系[A]に異なる解が2組 $\{c(t), u(z, t)\}$ と $\{c^*(t), u^*(z, t)\}$ が存在したとする。 $v(t) = u_z(y(t), t)$, $v^*(t) = u_z^*(y(t), t)$, $w(t) = u_z(H, t)$, $w^*(t) = u_z^*(H, t)$ において (7.1), (7.2) を用いると、十分小さな t_0 と正数 δ ($\delta < 1$) が存在して

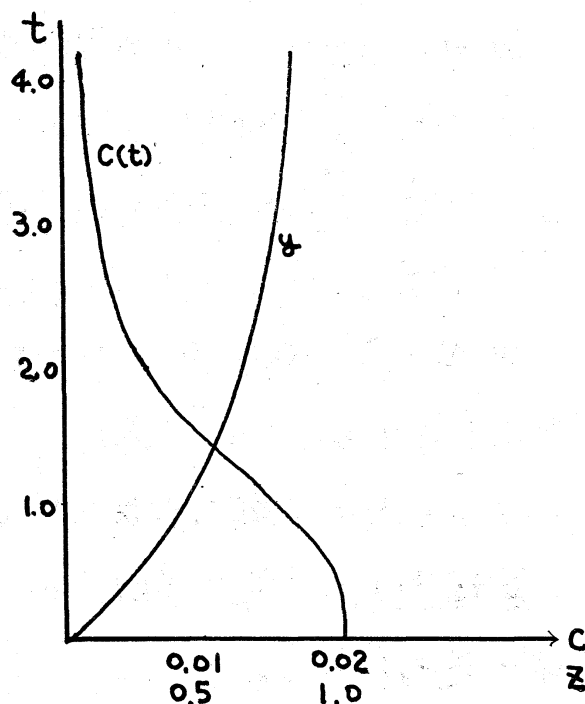
$$\sup_{0 < t < t_0} |v(t) - v^*(t)| + \sup_{0 < t < t_0} |w(t) - w^*(t)| < \delta \left\{ \sup_{0 < t < t_0} |v(t) - v^*(t)| + \sup_{0 < t < t_0} |w(t) - w^*(t)| \right\}$$

となることを示される。(13)参照) これは矛盾である。したがって系[A]の解は一意的である。

§ 8 数値計算例

データは $H = 2.0$, $h = 0.01$, $\beta = 0.0005$, $y = \frac{1}{1.6} \tan^{-1} t$
 $\varphi(z) = 1 - 256(z - \frac{1}{4})^4$ ($0 \leq z < \frac{1}{4}$), 1 ($\frac{1}{4} \leq z \leq \frac{7}{4}$), $1 - 256(z - \frac{7}{4})^4$ ($\frac{7}{4} < z \leq 2$)。この計算結果を右のグラフの曲線 $c(t)$ で示す。
 毎回の逐次計算回数は3~6回(判定基準 1.0×10^{-7})であった。

圧密が進むにつれ c の値が減少していくこと、即ち地盤が固まるにつれ粘土粒子の間を水が通り抜けにくくなっていくことを示されている。



参考文献

- [1] 最上武雄編, 土質力学, 第4章3節粘土の圧密現象と一次元圧密理論, 技報堂, 1969
- [2] Nogi, T. A difference scheme for solving the Stefan problem, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto. Univ. 9(3), 543-575 1974
- [3] 野木達夫, 逆ステファン問題の差分解法, Comp. Anal., 6 10-32, 1974
- [4] Nogi, T. & Ohwaki, H., A consolidation problem and its solution, Memo. Fac. Engineering. Univ. Kyoto., Vol. 40, Part 4 342-360, 1978
- [5] 山口昌哉, 野木達夫, ステファン問題, 産業図書, 1977
- [6] イ・セ・ペトロフスキー, 偏微分方程式論, 東京図書, 1958