

Baker 理論と初等数学による整数点の研究

同志社大学工学部知識工学科 岡崎龍太郎

1 概略

既約な整数係数 2 元 3 次形式 $F(X, Y)$ が与えられていてその判別式 D が正だとします. 次の方程式で定義される代数曲線を考えます:

$$F(X, Y) = 1 \quad (1)$$

M. A. Bennett が次の定理を証明しました:

定理 1 (M. A. Bennett (2001)) F の判別式が正のとき, 曲線 (1) の整数点は 10 個以下になります.

予想は次の通りですから改良の余地があります.

予想 1 (A. Pethő (1987) and F. Lippok (1993)) F の判別式が 361 より大きいとき, 曲線 (1) の整数点は 5 個以下になります.

ちなみに, 判別式が正で 361 以下の既約な整数係数 2 元 3 次形式 $F(X, Y)$ の同値類は全て知られていて, それらに関しては (1) の整数点が全て計算されています. 整数点の個数が 6 や 9 になる場合がありますが, 10 以上にはなりません.

筆者は次の技術的な条件のもとで Bennett の定理を改良しました:

定理 2 F の判別式が 10^{66} 以上のとき, 曲線 (1) の整数点は 7 個以下になります.

技術的な条件は Baker 理論から来るものですので, その方面の結果の改良によって緩和することができます. 整数点の個数の上界を改良するためには本質的に新しいアイデアが必要です.

この定理の証明の中心になるアイデアは幾何的な間隙原理です. 間隙原理というのは整数点の間の距離が離れているという主張です.

基本になるのは, 代数的整数論を使って代数曲線 (1) の上の整数点の問題を超越曲線の上の格子点の問題に変換することです. 超越曲線の 3 個の格子点が近くに集まってしまった場合にそれらが作る 3 角形の面積が小さくなることをその超越曲線の幾何から導くことができます. ところが, その 3 角形の面積は格子の基本領域の面積の半分ですから小さくなることはできません. そのことから超越曲線の格子点が遠く離れていることが分かります.

このアイデアが面白いので紹介したいと思います.

2 超越曲線の導入

一般性を失わずに $F(1, 0) = 1$ と仮定することができます。次の形の因数分解があります。

$$F(X, Y) = (X + \beta_1 Y)(X + \beta_2 Y)(X + \beta_3 Y).$$

ただし、判別式が正なので $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は実数です。これを使って記号を導入します：

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1); \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

$$\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \alpha \times \beta = (\beta_2 - \beta_3, \beta_3 - \beta_1, \beta_1 - \beta_2).$$

x, y が整数のとき、

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(x, y) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}$$

によって $\vec{\varepsilon}$ を定めます。成分毎の積を次の様に表します：

$$\vec{\delta}\vec{\varepsilon} = (\delta_1\varepsilon_1, \delta_2\varepsilon_2, \delta_3\varepsilon_3).$$

すると整数点 (x, y) が曲線 (1) の上に載ることの必要十分条件が $\vec{\delta}\vec{\varepsilon}$ の言葉で書けます：

$$\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2 + \delta_3\varepsilon_3 = 0, \quad |(\delta_1\varepsilon_1)(\delta_2\varepsilon_2)(\delta_3\varepsilon_3)| = \sqrt{D}. \quad (2)$$

この必要条件をさらに書換えるために記号を導入します：

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = (\log |z_1|, \log |z_2|, \log |z_3|) \quad \text{for } z_1, z_2, z_3 \neq 0.$$

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y) = (u_1, u_2, u_3) = \phi(D^{-1/6}\vec{\delta}\vec{\varepsilon}).$$

すると整数点 (x, y) が曲線 (1) の上に載ることの必要条件が $\vec{u}$ の言葉で書けます (図 4)：

$$\pm e^{u_1} \pm e^{u_2} \pm e^{u_3} = 0, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0. \quad (3)$$

この超越曲線を 6 個の部分に分解します：(1, 2, 3) の置換 (i, j, k) に対して

$$C_k^i: \pm e^{u_1} \pm e^{u_2} \pm e^{u_3} = 0, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0, \quad u_i \geq u_j \geq u_k. \quad (4)$$

によって枝 C_k^i を定義すると 6 個の枝が (3) を覆います。

更に、

$$C_1 = C_1^2 \cup C_k^3, \quad C_2 = C_2^3 \cup C_2^1, \quad C_3 = C_3^1 \cup C_3^2$$

によって C_1, C_2, C_3 を定義します。このそれぞれの集合の上で (1) の整数点から来る点の間隙原理を導くことができます。ここでは簡単のため C_3^1 の上に限定して私達の間隙原理のアイディアの本質を説明したいと思います。

