

境界値逆問題における介在物の再構成問題
- 囲い込み法 -

池 島 優 (MASARU IKEHATA)

群馬大学工学部

1. 囲い込み法

与えられた物体の表面から (境界と言わず敢えて表面と言う) 電流を流し込みその結果生じた電位分布の表面における情報から物体内部の導電率の分布をいかにして知るかと言う問題は大変興味深い問題である。A. P. Calderón はその記念碑的論文[8] でこの問題を数学的に定式化しその後のおびただしい理論的研究を招いた。ここではその述べ方が簡単ないわゆる Dirichlet-to-Neumann 写像による定式化で話しを進める。

物体を Ω であらわしその導電率を γ であらわそう。 γ は Ω 上の有界な関数で、ある一定の正の値以上であるとする。まず表面上に電位分布 f を与える。そのとき内部の電位分布 u は境界値問題

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \gamma \nabla u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= f \text{ on } \partial\Omega\end{aligned}$$

の一意的な解として特徴づけられる。このとき表面の各点における電流分布 j は

$$j = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$$

であらわされる。ここに ν は $\partial\Omega$ にたいする外向き単位法線ベクトル場である。

写像 $f \mapsto j$ を Dirichlet-to-Neumann 写像といい Λ_γ であらわす。Calderón は Λ_γ から γ が一意に決定されるかどうか、もしそうであれば γ を Λ_γ からいかに再構成するかという問題を提出し、その線形化問題に対し解答を述べた。それを説明しよう。

まず γ は一定の値 (1 としよう) から余り隔たりがないとする:

$$\gamma = 1 + h, h \approx 0.$$

このとき

$$\Lambda_\gamma \approx \Lambda_1 + d\Lambda_1(h)$$

であるだろう。そこで Λ_γ の代わりにこの右辺したがって $d\Lambda_1(h)$ が与えられていると思ってよいだろう。すると問題は、線形写像 $h \mapsto d\Lambda_1(h)$ にたいする、対応する問題に置き換えられる。

Calderón はこれが単射であることおよび h を $d\Lambda_1(h)$ をつかって計算する公式を与えている。しかしながら、この問題にたいしては、無限次元 Banach 空間における通常の逆写像定理を適用できないことがわかっており、もともとの Λ_γ から γ を決定する問題にたいしての解決にはなっていないということを注意しておこう。

さて Calderón の $d\Lambda_1(h)$ から h を再構成する公式を述べよう。まず

$$(1.1) \quad \int_{\partial\Omega} \{d\Lambda_1(h)\} (v_1|_{\partial\Omega}) v_2 d\sigma = \int_{\Omega} h(x) \nabla v_1(x) \cdot \nabla v_2(x) dx$$

が二つの調和関数 v_1, v_2 に対してなりたつことを見るのは容易である。さて $z \cdot z = 0$ を満たす複素ベクトル z に対し関数

$$e^{x \cdot z}$$

は調和関数である。0 でない実ベクトル k にたいしそれと同じ長さをもち直交する 0 でない実ベクトル $k^\perp$ を一つとり

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{k^\perp}{2} - i \frac{k}{2} \\ z_2 &= -\frac{k^\perp}{2} - i \frac{k}{2} \end{aligned}$$

により二つ複素ベクトル z_1, z_2 を定める。

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -ik, \\ z_1 \cdot z_2 &= -\frac{|k|^2}{2}, \\ z_1 \cdot z_1 &= z_2 \cdot z_2 = 0 \end{aligned}$$

に注意すると $v_i = e^{x \cdot z_i}$, $i = 1, 2$ を (1.1) へ代入して

$$\int_{\partial\Omega} \{d\Lambda_1(h)\} (v_1|_{\partial\Omega}) v_2 d\sigma = -\frac{|k|^2}{2} \int_{\Omega} h(x) e^{-ix \cdot k} dx$$

を得る。これより h の Ω の外への 0 拡張の Fourier 変換が計算され Fourier の反転公式により h が再構成される。より詳しい Calderón の論文の解説については Uhlmann [33] を見るのがよい。

Sylvester-Uhlmann [32] は, Calderón が使った $z \cdot z = 0$ を満たす複素ベクトル z をパラメタにもつ調和関数の代わりに, $|z| \rightarrow \infty$ のときそれに漸近するいわゆる複素幾何光学解を構成し, Λ_γ から滑らかな γ が一意的に決定されることを証明した。さらに Nachman [26], [27] は, γ を Λ_γ から再構成するための公式を与えた。最近 Siltanen-Mueller-Issacson [30] は Nachman の再構成公式の数値実験を実行した。

