

発展方程式の平衡点の数値検証の力学系的アプローチ

Dynamical approach in rigorous verification of equilibria for evolutionary equations

*松江 要 (Kaname Matsue)

京都大学理学研究科数学教室 (Department of Mathematics, Kyoto University.)

*Email: k-matsue@math.kyoto-u.ac.jp

キーワード: 放物型発展方程式, Conley 型指数, 有限要素法, 計算機援用解析.

1 導入

本稿では, 有限要素法と Conley 型指数を用いた放物型発展方程式の定常解の数値検証法を紹介する. 偏微分方程式などが生成する無限次元力学系においては, エネルギー減衰する多くの系で, その時間発展に対する漸近的振る舞いを記述する「グローバルアトラクタ」の存在が知られている. しかし, その内部構造に関して, とくに, 数学理論のみを用いて導かれている結果は限られている.

理論解析だけでは力学系や非線型問題の解の構造解明が困難な時, 計算機によるシミュレーションがその理解を助ける場合が多いが, 連続系の離散化 (打ち切り誤差など), 計算機特有の誤差 (丸め誤差など) により, その結果は数学的厳密性を欠くものとなっている. そこで演算を区間に対して行う区間演算に基づいた「精度保証付き数値計算」を併用する事で, 計算機で得られる結果が数学的に厳密なものとなり, 自然や工学などに現れる様々な現象を数学的視点に立って理解する事を助けてくれる. 力学系の平衡点としての定常解の検証は, グローバルアトラクタの解析の第 1 歩として位置づけられる.

これまで知られた楕円型偏微分方程式の解, あるいは放物型偏微分方程式の定常解の数値検証法として, 例えば [14] や [21] がある. [14] の手法は, 数値解法として有限要素法を用いており, もとの問題をコンパクト作用素, あるいは準ニュートン型の作用素の不動点問題に帰着させ, Banach や Schauder といった種々の不動点定理が成立するような集合を構成する事を基礎とする. この手法は, 多次元領域上の方程式, 定常解の 2 次分岐点, 非凸領域上の方程式の解の検証など, 様々な応用がある. しかし, コンパクト作用素の不動点問題に帰着させる過程において, 力学系としての安定性の情報が抜け落ち, よって力学系の情報を引き出すには不十分である.

一方, [21] の手法は Conley 指数と呼ばれる力学系の孤立不変集合に対し定義される位相不変量を用いて, 不動点の存在を示す事を基礎とする. [21] においては定常解の存在のみが示されているが, その後の応用 [2] においては, 定常解の局所一意性も示す事で, 定常解の安定性も Conley 指数から引き出している. また, 周期軌道の存在, カオス的不変集合の存在検証にも応用がある. しかし, [21] やそれが応用された種々の研究においては, 放物型偏微分方程式に周期境界条件を課したもののみを考察しており, 解が Fourier 級数展開できることを前提としている. 例えば, 消散型波動方程式 (下の (1)) に零ディリクレ境界条件を課した問題の解は, 直交関数系で展開できるが三角関数での展開ではなく, 解析が難しい. 詳しくは [3] 参照. また, 境界条件を変えた時には, 展開する関数系をとりなおさなければならず, 従ってその都度誤差評価式を構築しなおさなければならないので, 様々な境界条件を考慮すべき系には向かない. さらに, Fourier 級数展開を用いるために, 非矩形領域上の方程式への適用は非常に難しいと思われる.

他方, 無限次元力学系の視点から見た時 ([3]), Navier-Stokes 方程式や蔵本・シバシンスキー方程式といった放物型偏微分方程式以外にも, これらの方程式と類似した性質, 例えばエネルギー減衰やグローバルアトラクタの存在が保証された力学系を記述する方程式 (系) は多数存在する. 例えば, 本稿で考察する以下の方程式がそうである:

$$u_{tt} - \alpha \Delta u_t - \Delta u = f(u, u_t), \quad (1)$$

類似した性質を持つ力学系の考察は、既知の手法の類似物を用いて解析できるのでは、と考えるのは自然である。

今研究は、定常解の存在とその力学系的性質を解析するという点において、上で述べた既知の手法の拡張可能性に応えるものである。ここでは、大きく分けて「(1) のような発展方程式の定常解の数値検証」「勾配系の定常解の局所一意性・双曲性検証法」「高階微分を含む方程式系への応用」を考える。

本稿は以下の節からなる。2 節では本稿で述べる手法の前提となる発展方程式系の大域力学系の生成について述べる。3 節では、不変集合、不動点の存在や安定性を示す Conley 指数の無限次元版である Conley-Rybakowski 指数と、それを適用可能にするある力学系のクラスについて述べる。4 節では、Conley 型指数と線型作用素のスペクトルの情報を併用した定常解の局所一意性、双曲性検証定理を述べる。5 節では、実際に数値検証すべき条件を考察し、不動点の存在とそれを含む不変集合の Conley 型指数を計算できるような集合の構成法を述べる。数値検証に用いる数値解法としては、有限要素法を用いる。それにより、様々な境界条件を課した方程式に適用する事ができる。6 節で、本手法の適用例を述べる。最後に、本研究集会后に考察し、新たに得られた結果に関して簡単にコメントする。

2 準備

与えられた $\alpha > 0$ に対し、函数 $u(t, x)$ に対する次の方程式を考える：

$$u_{tt} + \alpha Au_t + Au = f(u) \text{ on } \{t > 0\} \times \Omega \quad (2)$$

これに零ディリクレ境界条件を課す：

$$u(t, \cdot) = u_t(t, \cdot) = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (3)$$

ここに、 α は非負定数で、 $Au = -\Delta u$ 、 Δ はラプラシアン、 f は非線型函数で、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 、 $n = 1, 2$ は有界領域である。ここでは Ω の「凸性は仮定しない」。

以下の本稿の議論においては、 A を X 上稠密に定義された正值自己共役作用素としてもよい。 f は一般に $t, \nabla u, \Delta u, u_t$ などに依存する場合も考えられるが、簡単のため、本稿では u のみに依存する場合だけを考える。

今、方程式 (2) は発展方程式系と同値である：

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = -\alpha Av - Au + f(u) \end{cases}, \text{ or } \dot{U} = BU + F(U) \quad (4)$$

ここに、

$$U_t = (u, v)^t, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha A & -\alpha I \end{pmatrix} \text{ そして } F(U) = (0, f(u))^t.$$

である。本稿では、主に発展方程式系として (4) を考える。次に、以下で与えられる変換を考える：

$$u = \phi, \quad v = \gamma\phi + \delta\psi, \quad (5)$$

ここに γ と δ は任意の数であるが、後で固定する。この時、系は次のように書き換えられる：

$$\begin{pmatrix} \phi_t \\ \psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\delta^{-1} & \delta^{-1} \\ (-\gamma^2\delta^{-1}) + (\alpha_2\gamma - \delta)A & \gamma\delta^{-1} - \alpha A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta f(\phi) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

(ϕ, ψ) が (6) の解である事と、 $(u, v) := (\phi, \delta^{-1}(\psi - \gamma\phi))$ が (4) の解である事と同値である事が容易に分かり、よって $u = \phi$ が (2) の解となるので、(6) について考察すればよい。

ここで、定常解の数値検証法を考えるが、最初のステップとして、もとの系を以下のように有限次元と無限次元部分に分解する：

$$(P_h U)_t = P_h(B_{\alpha_1, \alpha_2} U + F(U)), \quad (Q_h U)_t = Q_h(B_{\alpha_1, \alpha_2} U + F(U)),$$

