

入れると大きくずれるかもしれない。今後の問題として(たくさん残っているものの一つであるが)残っている。くわしくは preprint²⁾ をご覧頂きたい。

references

- 1) S. Raby, S. Dimopoulos and L. Susskind, Nucl. Phys. **B169**, 373 (1980)
- 2) R. Fukuda; "A method of calculating non-perturbative effects in quantum chromodynamics" preprint (Keio Univ. 1987)
- 3) M. Gell-Mann, R. Oakes and B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968); H. Leutwyler, Phys. Lett. **48B**, 45 (1974)

量子力学の確率解釈と観測理論^{*})

基 研 牧 二 郎

§ 1 取り上げる問題

量子力学の確率解釈, すなわち $|\psi|^2 = \text{確率}$ という Born Ansatz は量子力学の結果を実験事実と対応させる上で不可欠であり, その正しさも経験的に十分確かめられていることは周知であるが, これを量子力学の論理体系の出発点をなす“公理”のように扱うことが果して妥当であるか否かを検討するのがこの報告の目的である。

ψ が 1 つの粒子の Schrödinger 関数 $\psi(x)$ であれば, $|\psi|^2 dx$ とは, “測定によってその粒子の位置が x と $x + dx$ との間に見出される確率である”というのが Born Ansatz の正確な意味であって, それは“位置の測定をしてもしなくても粒子がそこに存在する確率”を意味するものではない。(両者を混同してはならないことは, 朝永「量子力学Ⅱ」の中で特に入念に説明されている。)

したがってこの(正確な)意味での Born Ansatz が量子力学の理論構成の出発点に置かれて, しかも明確な意味内容を持つためには, この Ansatz 中にある「観測」ないし「測定」という言葉が内容的に明瞭に定義されていなければならないであろう。伝統的な Copenhagen 解釈では, von Neumann の定式化に代表されるように,¹⁾ いわゆる“状態の非因果的な収縮”(Process I)が測定によって伴われると宣言され, それが Born Ansatz の“測定”なる言葉に内容をあたえている。Born Ansatz の代りにオブザーバブル(A)の期待値に関する Ansatz: $\langle A \rangle_{EV} = \langle \psi | A | \psi \rangle$ を用いても事情は同一で, 期待値にはやはり(多数回の)測定という概念がつきまとう²⁾

この論理構成の一つの長所は, “測定”の内容が状態収縮と関連して一気に公理的に与えられ, 測定(あ

^{*}) 詳細は Preprint RIFP726, Nov. 1987 (Prog. Theor. Phys. **79** (1987) No. 2 in press) を参照下さい。同論文は DESY preprint 87-100, Aug. 1987 の改訂版です。

るいは観測)の物理的過程としての特殊性・具体性に立ち入らない点にあるが、しかしながらここでは、(測定されるべき)対象が何であれともかくその外部に測定・観測を行う体系の存在が一般的かつ不可避免的に前提されるので、このため Copenhagen/Neumann の考え方は「外部観測に依る定式化」とよばれる。測定装置を有限自由度の量子力学的体系と見なし、対象と装置の相互作用として測定過程を扱うと、対象と装置との境目をどこに置いても状態収縮が結果せず、結局のところ Born Ansatz の実現にはこの境目を“抽象的自我”(abstractes Ich)にまで押しやるほかはないことを Neumann は証明してしまった。¹⁾

ところで他方、測定過程があくまで量子力学それ自体によって記述されるべきであると考ええるならば、von Neumann の Process I が正に量子力学的取扱いの対象とされるわけであり、従ってこのとき、状態の収縮は測定装置一般の持つべき特殊的な性質によって始めて実現されると期待することになる。³⁾ この意味での合理的観測理論の建設に向ってわが国でも古くから多くの人々の議論があり、注目すべき研究も行われてきた(武谷, 坂田, 高林, 脇田, 天井, 柳瀬, 荒木, 町田, 並木, 福田(礼)).⁴⁾

そこで、もしこの立場で状態の収縮を説明する合理的観測理論が完成したとすれば、それはすべてを対象(S)と装置(M)の両者を含む閉じた系 $S+M$ の中で扱うものであるから、ここでは“外部観測者”の存在はもはや理論構成の不可避免的前提ではなくなっていることに注目しなければならない。伝統的な構成(すなわち外部観測系の存在を前提とするもの)を“全宇宙”に適用しようとする直ちに困るのは全宇宙を“外から”測定する観測者がどこにも居ないことである。これを逆に言えば、合理的観測理論があればこの難点は差し当り解消することになるが、このときに問題となるのは全宇宙の状態ベクトル Ψ に対して、 $|\Psi|^2$ が確率といえるかどうかである。⁵⁾ すなわち、全宇宙の Ψ に Born Ansatz を(元の意味通りに)適用することが不可能だとすれば、われわれは全宇宙の Ψ を想定することを止めるか、あるいは Born Ansatz そのものを妥当範囲に制限を見出すかのいずれかを選択しなければならない。