ところで γ 自身ではなく, γ の不連続面を再構成する問題もまた応用上重要であると信じられている。 D を Ω の開部分集合とする。簡単のため D は連結であるとしよう。

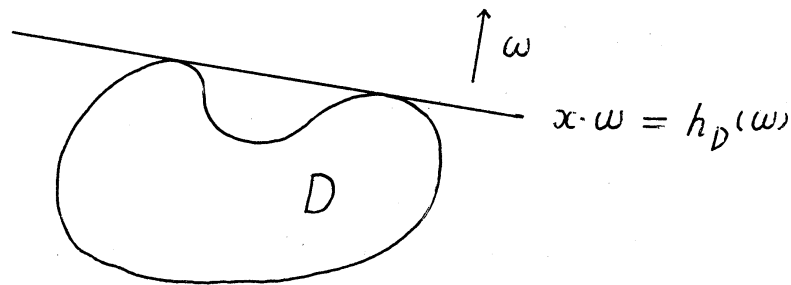
今 h が, D の外部で 0 で $\bar{D}$ で連続, すべての $a \in \partial D$ にたいして $h(a) > 0$ またはすべての $a \in \partial D$ にたいして $h(a) < 0$ であるとしよう。このとき ∂D は $\gamma = 1 + h$ の最初の不連続面である。この線形化問題は $d\Lambda_1(h)$ から ∂D を再構成する問題である。もちろん上で述べた方法で h 自身が再構成されるのだからなにも問題はない, といってもよいがとりだす情報が少ないのだから, ∂D に関する情報をもっと直接的に $d\Lambda_1(h)$ から取り出す方法があってよいはずである。

ここでは D の支持関数 h_D :

$$h_D(\omega) = \sup_{x \in D} x \cdot \omega, \omega \in S^2$$

をひきだす単純な idea を述べよう (図 1)。

図 1.



支持関数が分かれば D の凸包が得られることは言うまでもない。

idea の核心を述べよう。(1.1) の v_1, v_2 として正のパラメータ τ をもつ

$$v_1 = e^{\tau x \cdot (\omega + i\omega^\perp)},$$

$$v_2 = \bar{v}_1 = e^{\tau x \cdot (\omega - i\omega^\perp)}$$

を代入して

$$\int_{\partial\Omega} \{d\Lambda_1(h)\} (v_1|_{\partial\Omega}) v_2 d\sigma = 2\tau^2 \int_D h(x) e^{2\tau x \cdot \omega} dx$$

を得る。各 $t \in \mathbb{R}$ に対し $e^{-2\tau t}$ をこの両辺にかける:

$$(1.2) \quad e^{-2\tau t} \int_{\partial\Omega} \{d\Lambda_1(h)\} (v_1|_{\partial\Omega}) v_2 d\sigma = 2\tau^2 \int_D h(x) e^{2\tau(x \cdot \omega - t)} dx.$$

左辺は $d\Lambda_1(h)$ より計算できる量であり既知としてよい。さて右辺をみる。関数 $e^{2\tau(x \cdot \omega - t)}$ は、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき、半空間 $x \cdot \omega > t$ で (指数的に) 増大し、半空間 $x \cdot \omega < t$ で (指数的に) 減衰する。したがってもし $t > h_D(\omega)$ であれば、(1.2) の右辺は $\tau \rightarrow \infty$ のとき減衰する。しかし $t = h_D(\omega)$ あるいは $t < h_D(\omega)$ のときは、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき違った振る舞いをするであろう。そこでその境目として、 D の支持関数を特徴づけられるであろう。これが idea の核心である。

実際 ∂D にたいする適当な滑らかさのもとで次の主張が証明される。

命題 1.1.

$t > h_D(\omega)$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-2\tau t} \int_{\partial\Omega} \{d\Lambda_1(h)\} (v_1|_{\partial\Omega}) v_2 d\sigma = 0.$$

筆者はこの方法を [15] で提唱し、もともとの Λ_γ から $\gamma = 1 + h$ の不連続面を再構成する問題に適用して次の定理を証明した。

定理 1.1.

$t > h_D(\omega)$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I_\omega(\tau, t) = 0$$

ここで

$$I_\omega(\tau, t) = e^{-2\tau t} \int_{\partial\Omega} (\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(v_1|_{\partial\Omega})v_2 d\sigma.$$

実はその証明から公式

$$h_D(\omega) - t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log |I_\omega(\tau, t)|}{2\tau}$$

も成り立つことがわかる (Ikehata-Siltanen [21]).

