

線形差分微分方程式の漸近定数問題について

徳島大総合科 村上 公一 (Kouichi Murakami)

1 序論

差分微分方程式の解の安定性に関して、これまでに様々な研究がなされている ([1],[2],[4])。特に、1次元の方程式については種々の詳しい結果が得られており、例えば

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r), \quad a, b \in R, \quad r > 0$$

については、零解の漸近安定性の必要十分条件が知られている。しかし、高次元系については取り扱いが難しく、上記の方程式を高次元に拡張した

$$(1) \quad x'(t) = Ax(t) + Bx(t-r), \quad A, B \in R^{n \times n}, \quad r > 0$$

でも、知られていないことが多い。最近になって、方程式 (1) で $A = O$ のときの零解の漸近安定性の必要十分条件が与えられた ([3])。

本研究の目的は、方程式 (1) の解の平衡点や周期解の近傍での漸近挙動を明らかにすることである。ただし、係数行列を一般として扱うことは困難であると予想されるため、ここでは $A+B=O$ かつ $n=2$ の場合を考える。すなわち、次の線形差分微分方程式を考える。

$$(2) \quad x'(t) = A(x(t) - x(t-r)), \quad A \in R^{2 \times 2}, \quad r > 0$$

ここで、適当な正則行列 T による変換 $x(t) = Ty(t)$ によって A を Jordan 標準形とできるので、一般性を失うことなく、

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad (a_1, a_2, b \in R)$$

および

$$(4) \quad A = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (a > 0, -\pi < \theta \leq \pi)$$

と仮定する。

尚、係数行列が (4) の場合について、1993 年度 京都大学数理解析研究所 短期共同研究において、大阪府立大学の原惟行先生により次の予想が与えられている。

Conjecture 1 初期関数は定数でないとする。 $\theta \neq 0, \pi$ とするとき、

- (i) $ar < \frac{\theta}{\sin \theta}$ ならば、(2) の各解は *phase plane* のある点のまわりを回転しながら、 $t \rightarrow \infty$ のとき、その点に漸近する。(その点は、初期関数に *depend* する)
- (ii) $ar = \frac{\theta}{\sin \theta}$ ならば、(2) の各解は *phase plane* のある周期解のまわりを回転しながら、 $t \rightarrow \infty$ のとき、その周期解に漸近する。(その点は、初期関数に *depend* する)
- (iii) $ar > \frac{\theta}{\sin \theta}$ ならば、(2) の各解は *phase plane* において終局的には原点のまわりを回転しながら、発散する。

2 主結果

ここでは、簡単のために $r = 1$ と仮定する。 $r \neq 1$ の場合は、後で注意として述べる。

2.1 固有値について

方程式 (2) の固有値は特性方程式

$$(5) \quad \det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - A + Ae^{-\lambda}$$

の根として与えられる。固有値について、次の Lemma が成り立つ。

Lemma 1 行列 A が (3) の場合を考える。

- (i) $a_1 < 1$ かつ $a_2 < 1$ ならば、(5) は 2 重 0 根を持ち、他の根はすべて実部負である。
- (ii) $a_1 = 1$ かつ $a_2 < 1$ または $a_1 < 1$ かつ $a_2 = 1$ ならば、(5) は 3 重 0 根を持ち、他の根はすべて実部負である。
- (iii) $a_1 = 1$ かつ $a_2 = 1$ ならば、(5) は 4 重 0 根を持ち、他の根はすべて実部負である。
- (iv) $a_1 > 1$ または $a_2 > 1$ ならば、(5) は実部正の根を持つ。

Lemma 2 行列 A が (4) の場合を考える。ただし、 $\theta \neq 0, \pi$ とする。

- (i) $a < \frac{\theta}{\sin \theta}$ ならば、(5) は 2 重 0 根を持ち、他の根はすべて実部負である。
- (ii) $a = \frac{\theta}{\sin \theta}$ ならば、(5) は 2 重 0 根と純虚根 $\pm 2i\theta$ を持ち、他の根はすべて実部負である。