3 超越曲線の幾何

超越曲線の枝 C_3^1 に局所座標を導入します：

$$(u_1, u_2, u_3) = \frac{s}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) - \frac{t}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2).$$

右辺の基底は正規直交基底になっていますので、距離や面積の計算に向いています。

この座標系を使って枝 C_3^1 の局所方程式を書きます：

$$2 \sinh \frac{s}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{3t}{\sqrt{6}}}.$$

s を t の陰関数と見ると s が単調減少だということがすぐに分かります。 $u_1 \geq u_2 \geq u_3$ を書換えると $0 < s \leq \sqrt{3}t$ になりますから、単調減少性を考慮にいと $t \geq 2^{-1}\sqrt{6} \log 2$ が分かります。

また、局所方程式から次の明示的な評価が分かります：

$$0 < s < \sqrt{2} \sinh \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3t}{\sqrt{6}}}. \quad (5)$$

$\sinh$ が実解析的な逆関数を持ちますので、 s は t で 2 回微分することが出来ます。そこで局所方程式の両辺を微分します：

$$\sqrt{2} \frac{ds}{dt} \cosh \frac{s}{\sqrt{2}} = -\frac{3t}{\sqrt{6}} e^{-\frac{3t}{\sqrt{6}}}.$$

$4 \cosh^2 w = 4 + 4 \sinh^2 w$ と局所方程式を使うとこの等式から

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\sqrt{3}e^{-\frac{3t}{\sqrt{6}}}}{\sqrt{4 + 4 \sinh^2 \frac{s}{\sqrt{2}}}} = -\frac{\sqrt{3}e^{-\frac{3t}{\sqrt{6}}}}{\sqrt{4 + e^{-\sqrt{6}t}}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4e^{\sqrt{6}t} + 1}}$$

が分かります。この表示から

$$\frac{d^2s}{dt^2} > 0 \quad (6)$$

が分かります。

4 単数群に由来する格子

(x, y) が (1) の整数点のとき, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$ でした. すなわち $\vec{\varepsilon}$ は 3 次体 $\mathbf{Q}(\vec{\beta})$ の単数です.

Dirichlet の単数定理により単数 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ が存在して $\mathbf{Q}(\vec{\beta})$ の全ての単数を整数 m, n を使って $\pm \vec{\xi}^m \vec{\eta}^n$ の形で表せます.

従って, $\vec{\varepsilon}$ は $\vec{\varepsilon} = \vec{\xi}^m \vec{\eta}^n$ の形の表示を持ちます. これから次の表示が得られます:

$$\vec{u} = \phi(D^{-1/6} \vec{\delta}) + m\phi(\vec{\xi}) + n\phi(\vec{\eta}).$$

従って $\vec{u}$ は次の格子の点になっています:

$$\Lambda = \phi(D^{-1/6} \vec{\delta}) + \mathbf{Z}\phi(\vec{\xi}) + \mathbf{Z}\phi(\vec{\eta}).$$

5 幾何的な間隙原理

$(x, y), (x', y'), (x'', y'')$ が曲線 (1) の上の相異なる整数点で $\vec{u} = \vec{u}(x, y), \vec{u}' = \vec{u}(x', y'), \vec{u}'' = \vec{u}(x'', y'')$ が全て 1 つの枝 C_3^1 に載っているとします. また, $\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}''$ の t 座標 t, t', t'' が昇順に並んでいるとします: $t \leq t' \leq t''$.

(6) より 3 点 $\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}''$ は共線になりません. (図 4) 従って, この 3 点は退化していない 3 角形を成します. $\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}''$ が格子 Λ に属しているため, その 3 角形の面積 A は $(1/2) \cdot |\phi(\vec{\xi}) \times \phi(\vec{\eta})|$ の整数倍になります. 従って次の不等式が成立します:

$$A \geq \frac{1}{2} |\phi(\vec{\xi}) \times \phi(\vec{\eta})|$$

一方, (5) と $t > 0$ を使うと次の不等式が分かります:

$$A \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{3t}{\sqrt{6}}} t'.$$

(図 2 で 3 角形が軸の片側に来ている場合を想像して下さい.)

以上より,

$$t' \geq \sqrt{2} |\phi(\vec{\xi}) \times \phi(\vec{\eta})| e^{\frac{3t}{\sqrt{6}}} \quad (7)$$

この間隙原理はもとの x, y の言葉でいうと

$$\log \max\{|x''|, |y''|\} \gg \max\{|x''|, |y''|\}$$

に相当します. ただし, 暗黙の定数を良い値にするためには 3 形式の簡約の理論を使う必要があります. 我々の目的には t -座標の言葉でかかれた間隙原理で十分です.