その幾何学的なスタイルからこの方法を囲い込み法と呼ぶことを筆者は提唱したい。なお Sylvester-Uhlmann で構成された複素幾何光学解を v_1, v_2 の代わりに使えば $\gamma = \gamma_0 + h$ にたいしても同様な結果を得ることができることはいうまでもない。ただし γ_0 は既知で十分に滑らかとする。

Λ_γ から, $\Omega \setminus \bar{D}$ が連結であるような D および h が, 一意的に決定されることを証明したのは Isakov [22] である。筆者は, [14] で探針法 (the probe method) を導入し, D の Λ_γ からの再構成公式を与えた。また [16] では, Λ_γ から h 自身の再構成公式が, Nachman [26], [27] の結果へ帰着させることにより得ることができる, ということ述べた。

囲い込み法の数値実験は興味あるところであるが, 最近 Brühl-Hanke [7] および Ikehata-Siltanen [21] でなされている。

なお, より realistic なモデルとして, 電極と皮膚との間のインピーダンスを考慮した境界条件を取り入れた, いわゆる完全モデル (complete model) が提唱されている。Issacson-Cheney [25] では, 他のモデルとともにそれが紹介されている。

また Somersalo-Cheney-Issacson [31] では, 完全モデルの下での順問題の一意可解性が証明されている。

筆者の共同研究者である Siltanen は, この順問題設定のもとで得られる観測データから囲い込み法に必要な定理 1.1 の”指示関数”

$$(1.1) \quad e^{-2\tau t} \int_{\partial\Omega} (\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(v_1|_{\partial\Omega})v_2 d\sigma$$

をいかに近似的に求め数値実験をおこなうかという興味ある問題を提起している。

2. ひと組の Cauchy データからの再構成問題

囲い込み法をひとたび手に入れると人はその過激な適用に思い至る。それは定理 1.1 で導入された指示関数 (1.1) の代わりに

$$(2.1) \quad I_\omega(\tau, t) \equiv e^{-\tau t} \int_{\partial\Omega} (\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(f)v d\sigma$$

を考えてはどうかという問いである。ここで f は固定した定数でない境界上の電位分布であり v は

$$v = e^{\tau x \cdot (\omega + i\omega^\perp)}, \tau > 0$$

で与えられる調和関数である。このとき定理 1.1 に相当する事実がなりたつか? もしそれが成り立てばひと組のデータ $(f, \Lambda_\gamma f)$ より D の存在する場所にかんする情報がひきだせることになる。

Λ_1 は対称であることから

$$I_\omega(\tau, t) = e^{-\tau t} \int_{\partial\Omega} \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u d\sigma$$

が成り立ち $I_\omega(\tau, t)$ を計算するにあたって $\Lambda_1(f)$ を計算する必要はないということを注意しておく。

筆者は[18]で、この idea を Friedman-Isakov [11] によって取り上げられた問題にたいして適用し、多角形状の介在物の支持関数の再構成公式を得た。

より詳しく問題を述べよう。 Ω を2次元の有界領域とし ν を $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線ベクトル場とする。 γ は Ω 上定義された正の値をとる関数で、ある Ω 内の凸多角形 D の上で一定値 k 、 D の外で1をとるものとする。 $k \neq 1$ を仮定する。

問題は、方程式

$$\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0 \text{ in } \Omega$$

の定数でない解から計算される対

$$(f, j) = (u|_{\partial\Omega}, \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega})$$

を使って D の存在する場所にかんする情報を引き出す公式を発見することである。

f は固定されていることに注意しよう。仮定

$$(2.2) \quad \text{diam } D < \text{dis}(D, \partial\Omega)$$

のもとで対応

$$D \mapsto (u|_{\partial\Omega}, \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega})$$

が一対一であること(一意性)は既に Friedman-Isakov [11] が証明している。Seo [29], Alessandrini-Isakov [2] は j に対する自然な条件のもとで (2.2) を外して凸多角形状の介在物の一意性を証明している。3次元の問題についても凸多面体状の介在物の一意性について Friedman-Isakov [11], Barcelo-Fabes-Seo [5] の結果がある。Seo[29] ではふた組の $(f_1, j_1), (f_2, j_2)$ からの多角形状の介在物の一意性も証明されている。