尚、以下が成り立つと予想されるが、証明はできていない。

- (iii) $a > \frac{\theta}{\sin \theta}$ ならば、(5) は実部正の根を持つ。

2.2 漸近平衡点について

関数空間 $C = C([-1, 0], R^2)$ は固有値 λ に属する一般化固有空間 P_λ によって、

$$C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$$

と分解できる。ここで、 P_λ は有限次元不変部分空間となる ([2])。

Lemma 1,2 の (i) の場合を考える。 $\lambda = 0$ とおくと、上記により任意の $\phi \in C$ は

$$\phi = \phi^{P_0} + \phi^{Q_0}, \quad \phi^{P_0} \in P_0, \quad \phi^{Q_0} \in Q_0$$

と分解できる。Solution operator を $T(t) : C \rightarrow C$ とすると、初期関数 $\phi \in C$ の解は、

$$x_t(\phi) = T(t)\phi = T(t)\phi^{P_0} + T(t)\phi^{Q_0}$$

となるが、ここで $\lambda = 0$ 以外の固有値はすべて実部負であるので、

$$\|T(t)\phi^{Q_0}\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる。すなわち、

$$\|x_t(\phi) - T(t)\phi^{P_0}\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる。これより、与えられた ϕ から具体的に ϕ^{P_0} を求めれば漸近平衡点が得られる。

$T(t)$ は C_0 -semigroup であるから、infinitesimal generator $\hat{A}$ が定義でき、

$$\hat{A}\phi(\tau) = \begin{cases} \dot{\phi}(\tau) & -1 \leq \tau < 0 \\ A(\phi(0) - \phi(-1)) & \tau = 0 \end{cases}$$

となる。 $\psi \in C^* = C([0, 1], R^{1 \times 2})$, $\phi \in C$ に対して bilinear form (ψ, ϕ) を

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \psi(\tau+1)A\phi(\tau)d\tau$$

と定義し、さらに $\hat{A}$ の formal adjoint operator を $(\psi, \hat{A}\phi) = (\hat{A}^*\psi, \phi)$ で定義すると、

$$\hat{A}^*\psi(s) = \begin{cases} -\dot{\psi}(s) & 0 < s \leq 1 \\ (\psi(0) - \psi(1))A & s = 0 \end{cases}$$

となる。ここで、 $\hat{A}$, $\hat{A}^*$ の固有値 0 に属する固有空間 P_0, P_0^* の基底は、

$$\Phi_0 = (e_{01}, e_{02}), \quad \Psi_0^* = \begin{pmatrix} e_{01}^T \\ e_{02}^T \end{pmatrix} \quad \text{ただし、} e_{01} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $\Psi_0 = (\Psi_0^*, \Phi_0)^{-1}\Psi_0^*$ とおけば、

$$\phi^{P_0} = \Phi_0(\Psi_0, \phi)$$

により ϕ^{P_0} が求められる。以上より、漸近平衡点についての次の Theorem が得られる。

Theorem 1 係数行列が (3) の場合を考える。(2) の初期関数 ϕ の解 $x_t(\phi)$ は、

$$a_1 < 1 \text{ かつ } a_2 < 1 \text{ ならば } x_t(\phi) \rightarrow b_0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\text{ただし、} b_0 = (I - A)^{-1}(\phi(0) - A \int_{-1}^0 \phi(\tau) d\tau)$$

となる。

Theorem 2 係数行列が (4) の場合を考える。(2) の初期関数 ϕ の解 $x_t(\phi)$ は、

$$a < \frac{\theta}{\sin \theta} \text{ ならば } x_t(\phi) \rightarrow b_0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\text{ただし、} b_0 = (I - A)^{-1}(\phi(0) - A \int_{-1}^0 \phi(\tau) d\tau)$$