6 証明の結び

(1) の整数点から来る $\vec{u}(x_0, y_0)$ の形の点の中で最も原点に近い点の t 座標を t_0 とします. また, 前の節の $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$ が全て (x_0, y_0) と異なっているとしします. このとき $0 < t_0 \leq t \leq t' \leq t''$ が成立つことに注意します. また多少技術的な議論をすると $\log D < ct$ が分かります.

Baker 理論を使うとほぼ次の形の評価が得られます.

$$t'' < C|\phi(\vec{\xi}) \times \phi(\vec{\eta})|(\log D + t_0) \log(|\phi(\vec{\xi}) \times \phi(\vec{\eta})|)$$

ただし, t_0 は (1) の整数点から来る $\vec{u}(x_0, y_0)$ の形の点の中で最も原点に近い点の t 座標です. 解析的類数公式も使うと

$$t'' < C'|\phi(\vec{\xi}) \times \phi(\vec{\eta})|(\log D + t_0)^2$$

が分かります. ここで間隙原理 (7) を使うと

$$e^{\frac{3t}{\sqrt{6}}} < C''(\log D + t_0)^2 < C'''t^2.$$

左辺の方が増大度が大きいので,

$$t < C''''$$

が分かります. $\log D < ct$ に注意すると $\log D < C'''''$ が分かります.

Matveev による Baker 理論の結果を使った場合には $D < 10^{66}$ という評価が得られます.

対偶法により, $D > 10^{66}$ の下では 1 つの枝に (x_0, y_0) 以外の (1) の整数点から来る点は 2 個しかないことがわかります.

この議論を 6 本の枝全てについて行くと整数点の個数が $1 + 6 \times 2 = 13$ で評価できます.

定理の 7 という評価を出すためには $C_3^1 \cup C_3^2$ の上で間隙原理 (7) が成立つことを証明します. その場合のポイントは超越曲線の枝の局所座標について $(1/s)(ds/dt)$ を上下から適切な定数で評価することです. (図 3 を見て下さい.)

詳しくは R. Okazaki, "Geometry of a cubic Thue equation", *Publicationes Mathematicae* 61 (2002) pp 267–314 を読んで下さい.

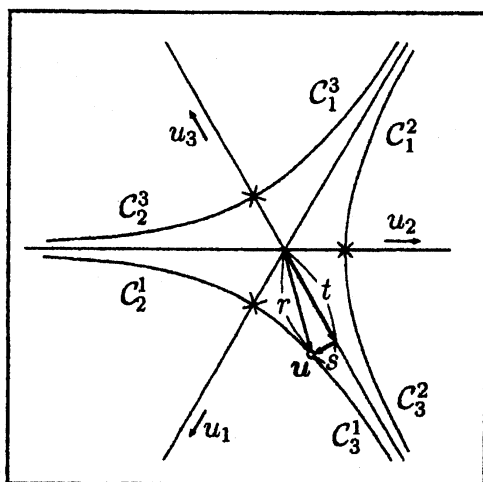
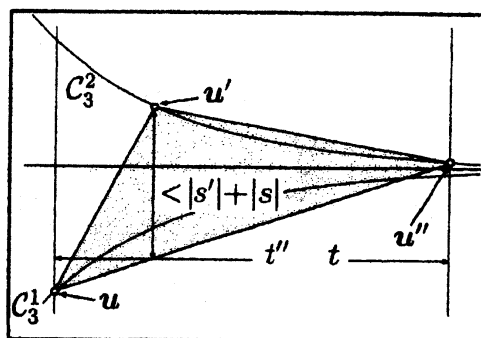
図1: 超越曲線 C .

図2: 面積の評価.

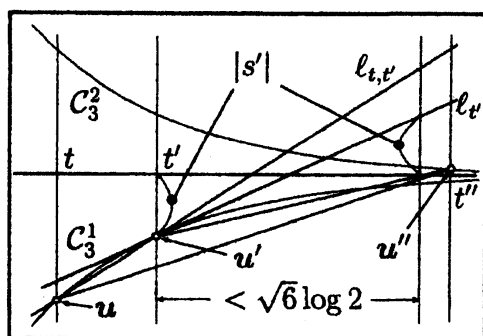


図3: 軸をまたぐ3角形.

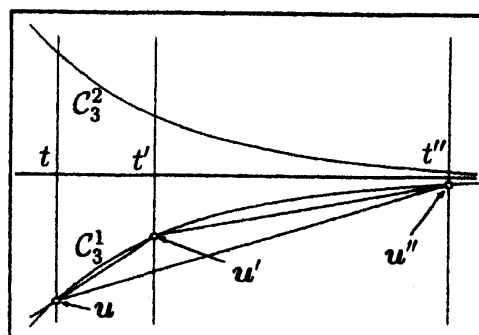


図4: 片側に収まる3角形.