円板上または球状の介在物の一意性についてはそれぞれ Kang-Seo [23], Kang-Seo [24] で証明されている。安定性については Friedman-Isakov [11], Bellout-Friedman-Isakov[6] を参照せよ。

このように、この10年の間、上述の Friedman-Isakov の論文が発表されて以来、再構成公式を探す問題にたいしては、筆者の知る限りなんら結果はなかった。筆者が[18]で証明した定理は D の凸性を仮定していたが自明な修正で次の定理を得る。

定理 2.1.

f は定数でないを仮定する。 D が(2.2)を満たす多角形であれば $\{x \in \partial D \mid x \cdot \omega = h_D(\omega)\}$ が一点のみからなるような方向 $\omega \in S^1$ に対し次の二つの公式が成り立つ。

$$[h_D(\omega), \infty[= \{t \in \mathbb{R} \mid \lim_{\tau \rightarrow \infty} I_\omega(\tau, t) = 0\},$$

$$h_D(\omega) - t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log |I_\omega(\tau, t)|}{\tau}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

より詳しくは, $\tau \rightarrow \infty$ のとき, $|I_\omega(\tau, t)|$ は $t > h_D(\omega)$ に対しては指数的に減衰, $t = h_D(\omega)$ に対しては代数的に減衰, $t < h_D(\omega)$ に対しては指数的に増大する。なお j について, ある自然な制限 ([29]) を課せば, (2.2) を落とすことができることは定理の証明からただちにわかることを指摘しておく (これは専門家に対する注意である)。

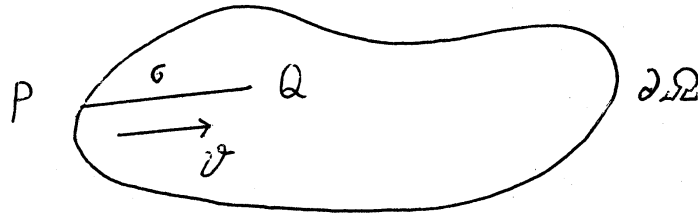
この定理を根拠として筆者は今がまさに方向を転換する時代であると宣言したい。囲い込み法を使った多角形状の空洞の支持関数の再構成公式は[17], 囲い込み法の逆源泉問題への応用については[19]を参照せよ。

3. Cherepanov-Rice 積分と直線亀裂の長さの決定 (破壊力学との関係)

ここでは逆問題と破壊力学との関係が良くあらわれている小さな例題を述べよう。

2次元有界領域 Ω の中に線分状 (絶縁された) 亀裂 σ がありそのひとつの端点 P が Ω の境界に達していて他の端点 Q は完全に Ω のなかに含まれているとする (図2.)。

図2.



このとき $\partial\Omega$ 上に電流分布 j を与え, その結果生じた $\partial\Omega$ 上の電位分布 f を測定する。 Ω の導電率が一定であるという仮定のもとでは, Ω 内の電位分布 u は,

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \setminus \bar{\sigma}, \\ u &= f \text{ on } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= j \text{ on } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ on } \sigma\end{aligned}$$

の解として特徴づけられる。 ν は σ 上定ベクトルであることに注意。なおこの目的は既存の idea の厳密化ではなく新しい idea の提出であり, 詳しい順問題の設定を述べることは控える。

さて問題は, σ の方向 $\vartheta \in S^1$ 、長さ l を (f, j) から計算する公式を求めることであるが, ここでは ϑ を既知として l をいかにして求めるかということを問題とする。

その一つの答えは次のとおりである。 ϑ と直交する方向 $\vartheta^\perp$ で $\det(\vartheta, \vartheta^\perp) > 0$ なるものをとる。

$$v = e^{\tau x \cdot (\vartheta + i\vartheta^\perp)}, \tau > 0$$

とおこう。指示関数

$$I_\vartheta(\tau, t) = e^{-\tau t} \int_{\partial\Omega} jv - \frac{\partial v}{\partial \nu} f d\sigma, t \in \mathbb{R}$$

を導入する。さらに (f, j) から次の量を計算する:

$$J(f, j) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 (\nu \cdot \vartheta) - (\nabla u \cdot \nu)(\nabla u \cdot \vartheta).$$

これは破壊力学で有名な Cherepanov-Rice 積分とよばれる量で (Ohtsuka [28]) 亀裂の進展問題において重要な役割を果たす。

定理 3.1.

$$J(f, j) \neq 0$$

であれば公式

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \lim_{\tau \rightarrow \infty} I_{\vartheta}(\tau, t) = 0\} = [h_{\sigma}(\vartheta), \infty[$$

$$h_{\sigma}(\vartheta) - t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log |I_{\vartheta}(\tau, t)|}{\tau}$$