ここに P_h は、ある Banach 空間 B の有限次元部分空間への直交射影であり、 $Q_h = I - P_h$ である。このような Banach 空間は、数学的にも、数値計算の面でも、検証に適した空間でなければならない。そこで、次の節で (4) が生成する力学系の性質を調べ、 B として適切な空間を決定する。

2.1 力学系の生成

今、簡単のために、非線型関数 f に対して以下を仮定する。

仮定 2.1.

$$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \overline{\lim}_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0 \quad \text{と} \quad f(0) = 0$$

が成立する。

この時、次の定理が成り立つ。

定理 2.2 ([7]). (4) 内の線型作用素 B_α はセクトリアル作用素。すなわち、 C は解析半群 $\{e^{-B_\alpha t}\}_{t \geq 0}$ を生成する。

定理 2.3 ([7]). 発展方程式 (4) は、 $X^\beta \times X^\sigma$, $0 \leq \sigma \leq \beta < 1$ 上勾配的大域 *semiflow* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を生成する。ここに、 X^r , $0 \leq r < 1$ は線型作用素 A の r 次分数ベキ空間 $D(A^r)$ である。詳しい定義は [4] を見よ。また、 $T(t)$ は以下のように分解できる： $T(t) = S_1(t) + S_2(t)$ 。ここに、 $\|S_1(t)\| \leq M e^{-at}$, $a > 0$ であり、 $S_2(t)$ は $t > 0$ でコンパクト。

ここで、以上の定理において、仮定 2.1 は本質的ではなく、より一般の状況でも成立する事に注意しておく。

注意 2.4. 線型部分が定理 2.2 を満たすような発展方程式はしばしば「放物型発展方程式」と呼ばれる。例えば [18] を見よ。なお、ここまでの結果は、 A がセクトリアル作用素 ([4]) と呼ばれるクラスの作用素の場合でも同じ結果が成立する。[7] 参照。

以上により、Banach 空間 B の候補として線型作用素 A の分数ベキ空間の積 $X^\beta \times X^\sigma$ が挙げられる。しかし、ここでは有限要素法の適用、検証条件を簡単にする事を考慮し、 X として $X^{1/2} \times X^{1/2}$ を選ぶ。これは、例えば $A = -\Delta$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ のときは $B = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ であり、 $A = \Delta^2$, $D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ の時は $B = H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ となる。

さて、 Ω に凸性を仮定しなかったたので、楕円型偏微分方程式の一般論により、定常解 u の正則性は一般に保証されない。そこで、以下では「(6) の弱問題」、すなわち、以下の問題を考える：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\phi_t, \bar{\phi}) \\ (\psi_t, \bar{\psi}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\gamma \delta^{-1} & \delta^{-1} \\ -\gamma^2 \delta^{-1} + \alpha_1 \gamma & \gamma \delta^{-1} - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\phi, \bar{\phi}) \\ (\psi, \bar{\psi}) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 \gamma - \delta & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{1/2} \phi, A^{1/2} \bar{\phi}) \\ (A^{1/2} \psi, A^{1/2} \bar{\psi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(f(\phi), \bar{\psi}) \end{pmatrix}, \quad \forall \bar{\phi}, \bar{\psi} \in X^{1/2}. \quad (7) \end{aligned}$$

3 漸近コンパクト性, Conley-Rybakowski 指数

エネルギー減衰する多くの発展方程式は、ある 1 つの大きな力学系のクラスに属する。それは α -縮小的な力学系と呼ばれるものである。ここに、 α とは後に定義する Kuratowski 非コンパクト性測度である。このクラスに属するものに対しては、孤立不変集合に対する Conley 型の指数が定義できて、よって本稿の手法が非常に広いクラスの発展方程式 (系) に適用できると期待される。

3.1 縮小的写像

X を完備距離空間とする。まず、力学系の縮小性の概念を述べるために、 X 上の非コンパクト性測度というものを導入する。

定義 3.1. X 上非コンパクト性測度 γ とは、 X の有界集合を非負実数に写す関数で、次を満たす：

1. $A \subset X$ に対し、 $\gamma(A) = 0 \Leftrightarrow A$ はプレコンパクト。
2. $\gamma(A \cup B) = \max\{\gamma(A), \gamma(B)\}$ 。
3. $\gamma(A + B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$ 。

ここで、 $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ である。このような測度の例として、Kuratowski の非コンパクト性測度 α があり、それは次で定義される：

$$\alpha(A) := \inf\{d \mid A \text{ は直径 } d \text{ 未満の球による有限被覆を持つ}\}.$$

定義 3.2. β を X 上非コンパクト性測度とする。半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ が条件付き β -縮小的であるとは、連続関数 $k : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し、 $t \rightarrow \infty$ の時 $k(t) \rightarrow 0$ 、各 $t > 0$ と各有界集合 $B \subset X$ で、集合 $\{T(s)B \mid 0 \leq s \leq t\}$ が有界となるものに対して、 $\beta(T(t)B) \leq k(t)\beta(B)$ を満たす事を言う。半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ が β -縮小的であるとは、条件付き β -縮小的であり、各 $t > 0$ に対し、 B が有界集合の時、集合 $\{T(s)B \mid 0 \leq s \leq t\}$ が有界であることをいう。

3.2 漸近コンパクト性

ここでは α -縮小的力学系に対し、完備距離空間内の閉集合のある種の「コンパクト性」の概念を復習する。この概念は、Conley-Rybakowski 指数理論を適用する上で本質的なものである。

N を完備距離空間 X の閉部分集合とし、 π を X 上の semiflow とする。この時、 N は次を満たす時、(π について) 漸近コンパクトである、という：

- $\{x_n\} \subset X$ と $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ を 2 つの任意の列で、 $n \rightarrow \infty$ の時 $t_n \rightarrow \infty$ となり、全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \pi[0, t_n] \subset N$ が成り立っているとする。この時、終点の列 $\{x_n \pi t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は収束部分列を持つ。

注意 3.3. Rybakowski の本 [17] では、「 π -許容的 (admissible)」という言葉を用いている。

今、抽象的發展方程式の半群を考える。

定理 3.4 ([3]). $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を Banach 空間 X 上 C^0 -半群で、次を満たすものとする：

$$T(t)x = S(t)x + \int_0^t S(t-s)BT(s)x ds \quad (8)$$

が、全ての $t \geq 0$ と $x \in X$ に対して成立する。ここに $S(t)$ は線型写像の C^0 -半群で、 B は X から X への写像であり、今、次を仮定する：

$$B \text{ は完全連続。} \quad (9)$$

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) \text{ が、全ての } t \geq 0 \text{ に対して成立する。} \quad (10)$$

ここに $S_1(t), S_2(t)$ はともに X から X への線型写像で、ある連続関数 $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ が存在して、任意の $t \geq 0$ で $|S_1(t)| \leq c(t)$ を満たし、 $S_2(t)$ は充分大きな t に対して完全連続となる。

この時、 C^0 -半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ は以下のような分解を持つ：

$$T(t) = S(t) + U(t).$$

ここに、 $U(t)$ は $t > 0$ に対し条件付き完全連続写像である。

注意 3.5. $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を Banach 空間 X 上線型 C^0 -半群とし

$$\alpha(T(t)) := \inf\{k \mid \alpha(T(t)B) \leq k\alpha(B) \mid B \subset X \text{ は有界集合}\},$$

とする. ここに, α は Kuratowski の非コンパクト性測度である. 線型半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ は, $t \rightarrow \infty$ に対して $\alpha(T(t)) \rightarrow 0$ となる時, α -縮小的であるという.