となる。

2.3 漸近周期解について

Lemma 2 の (ii) の場合を考える。 $\Lambda = \{\pm 2i\theta\}$ とおくと、 $\hat{A}, \hat{A}^*$ の Λ に属する固有空間 P_Λ, P_Λ^* の基底は、

$$\Phi_\Lambda(\tau) = (e_{\Lambda 1}(\tau), e_{\Lambda 2}(\tau)), \quad \Psi_\Lambda^*(s) = \begin{pmatrix} e_{\Lambda 1}^T(s) \\ e_{\Lambda 2}^T(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{ただし、} e_{\Lambda 1}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta t \\ \sin 2\theta t \end{pmatrix}, \quad e_{\Lambda 2}(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2\theta t \\ \cos 2\theta t \end{pmatrix}$$

となる。よって、漸近周期解についての次の Theorem が得られる。

Theorem 3 係数行列が (4) の場合を考える。 $\theta \neq 0, \pi$ とし、初期関数 ϕ は定数でないとする。このとき、(2) の初期関数 ϕ の解 $x_t(\phi)$ は

$$a = \frac{\theta}{\sin \theta} \text{ ならば } x_t(\phi) \rightarrow b_0 + \Phi_\Lambda b_\Lambda \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\text{ただし、} b_0 = (I - A)^{-1}(\phi(0) - A \int_{-1}^0 \phi(\tau) d\tau),$$

$$b_\Lambda = (I - A^T)^{-1}(\phi(0) - \int_{-1}^0 \Psi_\Lambda^*(\tau + 1) A \phi(\tau) d\tau)$$