が成り立つ。亀裂の長さ l は公式

$$l = h_{\sigma}(\vartheta) - P \cdot \vartheta$$

から計算される。

この証明のためには、自明な等式

$$I_{\vartheta}(\tau, t) = e^{\tau(h_{\sigma}(\vartheta) - t)} I_{\vartheta}(\tau, h_{\sigma}(\vartheta))$$

および指示関数と Cherepanov-Rice 積分との関係を示すつぎの命題があれば十分である。

命題 3.1.

$$(3.1) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{1/2} |I_{\vartheta}(\tau, h_{\sigma}(\vartheta))| = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1 + \frac{1}{2}) \sqrt{|J(f, j)|}.$$

命題 3.1 の証明の概略. 直交座標 (y_1, y_2) , 極座標 (r, θ) およびそれに関する u の表現を

$$x = Q + y_1(-\vartheta) + y_2(-\vartheta^{\perp})$$

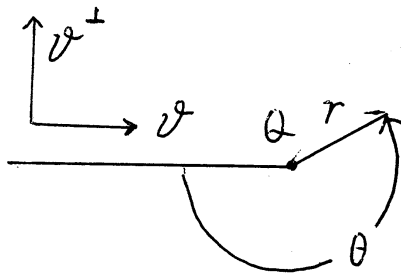
$$y_1 = r \cos \theta, y_2 = r \sin \theta$$

$$u(y_1, y_2) = u(x)$$

$$u(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

と定める (図 3.).

図 3.



u を Q の回りで

$$u(x) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + \dots$$

と展開する (Grisvard [13])。 α_2 は応力拡大係数と呼ばれている。 Ikehata[17] と同様な考え方により, $\tau \rightarrow \infty$ のとき漸近展開

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & I_{\vartheta}(\tau, h_{\sigma}(\vartheta)) \\ & \sim -\frac{2e^{-i\tau Q \cdot \vartheta^{\perp}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma(1 + \frac{2m-1}{2}) \frac{(-1)^m \alpha_{2m}}{\tau^{\frac{2m-1}{2}}} \end{aligned}$$

を得る。

したがって (3.1) の証明のためには, Cherepanov-Rice 積分と応力拡大係数との関係を示す公式

$$(3.3) \quad J(f, j) = \frac{\alpha_2^2}{8}$$

を示せば十分である。念のため断わっておくが, 筆者は (3.3) が新しいと主張するつもりは全くない。多分知られている事実であろう。だが (3.1) は罫い込み法の idea があって始めて獲得される公式である。それがなければ誰が“指示関数”の漸近挙動を調べるだろうか?

そこで問題は (3.3) の証明である。領域 D 上の二つの関数 u, v に対し

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & J_{\partial D}(u, v) \\ & = \int_{\partial D} (\nabla u \cdot \nabla v) \nu - \int_{\partial D} (\nabla v \otimes \nabla u + \nabla u \otimes \nabla v) \nu \end{aligned}$$

とおく。ここに ν は ∂D にたいする外向き単位法線ベクトル場である。 $D = \Omega$ のとき

$$J(f, j) = \frac{1}{2} J_{\partial \Omega}(u, u) \vartheta$$

であることに注意。

つぎの事実は破壊力学では良く知られているがここでは読者の便宜のため述べる。

補題 3.1.

u, v ともに領域 D で調和であるとする。このとき $J_{\partial D}(u, v) = 0$ が成り立つ。

証明. 任意の定ベクトル ϑ に対し $J_{\partial D}(u, v) \vartheta = 0$ を示す。

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\nabla u \cdot \nabla v) (\nu \cdot \vartheta) &= \int_D \nabla \cdot \{(\nabla u \cdot \nabla v) \vartheta\} \\ &= \int_D \nabla(\nabla u \cdot \nabla v) \cdot \vartheta \\ &= \int_D \{(\nabla^2 u) \nabla v + (\nabla^2 v) \nabla u\} \cdot \vartheta \end{aligned}$$