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ が α -縮小的線型半群である時, 自然数 n と正定数 $\beta > 0$ で, $\alpha(T(n)) = e^{-\beta n} < 1$ なるものが取れる. 明らかに, 任意の $t > 0$ に対して, 整数 p で, $0 < t - np < n$ なるものがとれる. 今, $k := \sup\{\alpha(T(t)) \mid 0 \leq t \leq n\}$ としよう. すると,

$$\begin{aligned} \alpha(T(t)) &= \alpha(T(t - np)T^p(n)) \leq k\alpha(T^p(n)) \\ &\leq ke^{-\beta pn} = ke^{\beta(t-pn)}e^{-\beta t} \leq ke^{\beta n}e^{-\beta t} \end{aligned}$$

となる. 今, $c(t) := ke^{\beta n}e^{-\beta t}$ とする. 明らかに, $t \rightarrow \infty$ の時 $c(t)$ は指数的に 0 に収束する. 上の議論と, 定理 3.4 により, C^0 -半群 $T(t)$ は (10) を満たす時, α -縮小的となる.

次の定理は, 任意の α -縮小的力学系に対し, Conley-Rybakowski 指数理論が適用できる事を保証する.

定理 3.6 (e.g.[3]). $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を X 上の, (9) と (10) を満たす半群とする. この時, X の任意の有界閉集合は $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ について漸近コンパクトである.

3.3 Conley-Rybakowski 指数

この節では Conley 型の指数を導入する. この代数位相幾何不変量は特別な性質を持った力学系の不変集合, 「孤立不変集合」に対して定義される. 完備距離空間 X 上の local semiflow を π とする. すなわち,

- $\pi: D \rightarrow X$ は連続写像. ここに, D は $[0, \infty) \times X$ の開部分集合である. ($\pi(t, x)$ を $x\pi t$ と書く.)
- 全ての $x \in X$ に対し, $\omega_x, 0 < \omega_x \leq \infty$ が存在して, 次を満たす. $(t, x) \in D$ は $0 \leq t < \omega_x$ と同値.
- 全ての $x \in X$ に対し, $x\pi 0 = x$.
- $(t, x) \in D$ かつ $(s, x\pi t) \in D$ なら, $(t+s, x) \in D$ で, $x\pi(t+s) = (x\pi t)\pi s$ が成立.

定義 3.7. Y を X の部分集合とする時, Y の不変部分を次で定義する.

$$\text{Inv}(Y) := \{x \in X \mid x \text{ を通る解 } \sigma: (-\infty, \omega_x] \rightarrow X \text{ で, } \sigma(-\infty, \omega_x] \subset Y \text{ を満たすものが存在する}\}.$$

定義 3.8. K を閉不変集合とし, K の (開) 近傍 U で, K が U に含まれる最大の不変集合となるようなものが取れる時, K を孤立不変集合と呼ぶ. 他方, X の閉集合 N が $K := \text{Inv}(N) \subset \text{int} N$ を満たす時, N を K の孤立化近傍と呼ぶ.

実際に孤立化近傍とその不変部分の不変量 (Conley 型指数) を考える時, 孤立化近傍として, その境界と semiflow が「横断的に交叉する」ような物をとる. この精神の下, 孤立化近傍の境界の点として, 「出口」「入口」を考え, これらのみで境界が構成されるような孤立化近傍を考える.

定義 3.9. N を孤立化近傍とする.

- $x \in \partial N$ が, $\epsilon_x > 0$ と x を通る解 σ が存在して $x\pi t \notin N$ と $\sigma(-t) \notin \partial N$ が $t \in (0, \epsilon_x)$ に対して成立する時, 出口の点 ($x \in N^-$) であるという.
- $x \in \partial N$ が, $\epsilon_x > 0$ と x を通る解 σ が存在して $\sigma(-t) \notin N$ と $x\pi t \in \text{int}(N)$ が $t \in (0, \epsilon_x)$ に対して成立するとき, 入口の点 ($x \in N^+$) であるという.

- N が $\partial N = N^- \cup N^+$ を満たし, 出口 N^- が ∂N 内閉集合である時, 孤立化ブロックという.

注意 3.10. B が K の孤立化ブロックの時, 閉集合の対 (B, B^-) は K の B 内 “index pair” の特別な場合とみなせる. 一般の index pair については, [17] を参照.

定義 3.11. π を大域 semiflow, K を π -孤立不変集合で, π について漸近コンパクトとなる孤立化近傍 N を有するものとする. N 内の K の index pair を (N_1, N_2) とする (このような pair は必ず存在する事が知られている). この時 Conley-Rybakowski (CR) 指数を次で定義する:

$$CH_*(K, \pi) := H_*(N_1/N_2, [N_2]),$$

上の定義は index pair の取り方に依らない.

定理 3.12 ([17]). K を π -孤立不変集合とする. $K = \emptyset$ なら $CH_*(K, \pi) \cong 0$ である. よって, $CH_*(K, \pi) \neq 0$ なら $K \neq \emptyset$ である.

4 定常解の局所一意性・双曲性

ここでは, 自己共役作用素の可逆性と CR 指数の情報から, 平衡点の双曲性と局所一意性を導ける事を示す. 一般に強消散型波動方程式の線型化作用素

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A + Df(\bar{u}) & -\alpha A \end{pmatrix}$$

は自己共役作用素ではないが, $-A + Df(\bar{u})$ が自己共役である場合は, 双曲性の検証条件を自己共役作用素の可逆性条件に帰着させる事が出来る.

4.1 双曲型平衡点

まず, 平衡点の双曲性の定義をおさらいしよう.

定義 4.1. 非線型発展方程式 $\dot{u} = F(u)$ のなす力学系の平衡点 $\bar{u}$ は, F の $\bar{u}$ における線型化作用素 $DF(\bar{u})$ のスペクトル $\sigma(DF(\bar{u}))$ が虚軸と交わりを持たないとき, 双曲型であるという.

この概念のアナロジーとして, 有界線型作用素 A で, そのスペクトル $\sigma(A)$ が虚軸と交わりを持たないようなものを, 「双曲型作用素」と呼ぶ事にしよう.

消散型波動方程式の定常解の双曲性を検証する場合は, 上の $\tilde{L}$ のスペクトルの虚軸との交わりを調べる. 一般に, スペクトルの虚軸全体との交わりの考察は非常に難しいが, $\tilde{L}$ に付随するある作用素 $\tilde{A}$ の可逆性の条件に帰着できれば $\tilde{L}$ のスペクトルの考察ができる. $\tilde{A}$ が自己共役の場合, そのスペクトルは実軸に含まれるので, A の可逆性が, そのまま平衡点の双曲性へとつながる.

4.2 可逆性検証

まず, 簡単な計算により, 次がわかる.

補題 4.2. A を正值自己共役, $Df(\bar{u})$ を有界自己共役作用素であるとし, $\lambda = \sqrt{-1}\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ を $\tilde{L}$ の固有値とすると, $\mu = 0$ である.