となる。

3 数値計算例

以下に、得られた結果を示す数値計算例をあげる。

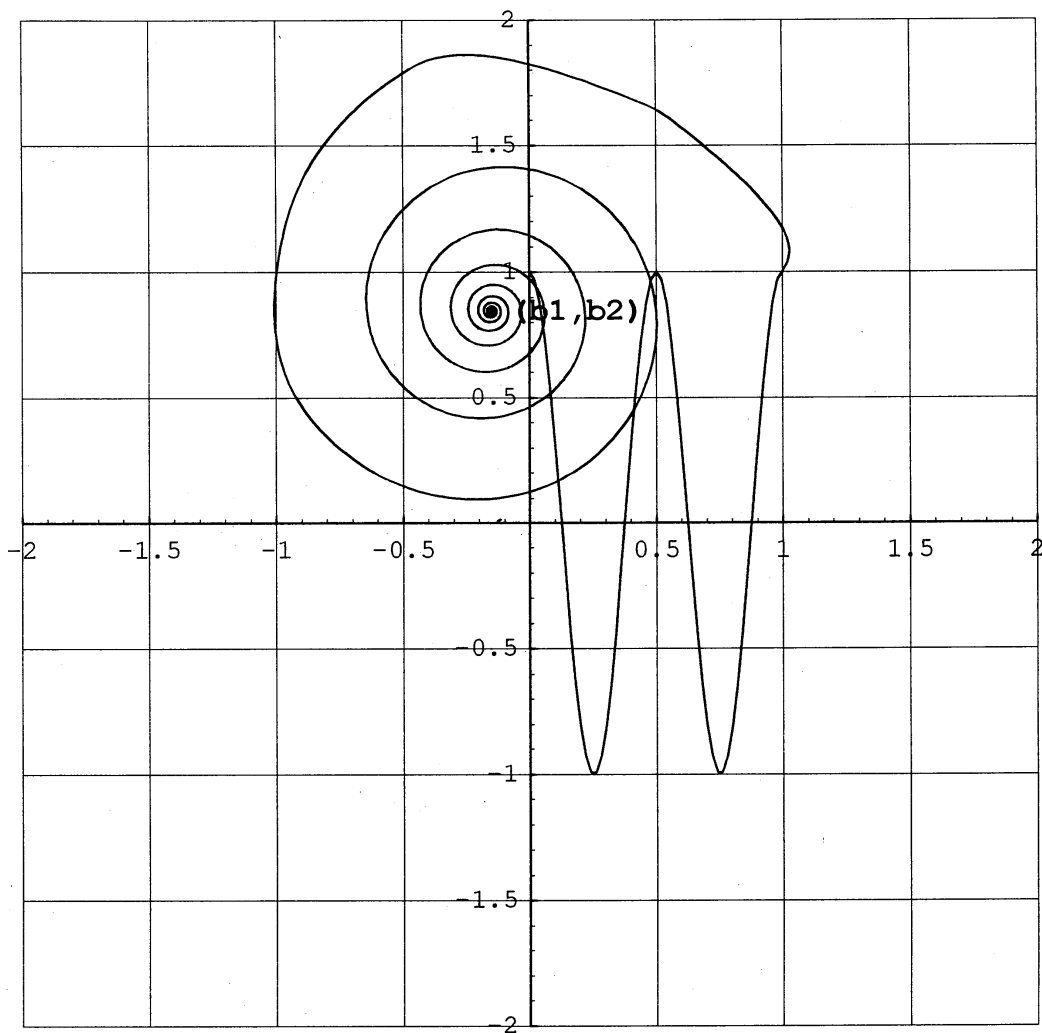


図 1: 漸近平衡点の数値計算例

Example 1 方程式 (2) において、係数行列および初期関数を

$$A = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad a = \frac{0.9 \times \theta}{\sin \theta}, \quad \theta = \frac{\pi}{3},$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ \cos 4\pi t \end{pmatrix} \quad \text{on } [-1, 0]$$