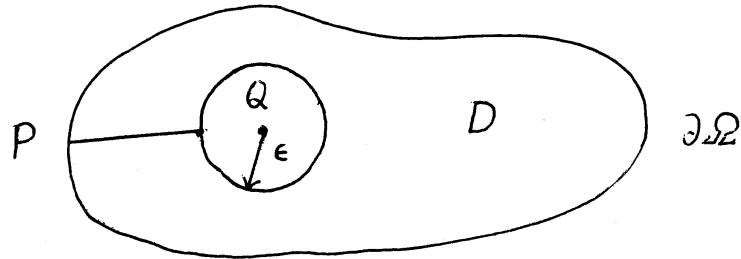
および

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial D} (\nabla u \cdot \nu)(\nabla v \cdot \vartheta) + (\nabla v \cdot \nu)(\nabla u \cdot \vartheta) \\
 &= \int_D \nabla \cdot \{(\nabla v \cdot \vartheta) \nabla u + (\nabla u \cdot \vartheta) \nabla v\} \\
 &= \int_D \nabla(\nabla v \cdot \vartheta) \cdot \nabla u + \nabla(\nabla u \cdot \vartheta) \cdot \nabla v + (\nabla v \cdot \vartheta) \Delta u + (\nabla u \cdot \vartheta) \Delta v \\
 &= \int_D (\nabla^2 v) \vartheta \cdot \nabla u + (\nabla^2 u) \vartheta \cdot \nabla v \\
 &= \int_D \{(\nabla^2 v) \nabla u + (\nabla^2 u) \nabla v\} \cdot \vartheta
 \end{aligned}$$

からただちに結論を得る。□

(3.3) を証明しよう。 P から亀裂の下側を亀裂に沿って Q のちょっと左側まで進みそこから反時計回りに Q を中心とする半径 ϵ の円周 C_ϵ 上を一周して再び亀裂の上側を亀裂に沿って P まで進みそれから $\partial\Omega$ を時計回りに一周して再び P に至る道によってかこまれる領域 D をかんがえそれに補題 3.1 を適用する (図 4.)。

図 4.



$\sigma_{\text{上}} \nu \cdot \vartheta = 0$, $\nabla u \cdot \nu = 0$ であるから積分の亀裂からの寄与はすべて消えて

$$(3.5) \quad J_{\partial\Omega}(u, u) \vartheta = J_{C_\epsilon}(u, u) \vartheta, \quad 0 < \forall \epsilon < \epsilon_0$$

を得る。このとき

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y_1} &= -\nabla u \cdot \vartheta \\
 \frac{\partial u}{\partial y_2} &= -\nabla u \cdot \vartheta^\perp, \\
 \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ \frac{1}{r} u_\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

および C_ϵ の点 (r, θ) における単位法線ベクトル ν は

$$\nu(r, \theta) = -(\cos \theta \vartheta + \sin \theta \vartheta^\perp)$$

で与えられることから、

$$\begin{aligned}
 \nabla u \cdot \nu &= -\nabla u \cdot (\cos \theta \vartheta + \sin \theta \vartheta^\perp) \\
 &= \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y_1} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y_2} \\
 &= \cos \theta \left(\cos \theta u_r - \frac{1}{r} \sin \theta u_\theta \right) \\
 &\quad + \sin \theta \left(\sin \theta u_r + \frac{1}{r} \cos \theta u_\theta \right) \\
 &= u_r, \\
 (\nabla u \cdot \nu)(\nabla u \cdot \vartheta) &= -u_r \frac{\partial u}{\partial y_1} \\
 &= -u_r \left(\cos \theta u_r - \frac{1}{r} \sin \theta u_\theta \right) \\
 &= -\cos \theta u_r^2 + \frac{1}{r} \sin \theta u_r u_\theta
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\nu \cdot \vartheta = -\cos \theta$ に注意して

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & \frac{1}{2} |\nabla u|^2 (\nu \cdot \vartheta) - (\nabla u \cdot \nu)(\nabla u \cdot \vartheta) \\
 &= -\frac{1}{2} \cos \theta (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2) + \cos \theta u_r^2 - \frac{1}{r} \sin \theta u_r u_\theta \\
 &= \frac{1}{2} \cos \theta u_r^2 - \frac{1}{r} \sin \theta u_r u_\theta - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \cos \theta u_\theta^2
 \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\alpha_2}{2\sqrt{\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} + \dots \\
 u_\theta &= -\frac{\alpha_2}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
 u_r^2 &= \frac{c}{r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \dots \\
 \frac{1}{r} u_r u_\theta &= -\frac{c}{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \\
 \frac{1}{r^2} u_\theta^2 &= \frac{c}{r} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