これにより、虚軸上の $\tilde{L}$ の固有値は 0 しか存在しえない事がわかった。さらに、 $\alpha > 0$ より $\tilde{L}$ の真性スペクトルは $\mathbb{C}$ の左半平面に含まれることもわかる ([3])。以上の事から、平衡点 $\bar{u}$ の双曲性は $\tilde{L}$ の可逆性判定問題に帰着される。

次に、いつ $\tilde{L}$ が可逆になるかを見ていく。形式的には、 $\tilde{L}$ の逆作用素は次のように書ける：

$$\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha A & -I \\ -A + Df(\bar{u}) & 0 \end{pmatrix} (A - Df(\bar{u}))^{-1}.$$

この作用素が有界作用素として意味を持てばいい。この時、次が成立する。

補題 4.3. $(-A + Df(\bar{u}))^{-1}$ が $L^2(\Omega)$ から $D(A^{1/2})$ への有界線型作用素として定義できる時、 $\tilde{L}$ は可逆。

Proof. 形式的に定義した $\tilde{L}^{-1}$ の全成分が有界であればいい。

$$\begin{aligned} \|\alpha A(A - Df(\bar{u}))^{-1}\| &= \alpha \|A(A - Df(\bar{u}))^{-1}\| \\ &= \alpha \|(A - Df(\bar{u} + Df(\bar{u}))(A - Df(\bar{u}))^{-1}\| \\ &= \alpha \|1 + Df(\bar{u})(A - Df(\bar{u}))^{-1}\| \\ &\leq \alpha(1 + \|Df(\bar{u})\| \|(A - Df(\bar{u}))^{-1}\|) < \infty. \end{aligned}$$

よって $\tilde{L}^{-1}$ の第 (1, 1) 成分は有界。残りの成分が有界であることは明らか。 □

以上をまとめると次を得る。

定理 4.4. 定常解 $\bar{u}$ は、 $(-A + Df(\bar{u}))^{-1}$ が $L^2(\Omega)$ から $D(A^{1/2})$ への有界線型作用素として定義できる時、双曲型となる。

よって、放物型の場合と同様、 $-A + Df(\bar{u})$ の可逆性を調べてやれば $\bar{u}$ の双曲性を得る。 $-A + Df(\bar{u})$ の可逆性については [8] を見よ。

4.3 局所一意性・双曲性

以下、CR 指数により存在が示された不動点の局所一意性と、双曲性を検証するための条件と、それにより得られる結果を示す。

仮定 4.5. • A は正值自己共役作用素。とくに、セクトリアル作用素 ([4]) である。

- f は $D(A^{1/2})$ から X への写像として局所リプシッツ。
- 発展方程式

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\alpha A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}$$

は大域 semiflow π を生成する。

- N を可縮な π -孤立化近傍とし、各 $u \in N$ に対してフレシェ微分 $Df(u)$ が存在する。
- π は勾配的。すなわち、ある $\mathbb{R}$ -値連続関数 V が存在して、

$$V(xnt) \leq V(x), \forall x, t \in \mathbb{R} (\text{軌道が定義される範囲で})$$

を満たす。

定理 4.6. 仮定 4.5 が成り立つとし、さらに、線型化作用素

$$\tilde{L}_v := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A + Df(v) & -\alpha A \end{pmatrix}$$

が、全ての $v \in N$ に対して双曲型であると仮定する。最後に、ある $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し、 $\text{Inv}(N)$ の CR 指数が以下で与えられるとする：

$$CH_n(\text{Inv}(N)) \cong \begin{cases} R & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}.$$

この時、 $\text{Inv}(N) = \{\bar{u}\}$ である。ここに、 $\bar{u}$ は m 次元不安定多様体をもつ π の双曲型不動点である。

証明は connection matrix と呼ばれる Conley 型指数理論を応用した代数的道具を使うが、ここでは略す。詳しくは [8] 参照 ([9] に公開中)。

5 定常解の数値検証法

5.1 力学系の持ち上げ

ここから定常解の検証法の概略を述べる。以下で述べる力学系の「持ち上げ」を基礎として、系の有限次元、無限次元部分を個別に検証する事になる。 π を (4) が生成する Hilbert 空間 $\tilde{X} = X^{1/2} \times X^{1/2}$ 上の semiflow, X_h を $\tilde{X}$ の有限次元部分空間, $P(= P_h \times P_h) : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ を X_h 上への直交射影, $N = N_1 \times N_2$ を, $N_1 \subset X_h = P\tilde{X}$, $N_2 \subset Q\tilde{X}$ を満たす $\tilde{X}$ の有界閉集合とする。応用上, X_h はガレルキン近似部分空間とする。特に、有限要素空間にとる事が出来る (h は有限要素メッシュサイズ)。 π_{1,u_2} を、(4) の有限次元部分

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ((P_h\phi)_t, P_h\bar{\phi}) \\ ((P_h\psi)_t, P_h\bar{\psi}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\gamma\delta^{-1} & \delta^{-1} \\ -\gamma^2\delta^{-1} + \alpha_1\gamma & \gamma\delta^{-1} - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P_h\phi, P_h\bar{\phi}) \\ (P_h\psi, P_h\bar{\psi}) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2\gamma - \delta & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{1/2}P_h\phi, A^{1/2}P_h\bar{\phi}) \\ (A^{1/2}P_h\psi, A^{1/2}P_h\bar{\psi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(P_h f(P_h\phi + u_2), P_h\bar{\psi}) \end{pmatrix}, \forall \bar{\phi}, \bar{\psi} \in X^{1/2} \end{aligned}$$

が生成する有限次元 flow とする。この場合, $u = u_1 + u_2$, $u_i \in N_i$ と分解し, u_2 はパラメータと見る。ここで簡単のため, N_2 を次の形に限定する：

$$N_2 = \{u_2 \in Q\tilde{X} \mid (\|A^{1/2}Qu_{2,1}\|_{L^2}^2 + (Ch)^{-2}\|Qu_{2,2}\|_{L^2}^2)^{1/2} \leq M\}, M > 0.$$

N_2 を次の形にとるのは、よく知られた Aubin-Nitsche トリックにより、

$$\|(I - P_h)u\|_{L^2} \leq Ch\|\nabla u\|_{L^2}$$

が、任意の $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ について成立することによる。ただし、この評価式が成立するためには、 u の H^2 -正則性を仮定しているため、領域 Ω は凸でなければならない。しかし、以下の議論は Ω が非凸の場合でも同様に扱える事に注意しておく。

さて、CR 指数と「高々有限回の計算」によって、放物型発展方程式の定常解の存在検証をしたい。そのためには無限次元部分で高々有限回の計算を実行する事により、有限次元部分の情報からもとの系の情報を自動的に引き出せるようにできればいい。CR 指数は、孤立化ブロックの出口の構造がその定義において本質的である。よって有限次元部分の情報から元の系の情報を引き出すには、 N_2 の形を考慮に入れると、無限次元部分に「出口がない」という条件を課す事が望ましい。すると定理 5.1 と、それにより検証条件としての定理 5.2 が得られる。

定理 5.1. 以下を仮定する（入口条件）. $\|A^{1/2}Qu_{2,1}\|_{L^2}^2 + (Ch)^{-2}\|Qu_{2,2}\|_{L^2}^2 = M^2$ なる全ての $u \in N$ に対し,

$$\frac{d}{dt}(\|A^{1/2}Qu_{2,1}\|_{L^2}^2 + (Ch)^{-2}\|Qu_{2,2}\|_{L^2}^2) < 0. \quad (11)$$

(a) $I \subset N_1$ が π_{1,u_2} ($u_2 \in N_2$) についての孤立化ブロックの時, $I \times N_2 \subset N$ は π についての孤立化ブロック.

(b) $\text{Inv}(N)$ の π についての CR 指数は $\text{Inv}(N_1)$ の π_{1,u_2} ($u_2 \in N_2$) についての CR 指数と一致する.

定理 5.2. Semiflow π_{1,u_2} ($u_2 \in N_2$) の孤立化ブロック $B_1 \subset N_1$ で, 入口条件 (11) と $CH_*(\text{Inv}(B_1), \pi_{1,u_2}) \neq 0$ が任意の $u_2 \in N_2$ について成立するものが取れるとする. この時 π の時間大域的な解が N 内に存在する. さらに, ある $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $\text{Inv}(B_1, \pi_{1,u_2})$ の CR 指数が以下で与えられるとする:

$$CH_*(\text{Inv}(B_1), \pi_{1,u_2}) \cong \begin{cases} R & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}.$$

この時, π の不動点が N 内に存在する.