とすると、数値計算による解軌道は図 1 のようになる。このとき、Theorem 2 から得られる漸近平衡点の近似値は

$$(b_1, b_2) = (-0.151916, 0.845837)$$

となる。図 1 より、解がこの平衡点に漸近していることが分かる。

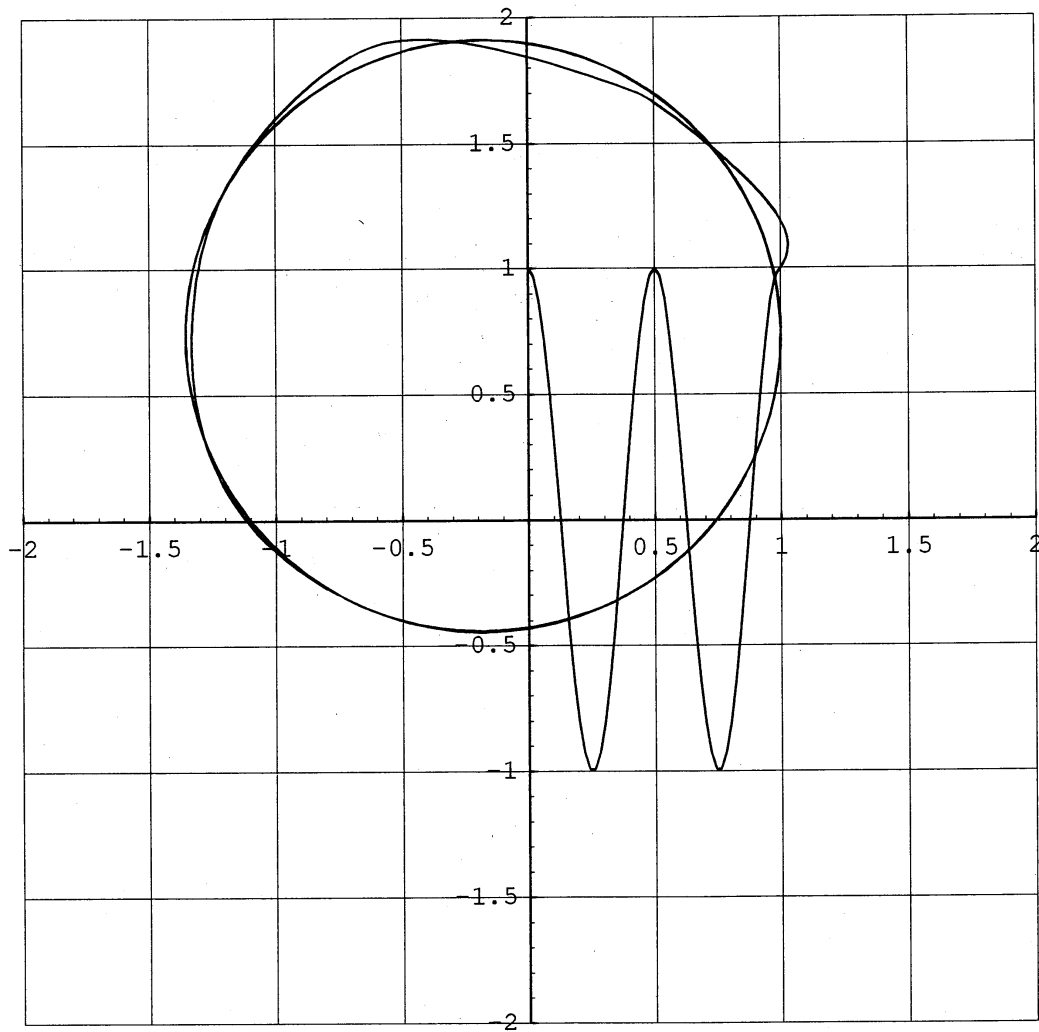


図 2: 漸近周期解の数値計算例 (1)

Example 2 方程式 (2) において、係数行列および初期関数を

$$A = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad a = \frac{\theta}{\sin \theta}, \quad \theta = \frac{\pi}{3},$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ \cos 4\pi t \end{pmatrix} \quad \text{on } [-1, 0]$$