を得る。ただし

$$c = \left(\frac{\alpha_2}{2\sqrt{\pi}} \right)^2.$$

(3.6) へ代入して

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} |\nabla u|^2 (\nu \cdot \vartheta) - (\nabla u \cdot \nu)(\nabla u \cdot \vartheta) \\
 &= \frac{c}{r} \left(\frac{1}{2} \cos \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \dots \\
 &= \frac{c}{2r} + O(1)
 \end{aligned}$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} J_{C_\epsilon}(u, u)^\vartheta &= \int_{C_\epsilon} \frac{c}{2\epsilon} + O(\epsilon) \\ &= \pi c + O(\epsilon) = \frac{\alpha_2^2}{4} + O(\epsilon) \end{aligned}$$

したがって (3.5) から (3.3) を結論する。□

(3.3) より $J(f, j) \neq 0$ は $|\nabla u(x)|$ が亀裂の先端 Q で発散するための必要十分条件であることがわかる。そして定理 3.1 は、亀裂の先端で電位分布の勾配に特異性が発生するような (f, j) を持ってくれば結論が成り立つ、ということを言っている。重要なことは、特異性が発生しているかどうかを Cherepanov-Rice 積分を通して (f, j) だけを使って判定できることである。

実は $J(f, j) \neq 0$ は仮定しすぎであって、 j に自然な制限を課すと、定理 2.1 の証明と同様な考え方で (関数論を併用して)、適当な $m \geq 1$ に対し (3.2) の $\alpha_{2m} \neq 0$ を証明できる。そのような m で最小なものをとれば、適当な 0 でない定数 A に対し

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{\frac{2m-1}{2}} |I_\vartheta(\tau, h_\sigma(\vartheta))| = A$$

を得る。これがひとたび得られれば、後は同様にして定理 3.1 と同じ公式を得ることができる。この考え方を使えば亀裂の方向 ϑ が未知であっても、亀裂に横断的な方向 ω にたいする支持関数の値を対応する指示関数から引き出すことができる。筆者は、複数の線状亀裂が存在する場所の凸包の再構成公式についても、囲い込み法を適用して得ることができると考えている。その詳細は他の問題も含めて準備中である (Ikehata [20])。

Andrieux-Abda [3] は、表面に端点を持つ線状亀裂の長さを、 (f, j) から定まるある関数の最初の零点として特徴づけている ([3, Proposition 1.8])。ただし亀裂上における電位分布の飛びについてある制限を課している。問題は違うが、Aparicio-Pidcock [4] は、単連結領域の境界の一部を他の部分における (f, j) を使って再構成するための公式を適当な条件下で与えている。

導電率が一定でない等方的な物体中の亀裂の再構成公式を探す問題に対して、囲い込み法を、Calderón [8] の指数関数の代わりに Sylvester-Uhlmann [32] の構成した複素幾何光学解を使うことにより適用したらどうなるかやってみると面白いと思う。囲い込み法を適用してみたい問題は他にも沢山あり、何を調べればよいかは確立されたいま、後は実際にやってみることであり、ここにリストを並べても無意味である。

3次元物体の中の未知の一枚の平面上に乗っている未知の亀裂の再構成についても Andrieux-Abda [3] による方法がある。より詳しくは Ω を $\mathbb{R}^3$ の有界領域としその中に未知の曲面状の亀裂 σ があるとする。 Ω は導電率が一定の導電体であると仮定する。さて $\partial\Omega$ 上に電流分布 j を与えその結果生じた $\partial\Omega$ 上の電位 f を測定する。このとき $\Omega \setminus \sigma$ 内の電位分布を u とするときその $\partial\Omega$ 上における Cauchy data は (f, j) であり、 u は $\Omega \setminus \sigma$ で調和であるが、 σ は絶縁されていると仮定する。すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \sigma$$

が σ の固定した単位法線ベクトル場に対して成り立つと仮定する。問題は (f, j) から σ を再構成することである。

この問題に対する完全な結果はまだない。しかし σ が一枚の未知の平面上に乗っていることが分かっているときには Andrieux-Abda [3] による美しい再構成公式がある。

詳しくは彼等の原論文を参照して欲しい。しかし複数の未知の平面状に乗っている未知の亀裂の再構成問題にたいしては彼等の方法の適用は困難である。いまのところ技術的に難しいが、この問題への囲い込み法の適用は数学として興味ある問題である。さらに、新しい方法も待たれる。

一意性問題については Alessandrini-DiBenedetto [1], Eller [10], Friedman-Vogelius [12], Elcrat-Isakov-Neculoiu [9] およびそれらの文献を参照せよ。