不動点の存在以外は定理 5.1 の帰結である. 不動点の存在は, Nussbaum により一般化された不動点指数 ([15]) と, Mrozek による離散力学系における一般化 Lefschetz 不動点定理 ([10]) を応用する.

5.2 無限次元部分の検証条件

以下, 入口条件が 1 つの不等式に帰着される事を見ていく. Aubin-Nitsche のトリックを使うため, 定義領域 Ω は凸と仮定する. 非凸の場合も, 定量的誤差評価式 ([20]) が得られれば同様の考察は可能である.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|A^{1/2}Q_h\phi\|_0^2 + \|Q_h\psi\|_0^2 \right) \\ &= (-\gamma\delta^{-1}A^{1/2}Q_h\phi + \delta^{-1}A^{1/2}Q_h\psi, A^{1/2}Q_h\phi) + (-\gamma^2\delta^{-1}Q_h\phi, Q_h\psi) \\ & \quad + ((\alpha\gamma - \delta)A^{1/2}\phi, A^{1/2}Q_h\psi) + (\gamma\delta^{-1}Q_h\psi, Q_h\psi) - (\alpha A^{1/2}Q_h\psi, A^{1/2}Q_h\psi) + \delta(Q_hf(\phi), Q_h\psi) \\ &= -\gamma\delta^{-1}\|A^{1/2}Q_h\phi\|_0^2 + (\delta^{-1}A^{1/2}Q_h\psi, A^{1/2}Q_h\phi) + (-\gamma^2\delta^{-1}Q_h\phi, Q_h\psi) \\ & \quad + (\alpha\gamma - \delta)(A^{1/2}Q_h\phi, A^{1/2}Q_h\psi) + \gamma\delta^{-1}\|Q_h\psi\|_0^2 - \alpha\|A^{1/2}Q_h\psi\|_0^2 + \delta(Q_hf(\phi), Q_h\psi). \end{aligned}$$

ここで, $(A^{1/2}Q_h\phi, A^{1/2}Q_h\psi)$ の項がキャンセルされるように係数に関係をつける. すなわち, 次を要求する.

$$\delta^{-1} + \alpha\gamma - \delta = 0 \Leftrightarrow \delta = \frac{\alpha\gamma - \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4}}{2}.$$

この関係の下で, Aubin-Nitsche のトリックも使って,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|A^{1/2}Q_h\phi\|_0^2 + \|Q_h\psi\|_0^2 \right) \\ & \leq -\gamma\delta^{-1}\|A^{1/2}Q_h\phi\|_0^2 + (-\gamma^2\delta^{-1}Q_h\phi, Q_h\psi) \\ & \quad + \gamma\delta^{-1}\|Q_h\psi\|_0^2 - \alpha\|A^{1/2}Q_h\psi\|_0^2 + \|Q_hf(\phi)\|_0\|Q_h\psi\|_0 \\ & \leq -\gamma\delta^{-1}\|A^{1/2}Q_h\phi\|_0^2 + (-\gamma^2\delta^{-1}Q_h\phi, Q_h\psi) \\ & \quad + \gamma\delta^{-1}\|Q_h\psi\|_0^2 - \frac{\alpha}{(Ch)^2}\|Q_h\psi\|_0^2 + \|Q_hf(\phi)\|_0\|Q_h\psi\|_0. \end{aligned}$$

ここで, ブロックの形を考慮して, $\|A^{1/2}Q_h\phi\|_0$ と $\|Q_h\psi\|_0$ の係数をそろえる. よって, 次を要求する:

$$\gamma\delta^{-1} = -\gamma\delta^{-1} + \frac{\alpha}{(Ch)^2} \quad (12)$$

ここで γ の値を求めようとする、まず γ と δ が同符号であることが要求される事がわかるが、そのために次の条件が否応なしに仮定されてしまう：

$$2(Ch)^2 > \alpha^2. \quad (13)$$

よって、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2 \right) \\ & \leq -\frac{\alpha}{2(Ch)^2} (\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2) + (-\gamma^2 \delta^{-1} Q_h \phi, Q_h \psi) \\ & \quad + \delta \|Q_h f(\phi)\|_0 \|Q_h \psi\|_0 \\ & \leq -\frac{\alpha}{2(Ch)^2} (\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2) + Ch |\gamma^2 \delta^{-1}| \|A^{1/2} Q_h \phi\|_0 \|Q_h \psi\|_0 \\ & \quad + \delta \|Q_h f(\phi)\|_0 \|Q_h \psi\|_0 \\ & \leq -\frac{\alpha}{2(Ch)^2} (\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2) + \frac{\alpha}{4Ch} |\gamma| (\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2) \\ & \quad + \delta \|Q_h f(\phi)\|_0 \|Q_h \psi\|_0 \end{aligned}$$

ここで γ を求めてみる。ここでも γ と δ は同符号でなければならない事に注意しよう。(13) の仮定の下、 γ の値を求めてみると次のようになる。

$$\begin{aligned} 2\gamma\delta^{-1} = \frac{\alpha}{(Ch)^2} & \Leftrightarrow \frac{2(Ch)^2}{\alpha} \gamma = \delta \Leftrightarrow \frac{2(Ch)^2}{\alpha} \gamma = \frac{\alpha\gamma - \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4}}{2} \\ & \Leftrightarrow \left(4 \left(\frac{(Ch)^2}{\alpha} \right) - \alpha \right) \gamma = -\sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4} \Leftrightarrow \left(4 \left(\frac{(Ch)^2}{\alpha} \right)^2 - 2(Ch)^2 \right) \gamma^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{2(Ch)^2}{\alpha^2} (2(Ch)^2 - \alpha^2) \gamma^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}Ch} \sqrt{\frac{1}{2(Ch)^2 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

これにより、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2 \right) \\ & \leq -\frac{\alpha}{2(Ch)^2} (\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2) + \frac{\alpha^2}{4(Ch)^2 \sqrt{2(Ch)^2 - \alpha^2}} (\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2) \\ & \quad + \delta \|Q_h f(\phi)\|_0 \|Q_h \psi\|_0 \\ & \leq -\frac{\alpha}{2(Ch)^2} \left(1 - \frac{\alpha}{4\sqrt{2(Ch)^2 - \alpha^2}} \right) (\|A^{1/2} Q_h \phi\|_0^2 + \|Q_h \psi\|_0^2) + \delta \|Q_h f(\phi)\|_0 \|Q_h \psi\|_0 \\ & \leq -\frac{\alpha}{2(Ch)^2} \left(1 - \frac{\alpha}{4\sqrt{2(Ch)^2 - \alpha^2}} \right) M^2 + \delta \|Q_h f(\phi)\|_0 M < 0. \end{aligned}$$

よって次が示された。

定理 5.3. 発展方程式系 (6) の無限次元部分の入口条件は次の不等式が成立する時満たされる。

$$\gamma_* \frac{(Ch)^2}{\alpha} \sup_{[\phi, \psi] \in N} \|Q_h f(\phi)\|_0 < M.$$

ここで、

$$\gamma_* = 2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\sqrt{2(Ch)^2 - \alpha^2}} \right)^{-1} |\delta|$$

であり、正の数 C, h と α の間には (13) を仮定しないといけない。

一般に C も h も非常に小さいが、条件 (13) のために、 α も自動的に小さくならないといけなくなり、このままでは大きなパラメータ値、大きなノルムを持つ解などの検証ができず、非常に使い勝手が悪い。(13) を打ち消す根本的な解決法が必要である。