とすると、数値計算による解軌道は図 2 のようになる。

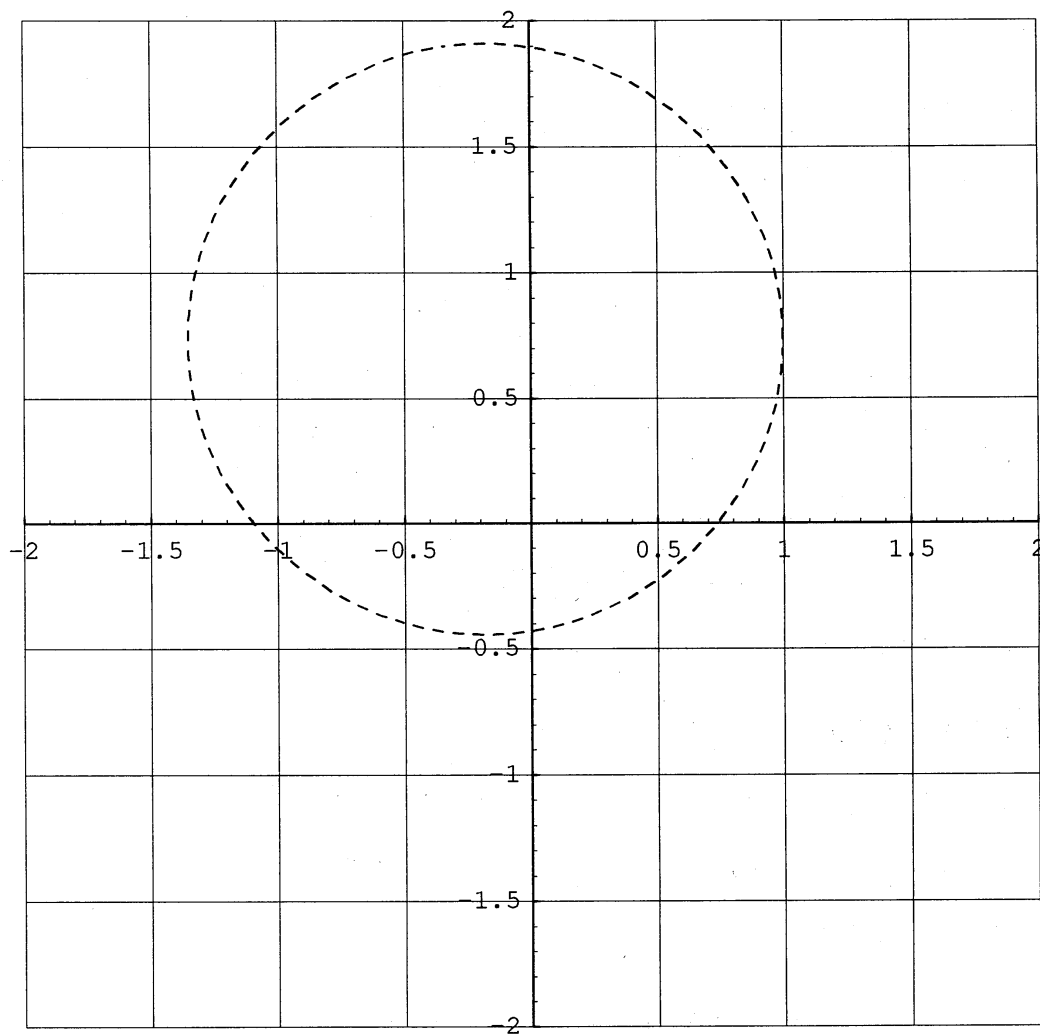


図 3: 漸近周期解の数値計算例 (2)

また、Theorem 3 から得られる漸近周期解の近似値は、

$$\begin{pmatrix} -0.17799 \\ 0.73346 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\theta t & -\sin 2\theta t \\ \sin 2\theta t & \cos 2\theta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.17523 \\ -0.0337232 \end{pmatrix}$$

となり、そのグラフは図 3 のようになる。

図 2、図 3 より、解がこの周期解に漸近していることが分かる。

4 注意

4.1 $r \neq 1$ および $n > 2$ の場合

n 次元の方程式

$$(6) \quad x'(t) = A(x(t) - x(t-r)), \quad A \in R^{n \times n}, \quad r > 0$$

を考える。

$r \neq 1$ の場合は、係数行列を rA として考えれば $r = 1$ に帰着される。

$n > 2$ の場合も、Jordan 標準形に変換することにより、以下の結果を得る。

Corollary A の固有値を λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) とすると、

$$\rho_k r < \frac{\theta_k}{\sin \theta_k} \quad \text{ただし, } \rho_k = |\lambda_k|, \quad \theta_k = \arg \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ならば、(6) の解はある平衡点に漸近する。

4.2 固有空間の基底について

次の方程式を考える。

$$(7) \quad x'(t) = Ax(t-1), \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

方程式 (7) の特性方程式は

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - Ae^{-\lambda}$$

である。 $a_1 = a_2 = 0$ ならば $\det \Delta(\lambda) = \lambda^2$ となるため、 $\lambda = 0$ は重複度 2 の固有値となる。このとき、

$$\Delta(0) = -A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta'(0) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より、 $\lambda = 0$ に属する (一般化) 固有空間の基底は、

$$(i) \quad b = 0 \text{ のとき} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t}$$

$$(ii) \quad b \neq 0 \text{ のとき} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} te^{0t}$$

となる。すなわち、方程式 (7) で $a_1 = a_2 = 0$, $b \neq 0$ の場合は、解は平衡点に漸近しない。

これに対して、方程式 (2) で係数行列が (3) の場合では、特性方程式は

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - A + Ae^{-\lambda}$$

であり、Lemma 1 (i) より $a_1 < 1$ かつ $a_2 < 1$ ならば $\lambda = 0$ は重複度 2 の固有値となるが、

$$\Delta(0) = -A + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta'(0) = I - A = \begin{pmatrix} 1-a_1 & -b \\ 0 & 1-a_2 \end{pmatrix}$$

であるから、 $a_1 < 1$ かつ $a_2 < 1$ ならば $\lambda = 0$ に属する固有空間の基底は、 b の値に依存せず

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t}$$

となる。このため、 $\lambda = 0$ に属する固有空間の元は定数ベクトルとなり、解は平衡点に漸近する。

参考文献

- [1] K.Gopalsamy: *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Kluwer Academic Publisher.(1992)
- [2] J.Hale: *Theory of Functional Differential equations*. Springer-Vellag.(1977)
- [3] T.Hara and J.Sugie: *Stability Region for Systems of Differential-Difference Equations*. preprint.
- [4] Y.Kuang: *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*. Academic Press.(1993)