さきに伝統的な構成の“長所”をのべたが、それは同時に“短所”でもある。というのは、Process I (瞬間的・非因果的状态の収縮 plus Born Ansatz) が測定過程の物理的取り扱いを拒否あるいは不安とするような公理的命題として設定されているからである。言い換えれば、測定過程を量子力学を用いて物理的に分析しようと試みるに先立って、すでにこの過程の備えるべき性質(状態の収縮)が公理的に予知されており、これと合わぬ理論は、経験に反するという理由からではなく公理と矛盾するという理由で排除されることになるのである。

測定(観測)過程を閉じた系において記述することを目的として、Process I を公理から外し、状態の重ね合わせ原理と Schrödinger 方程式のみから量子力学の閉じた論理体系を作ろうとする試みが、Everett, III によって行われ(1957), Wheeler や de Witt らの賛同者を生んだが、この理論は de Witt たちの論じたように“多世界解釈”(世界は無数の同一の世界から成り立っており、しかも我々は観測によってそれを知ることはできない!)に導く。しかし、彼の理論で興味を引くのは、Born Ansatz (彼流の)観測理論の帰結として説明しようとするものである。この点については、後にふれる。なお、同様に確率解釈の導出を試みた研究として分析哲学者 Mario Bunge の仕事(1967)があるが、 $|\psi(x)|^2 dx$ を粒子が(単に)そこに存する確率と解釈する結果となるようであるから、⁴⁾ Born Ansatz を説明し

たことにはならないと思われる。

最後にふれたいことは、Copenhagen / Neumann の構成の歴史的初制約性である。Neumann の理論 (1932) は Schrödinger の批判 (1935, 猫のたとえ) を浴びたが、有名な Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) と Bohr との論争も 1935 年のことであり、湯川の間接子論 (1935) と同じく半世紀以上も昔の話である。議論の哲学的深遠さには学ぶべきだが、それは合理的観測理論の建設には未だしの時期であった。従って、1925-1930 のわずかな数年の間に完成を急がれた量子力学の理論体系は、Born の確率解釈 (1926) という画期的な経験法則を、合理的観測理論不在の故に、止むなく公理的地位に据えて定式化された、いわば「現象論的公理論」とも称すべき体系であったと見ることができる。

以上、確率解釈をこの時点で問題にする論理的、物理的、歴史的な背景を述べ次に本論に入ることにする。

§ 2 Axioms と Algorithms

前出の Everett の論文の中で、私が特に共感したのは次の文章である：

“The wave function is taken as the basic physical entity with no a priori interpretation. Interpretation only comes after an investigation of the logical structure of the theory. Here always the theory itself sets the framework for its interpretation.” (下線は原文)

この立場を念頭に置きながら、量子力学の通常の公理系 (ルール) を振り返って見よう。ここでは高林氏によるもの⁶⁾を紙面の都合で単純化して再録する。(正確を期したい方は原論文を読んで下さい。)

それは次の 6 つの propositions ($P_1 \sim P_6$) にまとめられる：

P_1 物理系に 1 つの Hilbert 空間 (H. R.) が対応し、系の可能な状態 (純粋状態) に H. R. の正ノルムベクトル (射線) $|\psi\rangle$ が対応する。系の観測可能な物理量 (オブザーバブル) $A, B, \dots, I, \dots$ には、この H. R. の中ではたらくエルミート演算子 $A, B, \dots$ が対応し、その 1 つたとえば I の固有値スペクトル $\{\lambda_k\}$ の夫々に属する固有ベクトル $\{|\lambda_k\rangle\}$ は完全系を張る。

P_2 観測しない限り $|\psi\rangle$ は (Schrödinger 描像で) 時間とともに

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle \quad (H: \text{ハミルトニアン})$$

なる方程式に従って変化する。

P_3 物理系の具体的規定は、ハミルトニアン、物理量の交換関係等によって与えられる。

P_4 合成系の H. R. は部分系の H. R. のテンソル積によって構成される。(ただし同種粒子系の統計性を考慮)

P_5 任意の状態 $|\psi\rangle$ において物理量 I を測定すると、 $\{\lambda_k\}$ のどれか一つの値が $|\langle \lambda_k | \psi \rangle|^2$ なる (相対) 確率をもって得られる。 I の期待値 $\langle I \rangle_{EV}$ が $\langle I \rangle_{EV} = \langle \psi | I | \psi \rangle$ で与えられるといっても同じである。