ここで、 γ と δ が複素数値をとることも許して、 γ を求めてみると次のようになる。

$$\begin{aligned} 2\gamma\delta^{-1} &= \frac{\alpha}{(Ch)^2} \Leftrightarrow \frac{2(Ch)^2}{\alpha}\gamma = \delta \Leftrightarrow \frac{2(Ch)^2}{\alpha}\gamma = \frac{\alpha\gamma - \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4}}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(4\left(\frac{(Ch)^2}{\alpha}\right) - \alpha\right)\gamma = -\sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4} \Leftrightarrow \left(4\left(\frac{(Ch)^2}{\alpha}\right)^2 - 2(Ch)^2\right)\gamma^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(Ch)^2}{\alpha^2}(2(Ch)^2 - \alpha^2)\gamma^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{2}Ch}\sqrt{\frac{1}{2(Ch)^2 - \alpha^2}} \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{2}Ch}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2 - 2(Ch)^2}}i. \end{aligned}$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位。残りの計算は先の節におけるそれと全く同じである。ちなみに δ は

$$\delta = \frac{2(Ch)^2}{\alpha}\gamma = \sqrt{2}Ch\sqrt{\frac{1}{\alpha^2 - 2(Ch)^2}}i$$

である。よって次が示された。

定理 5.4. 発展方程式系 (6) の無限次元部分の入口条件は次の不等式が成立する時満たされる。

$$\gamma_* \frac{(Ch)^2}{\alpha} \sup_{[\phi, \psi] \in N} \|Q_h f(\phi)\|_0 < M. \quad (14)$$

ここで、

$$\gamma_* = 2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\sqrt{\alpha^2 - 2(Ch)^2}}\right)^{-1} |\delta| = \frac{8\sqrt{2}Ch}{4\sqrt{\alpha^2 - 2(Ch)^2} - \alpha}$$

であり、正の数 C, h と α の間には $\alpha^2 > 2(Ch)^2$ を課す。

注意 5.5. • 定理に課した条件 $\alpha^2 > 2(Ch)^2$ は、解の検証の際には通常は満たされている条件であるので左程気にしなくてもよい。

- 最初の考察との違いは ϕ は実数値、 ψ が純虚数値関数になっている事であるが、力学系としての考察は、虚部をとる同型対応により、もとの問題と同じ空間で考えてよい。
- 強減衰項 αAu_t の効果が、評価式 (14) において微小定数 $(Ch)^2$ を出現させ、よって解の検証を容易にしている。

5.3 有限次元部分の検証条件

最後に、有限次元部分の力学系に対し、非自明 CR 指数を持つような孤立化ブロックを構成する。まず、考察している方程式系が以下で与えられていた事を思い出そう：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\phi_t, \bar{\phi}) \\ (\psi_t, \bar{\psi}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\gamma\delta^{-1} & \delta^{-1} \\ -\gamma^2\delta^{-1} + \alpha_1\gamma & \gamma\delta^{-1} - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\phi, \bar{\phi}) \\ (\psi, \bar{\psi}) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2\gamma - \delta & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{1/2}\phi, A^{1/2}\bar{\phi}) \\ (A^{1/2}\psi, A^{1/2}\bar{\psi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(f(\phi), \bar{\psi}) \end{pmatrix}, \forall \bar{\phi}, \bar{\psi} \in X^{1/2}. \end{aligned}$$

有限要素近似定常解の満たす弱形式は,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\delta^{-1} & \delta^{-1} \\ -\gamma^2\delta^{-1} + \alpha_1\gamma & \gamma\delta^{-1} - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\phi_h^*, \bar{\phi}_h) \\ (\psi_h^*, \bar{\psi}_h) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2\gamma - \delta & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{1/2}\phi_h^*, A^{1/2}\bar{\phi}_h) \\ (A^{1/2}\psi_h^*, A^{1/2}\bar{\psi}_h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(f(\phi_h^*), \bar{\psi}_h) \end{pmatrix}, \forall \bar{\phi}_h, \bar{\psi}_h \in S_h$$

である. 今, $\tilde{\phi} = \phi - \phi_h^*$, $\tilde{\psi} = \psi - \psi_h^*$ とする. ここに, (ϕ_h^*, ψ_h^*) は考察している定常解の有限要素近似である. ϕ_h^*, ψ_h^* が t に依らない事を考慮すると, $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ に対して次が成立する.

$$\begin{pmatrix} (\tilde{\phi}_t, \tilde{\phi}) \\ (\tilde{\psi}_t, \tilde{\psi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\delta^{-1} & \delta^{-1} \\ -\gamma^2\delta^{-1} + \alpha_1\gamma & \gamma\delta^{-1} - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\tilde{\phi}, \tilde{\phi}) \\ (\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2\gamma - \delta & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{1/2}\tilde{\phi}, A^{1/2}\tilde{\phi}) \\ (A^{1/2}\tilde{\psi}, A^{1/2}\tilde{\psi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(f(\phi) - f(\phi_h^*), \tilde{\psi}) \end{pmatrix}, \forall \tilde{\phi}, \tilde{\psi} \in X^{1/2}.$$

さて, $P_h\tilde{\phi}$ と $P_h\tilde{\psi}$ ($P = P_h \times P_h$ は X_h 上への直交射影) の満たすべき条件を考える. $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ は

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^n \phi_i \varphi_i + Q_h \tilde{\phi}, \quad \tilde{\psi} = \sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i + Q_h \tilde{\psi} \quad (\varphi_i, i = 1, \dots, n, \text{ は } S_h \text{ の基底, } Q_h = I - P_h)$$

で表される. ここに, $n = \dim S_h$ ($\dim X_h = 2n$) で, $\phi_i, \psi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ である. 特に $\tilde{\phi}_h = \sum_{i=1}^n \phi_i \varphi_i$ と $\tilde{\psi}_h = \sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i$ は次を満たす.

$$\begin{pmatrix} (\tilde{\phi}_t, \varphi_i) \\ (\tilde{\psi}_t, \varphi_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\delta^{-1} & \delta^{-1} \\ -\gamma^2\delta^{-1} + \alpha_1 & \gamma\delta^{-1} - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\tilde{\phi}, \varphi_i) \\ (\tilde{\psi}, \varphi_i) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2\gamma - \delta & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{1/2}\tilde{\phi}, A^{1/2}\varphi_i) \\ (A^{1/2}\tilde{\psi}, A^{1/2}\varphi_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(f(\phi) - f(\phi_h^*), \varphi_i) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \\ = GW_h + (\epsilon_1(\tilde{\phi}), \dots, \epsilon_{2n}(\tilde{\phi}))^T.$$

ここに,

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \\ A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,n} := (-\gamma\delta^{-1}(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,\dots,n}, \quad B = (B_{ij})_{i,j=1,\dots,n} := (\delta^{-1}(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,\dots,n}, \\ C = (C_{ij})_{i,j=1,\dots,n} := ((\alpha_2\gamma - \delta)(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) \\ + (-\gamma^2\delta^{-1} + \alpha_1\gamma)(\varphi_i, \varphi_j) + \left(P_h \left(\delta \sum_{k=1}^n Df(\phi_h^*)_{ik} \varphi_k \right), \varphi_j \right))_{i,j=1,\dots,n}, \\ D = (D_{ij})_{i,j=1,\dots,n} := ((\gamma\delta^{-1} - \alpha_1)(\varphi_i, \varphi_j) - \alpha_2(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j))_{i,j=1,\dots,n},$$

$$W_h := (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T,$$

$$\epsilon(\tilde{\phi}) := f(\phi) - f(\phi_h^*) - \sum_{k=1}^n Df(\phi_h^*)_{ik} \varphi_k, \quad (\epsilon_1(\tilde{\phi}), \dots, \epsilon_{2n}(\tilde{\phi}))^T := (0, \dots, 0, (P\epsilon(\tilde{\phi}), \varphi_1), \dots, (P\epsilon(\tilde{\phi}), \varphi_n))$$