謝辞

この研究は文部省科学研究費 No.11640151 の援助を受けている。

REFERENCES

1. Alessandrini, G. and DiBenedetto, E., *Determining 2-dimensional cracks in 3-dimensional bodies: Uniqueness and stability*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), 1–82.
2. Alessandrini, G. and Isakov, V., *Analyticity and uniqueness for the inverse conductivity problem*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **28** (1996), 351–369.
3. Andrieux, S. and Abda, B. A., *Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae*, Inverse Problems **12** (1996), 553–563.
4. Aparicio, N. D. and Pidcock, M. K., *The boundary inverse problem for the Laplace equation in two dimensions*, Inverse Problems **12** (1996), 565–577.
5. Barcelo, B., Fabes, E. and Seo, J. K., *The inverse conductivity problem with one measurement, uniqueness for convex polyhedra*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1994), 183–189.
6. Bellout, H., Friedman, A. and Isakov, V., *Stability for inverse problem in potential theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 271–296.
7. Brühl, M. and Hanke, M., *Numerical implementation of two non-iterative methods for locating inclusions by impedance tomography*, submitted.
8. Calderón, A. P., *On an inverse boundary value problem*, in Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (W. H. Meyer and M. A. Raupp, eds.), Brazilian Math. Society, Rio de Janeiro (1980), 65–73.
9. Elcrat, A. R., Isakov, V. and Neculoiu, *On finding a surface crack from boundary measurements*, Inverse Problems **11** (1995), 343–351.
10. Eller, M., *Identification of cracks in three-dimensional bodies by many boundary measurements*, Inverse Problems **395–408** (1996).
11. Friedman, A. and Isakov, V., *On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 563–579.
12. Friedman, A. and Vogelius, M., *Determining cracks by boundary measurements*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 527–556.
13. Grisvard, P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston, 1985.
14. Ikehata, M., *Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements*, Commun. in Partial Differential Equations **23** (1998), 1459–1474.
15. ———, *Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements*, to appear, J. Inv. and ILL-Posed Problems.
16. ———, *How to draw a picture of an unknown inclusion. Two mathematical inversion algorithms*, J. Inv. and ILL-Posed Problems **7** (1999), 255–271.
17. ———, *Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data*, Inverse Problems **15** (1999), 1231–1241.
18. ———, *On reconstruction in the inverse conductivity problem with one measurement*, to appear, Inverse Problems.

19. ———, *Reconstruction of a source domain from the Cauchy data*, Inverse Problems **15** (1999), 637–645.
20. ———, *Enclosing a multiple linear crack*, in preparation.
21. Ikehata, M. and Siltanen, S., *Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements*, submitted.
22. Isakov, V., *On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient*, Comm. Pure. Appl. Math. **41** (1988), 865–877.
23. Kang, H. and Seo, J. K., *The layer potential technique for the inverse conductivity problem*, Inverse Problems **12** (1996), 267–278.
24. ———, *Inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness of balls in $\mathbb{R}^3$* , SIAM J. Appl. Math. **59** (1999), 1533–1539.
25. Issacson, D. and Cheney, M., *Effects of measurement precision and finite numbers of electrodes on linear impedance imaging algorithms*, SIAM J. Appl. Math. **51** (1991), 1705–1731.
26. Nachman, A., *Reconstructions from boundary measurements*, Ann. Math. **128** (1988), 531–577.
27. ———, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. Math. **143** (1996), 71–96.
28. Ohtsuka, K., *Mathematics of Brittle fracture*, in Theoretical studies on fracture mechanics in Japan (Ohtsuka, K. ed.), Hiroshima-Denki Institute of Technology, Hiroshima, Japan, 99–172.
29. Seo, J. K., *A uniqueness result on inverse conductivity problem with two measurements*, The J. Fourier Analysis and Applications **2** (1996), 227–235.
30. Siltanen, S., Mueller, J. and Issacson, D., *An implementation of the reconstruction algorithm of A. Nachman for the 2-D inverse conductivity problem*, to appear, Inverse Problems.
31. Somersalo, E., Cheney, M. and Issacson, D., *Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography*, SIAM J. Appl. Math. **52** (1992), 1023–1040.
32. Sylvester, J. and Uhlmann, G., *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math. **125** (1987), 153–169.
33. Uhlmann, G., *Developments in inverse problems since Calderón's foundational paper*, in Harmonic analysis and partial differential equations (Christ, M., Kenig, C. E. and Sadosky, C., eds.) (1999), The University of Chicago Press, Chicago and London, 295–345.