である. ベクトル $((\dot{\phi}_h, \varphi_i)_{i=1,\dots,n}, (\dot{\psi}_h, \varphi_i)_{i=1,\dots,n})^T$ は, $\dot{W}_h = (\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dots, \dot{\phi}_n, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dots, \dot{\psi}_n)^T$, $\varphi_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)$ として, 次で表わされる:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (\dot{\phi}_h, \varphi_i)_{i=1,\dots,n} \\ (\dot{\psi}_h, \varphi_i)_{i=1,\dots,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^n \dot{\phi}_j \varphi_j, \varphi_i)_{i=1,\dots,n} \\ (\sum_{j=1}^n \dot{\psi}_j \varphi_j, \varphi_i)_{i=1,\dots,n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \dots & \varphi_{n,1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1,n} & \dots & \varphi_{n,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_{1,1} & \dots & \varphi_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_{1,n} & \dots & \varphi_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dots \\ \dot{\phi}_n \\ \dot{\psi}_1 \\ \dots \\ \dot{\psi}_n \end{pmatrix} =: \Phi \dot{W}_h.
\end{aligned}$$

Φ が非特異ならば,

$$\dot{W}_h = \Phi^{-1} G W_h + \Phi^{-1} (\epsilon_1(\tilde{\phi}), \dots, \epsilon_{2n}(\tilde{\phi}))^T$$

となる. ここで, 行列 $\Phi^{-1} G$ が, ある正則行列 S を用いて対角化できるとする. この時, 系は次のようになる:

$$\dot{Y}_h = \Lambda_h Y_h + S \Phi^{-1} (\epsilon_1(\tilde{\phi}), \dots, \epsilon_{2n}(\tilde{\phi}))^T,$$

ここに $W_h = S^{-1} Y_h$ で, $\Lambda_h = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ が対角行列である. 今全ての λ_i が実であると仮定する (複素数を含む場合も, 同様の考察ができる. [21] 参照). $Y_h := (y_1, \dots, y_{2n})^T$ と表わすと, この系は成分ごとに次のように書ける.

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \tilde{\epsilon}_i(\tilde{y}), \quad i = 1, \dots, 2n.$$

ここで $\tilde{\epsilon}_i(\tilde{y})$ は誤差項 $S \Phi^{-1} (\epsilon_1(\tilde{\phi}), \dots, \epsilon_{2n}(\tilde{\phi}))^T$ の第 i 成分である.

$\tilde{\epsilon}_i(\tilde{y})$ を包含する区間として $[\delta_i^-, \delta_i^+]$ と取る. この包含は有限要素法の誤差評価と区間演算, 入口条件 (14) で得られる M (の候補) を用いて計算可能である. この時, $\dot{y}_i$ は次を満たさなければならない:

$$\lambda_i \left(y_i + \frac{\delta_i^-}{\lambda_i} \right) < \dot{y}_i < \lambda_i \left(y_i + \frac{\delta_i^+}{\lambda_i} \right).$$

そして, 孤立化ブロック $B_1 = \prod_{k=1}^{2n} W_k$ の候補を λ_i の符号に合わせて次のように定める.

$$\tilde{W}_k^{(m)} := \left[-\frac{\delta_k^+}{\lambda_k}, -\frac{\delta_k^-}{\lambda_k} \right] \quad (\lambda_k > 0), \quad \tilde{W}_k^{(m)} := \left[-\frac{\delta_k^-}{\lambda_k}, -\frac{\delta_k^+}{\lambda_k} \right] \quad (\lambda_k < 0). \quad (15)$$

この候補が得られれば, δ -inflation を使って m (候補の構成の反復回数) に関して帰納的に $\tilde{W}^{(m)}$ を定める. $\{[\phi_h^*, \psi_h^*]\} + S^{-1} \tilde{W}^{(m)} \subset N_1^{(m)}$ となれば検証は成功である ($N_1^{(m)}$ は $\{[\phi_h^*, \psi_h^*]\} + \{(1+\delta)S^{-1} \tilde{W}^{(m-1)}\}$ の区間包) で成分ごとに定義される N_1 の候補). 入口条件とともに検証が成功したら孤立化ブロックの構築は成功である. その時 CR 指数は第 j (j は $\lambda_k > 0$ なる k の数) 次元のみ R : 係数環と同型で, 残りが 0 となるようなホモロジー群である ([21] も参照). よって, 定理 5.2 から定常解の存在が従う.

6 検証例

以下, これまでに解説した検証法を適用し, 検証が成功した定常解に関する結果の一部を紹介する. 他にも著者のホームページ [9] に検証結果が公開されているので, そちらを参照されたい.

次の偏微分方程式に対して, 定常解の存在・局所一意性・双曲性を考えてみる:

$$\begin{cases} u_{tt} - 0.5 \Delta u_t - \Delta u = 75(u - u^3) & (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} u_{tt} - 0.5\Delta u_t - \Delta u - 5.0\nabla u = 25(u - u^3) & (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \quad (17)$$

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u_t + (0.006\Delta^2 + \Delta)u = 25(u - u^3) & (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega_1 \\ u(t, -1) = u(t, 1) = u_x(t, -1) = u_x(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

ここに, $\Omega = [0, 1]$, $\Omega_1 = [-1, 1]$ としている. (16)(17) の場合, 有限要素空間 X_h として, 区分的 2 時多項式のなす $H_0^1(\Omega)$ の部分空間 S_h ([12] 参照) を使って, $X_h := S_h \times S_h$ とする. (18) の場合は, 有限要素空間 X_h として区分的 3 次エルミート補間多項式で構成される $H_0^2(\Omega)$ の部分空間 ([19] 参照) $S_{h, Her3}$ に対し, $X_h := S_{h, Her3} \times S_{h, Her3}$ とする.

計算機援用結果 6.1. 検証が成功した定常解に関するデータを表 1 に示す. ここに, h は有限要素メッシュサイズ, $\|u_h^i\|_\infty$ は近似解の最大値, $\|P_h u_* - u_h\|_\infty^{\text{up}}$ は厳密解と近似解の有限次元部分の誤差の bound, M は無限次元部分 N_2 の ball の半径を表す. Index は CR 指数を表す. より正確には,

$$CH_n(S) \cong \begin{cases} R & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

なる m を表している. なお, 問題 (16) に関しては, 局所一意性・双曲性検証も成功している. よって表 1 に従えば, (16) において検証に成功した不動点は, 1 次元不安定多様体を持つ双曲型不動点となっている. 解の形状は著者のホームページ [9] に公開しているので, そちらを参照されたい.

表 1: 検証に成功した定常解に関するデータ

問題番号	h^{-1}	$\ u_h^i\ _\infty$	$\ P_h u_* - u_h\ _\infty^{\text{up}}$	M	Index
(16)	120	$7.8078792346 \times 10^{-1}$	$4.7652259328 \times 10^{-5}$	$1.2566215338 \times 10^{-6}$	1
(17)	50	$7.6607378364 \times 10^{-1}$	$2.5794540031 \times 10^{-4}$	$5.4740440087 \times 10^{-6}$	0
(18)	60	$3.1267986148 \times 10^{-1}$	$2.3086675110 \times 10^{-5}$	$9.1536577824 \times 10^{-8}$	4

7 結論・更なる応用

本稿では Conley 型の指数と有限要素法を用いて, 力学系の不変集合としての放物型発展方程式の定常解の存在・安定性, さらに局所一意性, 双曲性を検証するための手法を紹介した. 数値検証例は [9] にて公開しているので, そちらも参照されたい. また著者の最近の研究により, 本手法は以下の拡張をもつ事がわかった. 紙数の制限のため, 詳細は別の機会に述べる事とする.

- **非勾配系における定常解の局所一意性・双曲性検証ができる.** 本稿における定常解の局所一意性・双曲性の検証法においては, 力学系が勾配的である事, そして可逆性を検証すべき作用素が自己共役である事を仮定した. しかし, 力学系が非勾配的でなくても, また可逆性を検証すべき作用素が自己共役でなくても, 一意性・双曲性検証定理が成り立つことがわかった. しかし, 仮定として, 作用素のスペクトルが虚軸と交わらない事を検証しなければならず, 一般に無限集合であるスペクトルの情報を調べることは容易ではない. しかし, (1) の形の方程式の場合, 発展方程式の線型部分がセクトリアル作用素となる事が示され, よってそのスペクトルと虚軸の共通部分 E は $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合となる. しかも, 真性スペクトルが虚軸上にない事も示されるので, よって, E 全体で, 固有値の除外を行えばよい. それは, 中尾理論の応用 ([19]) を適用すれば可能であろう.

- **非凸領域上の方程式の定常解の検証ができる.** 本稿における (2) の定常解の存在検証は、解の弱正則性（例えば、空間 2 階微分を含む方程式ならば、 H^1 -正則性）のみを仮定してすべて議論できる。この事実と、山本・中尾による非凸領域上の方程式の近似解の定量的誤差評価法 ([20]) を応用する事により、本稿の手法は非凸領域上の方程式においても同様に適用できる事がわかった。しかし、任意形状の領域上の任意の方程式に適用できるというわけではなく、適用可能性は「領域の形」、「その領域上の方程式の解が保証される正則性の度合い」、「方程式の非線型項の形」、そして「孤立化ブロックの形」、より正確には、無限次元部分を定義するノルムの取り方に依存する。しかし、非線型項が u やその空間変数による微分のみに依存する場合は、誤差評価式を修正するのみで非凸領域上の方程式にも本稿の手法が適用できる事が示される。

今後の研究の展望として、以下が挙げられる。

- **コネクティング・オービットの検証.** グローバル・アトラクタの構造を解析するにあたり、不動点の存在とその周りの局所的な力学系を解析するだけでは不十分なのは言うまでもない。次に考えられる問題として、不動点間のコネクティング・オービットの検証が挙げられる。有限次元力学系の問題に関しては、[16] などの様々な先行結果がある。[16] では、時間変数に関する無限区間 ($t \in \mathbb{R}$) 上の微分方程式の境界値問題と見て、境界条件として不動点の局所安定・不安定多様体を記述している。しかし、無限次元力学系の場合、局所安定多様体が一般に無限次元となるので、検証条件の組み立てが簡単にはいかない。現在は、今研究で検証された局所一意双曲型不動点を含む孤立化ブロック、すなわち、不動点を含む集合とその出口が陽に記述されているので、それを利用するというアイデアを考えている。

局所安定多様体は、不安定方向についての関係式を組み立てて記述するが、本稿で考えているような問題の場合、双曲型不動点の不安定多様体は一般に有限次元であるので、[16] と同様の手法で記述できるであろう。しかし、局所不安定多様体は、同様に安定方向についての関係式を組み立てようすると、先に述べたように無限次元の問題となる。しかも、安定固有値の不変部分空間の情報を陽に記述する事が一般には難しいので、かなりハードな解析が必要となると思われる。そこで、孤立化ブロックの出口（の 1 つの連結成分）を局所不安定多様体の記述に利用できないかと考えている。これは、先も述べたように本稿の検証法で記述できる事がわかっているが、その場合、

「任意に選んだ孤立化ブロック（あるいは一般に index pair）の出口の連結成分に不安定多様体の点が含まれているか」

を調べなければならない。この問題に関して肯定的な結果が出れば、不安定多様体の記述に（先に不動点の存在・双曲性を検証したとして、）余分な数値検証を必要としない分、比較的容易にコネクティング・オービットの検証ができるであろう。しかし、否定的な結果（反例）が出れば、不安定多様体の記述も数値検証に頼らざるを得なくなる。

どの分野においても自然な事なのかもしれないが、力学系のある情報を「数値検証」という問題を考える際、その中に力学系理論の解析的、またトポロジカルな問題が内在する事を改めて痛感させられる。

参考文献

- [1] CAPD - Computer Assisted Proofs in Dynamics group, a C++ package for rigorous numerics, <http://capd.wsb-nlu.edu.pl/>.
- [2] S. Day, Y. Hiraoka, K. Mischaikow and T. Ogawa, Rigorous Numerics for Dynamics: A Study of the Swift-Hohenberg Equation, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 4(2005), 1–31.

- [3] J.K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, **25**. AMS, Providence, 1988.
- [4] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, 1981.
- [5] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1966.
- [6] J.T. Marti, *Introduction to Sobolev spaces and finite element solution of elliptic boundary value problems*, Academic Press, 1986.
- [7] P. Massatt, Limiting behavior for strongly damped nonlinear wave equations, *J. Diff. Eq.*, **48**(1983), 334–349.
- [8] K. Matsue, Dynamical approach in rigorous verification of equilibria for evolutionary equations - parabolic PDEs -, submitted.
- [9] 松江 要のホームページ. <http://kmatsue.web.fc2.com>
- [10] M.Mrozek, Index pairs and the fixed point index for semidynamical systems with discrete time, *Fund. Math.*, **133**(1989), 179–194.
- [11] M.T. Nakao, K. Hashimoto and Y. Watanabe, A Numerical Method to Verify the Invertibility of Linear Elliptic Operators with Applications to Nonlinear Problems, *Computing*, **75**(2005), 1–14.
- [12] M.T. Nakao and N. Yamamoto, Numerical verifications for solutions to elliptic equations using residual iterations with higher order finite element, *J. Comput. Appl. Math.*, **60**(1995), 271–279.
- [13] M.T. Nakao and N. Yamamoto, Numerical verification of solutions for nonlinear elliptic problems using an L^∞ residual method, *J. Math. Anal. Appl.*, **217**(1998), 246–262.
- [14] 中尾 充宏, 山本 野人, 『精度保証付き数値計算』, 日本評論社, 1998.
- [15] R.D. Nussbaum, The fixed point index for local condensing maps, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **89**(1971), 217–258.
- [16] 大石 進一, 連続力学系のコネクティングオービットの精度保証付き数値解析法, 「数理解析研究所講究録」, **928**(1995), 14–19.
- [17] K.P. Rybakowski, *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1987.
- [18] G.R. Sell and Y. You, *Dynamics of Evolutionary Equations*, Springer, 2002.
- [19] 渡部 善隆, 長藤 かおり, 中尾 充宏, 非自己共役作用素に対する固有値の除外法, 「日本応用数理学会 2010 年度年会講演予稿集」, 253–254.
- [20] N. Yamamoto and M.T. Nakao, Numerical verification of solutions for elliptic equations in nonconvex polygonal domains, *Numer. Math.*, **65**(1993), 503–521.
- [21] P. Zgliczyński and K. Mischaikow, Rigorous numerics for partial differential equations: The Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Found. Comput. Math.* **1**(2001), 255–288.