P_6 理想的な測定 (第 1 種の測定) では、 I を測定したとき値 λ_k を得た場合、くりかえしてすぐ I を測

れば確実に同じ値をうる。つまりこの場合、始めの状態 $|\psi\rangle$ は $|\psi\rangle \rightarrow |\lambda_k\rangle$ に遷移したことになる。ただし $|\psi\rangle = \sum_k C_k |\lambda_k\rangle$ で $C_k = \langle \lambda_k | \psi \rangle$ である。はじめ系が状態 $|\lambda_k\rangle$ にあれば、 A の測定はこの状態を変えない。

以上のうち $P_1 \sim P_4$ は H. R. における運動学・力学の部分であり、 P_5 (とこれを補う P_6) は前者にたいする統計的意味づけを与える部分であって、“ P_5 を $P_1 \sim P_4$ から引き出すことはできない”(高林)のである。 P_5, P_6 はまた密度行列の形式によってこれを言い換えることも可能である。

さて、ここで検討しようとすることは、 $P_1, \dots, P_4$ を適当に修正して P_5, P_6 を他から導出する Algorithm があるかどうかという問題である。

この問題に肯定的に答えるために、まず P_1, P_2 を次のように拡張する：

P'_1 P_1 に加えて“統計集団の状態”(state of ensembles)なる概念を導入し、統計集団の“純粋状態”と“混合”とをそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} U[\psi] = |\psi\rangle \langle \psi| \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U'[\psi_n; w_n] = \sum_n w_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (\sum w_n = 1, w_n \geq 0) \end{array} \right. \quad (1b)$$

なる演算子で表わすものと約束する。

便宜上 $|\psi\rangle$ や $|\psi_n\rangle$ はいずれも長さ=1に規格化しておくが、(1)は単なる定義であって、 U も U' も未だ Neumann の意味での統計演算子(ないし密度行列)にはなっていない。それはこの段階では P_5 はまだ用いられていないからである。(1b)の w_n の意味は、 N 個の集団のうち M 個が $|\psi_n\rangle$ にあるとき $w_n = M/N$ において $N \gg 1, M \gg 1$ の場合を考えたものであり、確率を“大数の法則”によって素朴に定義したことになる。この“確率”と量子力学の“確率解釈”とは(1b)により U' を定義した段階では全く無関係であることに注意しておく。

P'_2 P_2 に加えて、観測(測定)過程もまた状態の力学的変化によって合法則的に記述されるものとする。

すなわち、測定直前の時刻を t_0 、測定完了後の時刻を $t_0 + \Delta t$ とするとき

$$|\psi_{t_0}^{S+M}\rangle \xrightarrow{(\Delta t)} |\psi_{t_0+\Delta t}^{S+M}\rangle \quad (2)$$

の変化が量子力学的に記述できることを要請する。ここに $|\psi^{S+M}\rangle$ は対象と測定器とを合せた物理系の状態である。

P'_2 が意味をもつためには、第一に(2)が実際に観測の過程をあらわしていなければならない。観測とは何か。“観測とは一般に系とそのある物理量を測るに適した観測装置とを接触・結合したのちに後者に現われた効果によって系のその量の値について言明できるようにすることである。”(高林、文献6)による)すなわちこの「後者(M)に現われた効果」は情報として記録され得る安定性を有するものでなくてはならない。第二に、(2)を導く論理構成のなかに Born Ansatz あるいは期待値公理を含んではならないことである。一般にいわゆる観測理論とは、どのようにして(2)において状態収縮を実現するかという問題を扱うものであるが、この議論の過程の中に P_5, P_6 が潜入していたのでは P'_2 は意味を失ってしま

うのである。幸いに、これらの要求を満たす理論の一例として福田理論⁷⁾が知られているので、 P_2' は明らかに成り立ち得る命題である。

次に P_3, P_4 は元通りの内容で採用し、 P_5 と P_6 とを基本仮定から外しておく。

すなわちここでは $P_1, \dots, P_6$ に代り上記の P_1', P_2', P_3, P_4 の4つの propositions を“公理”と見なし、残りの P_5, P_6 をここから導き出そうとするのである。図式化すれば

$$(P_1', P_2', P_3, P_4) \rightarrow (P_1, \dots, P_6).$$

伝統的な考え方では状態ベクトル $|\psi\rangle$ の“物理的意味”は P_5, P_6 によりあらかじめ与えられているのであるが、ここでは冒頭の引用文と同じ観点に立ち、物理系の或る状態に H. R. の1つの $|\psi\rangle$ を対応させることをもって $|\psi\rangle$ の物理的意味が与えられ、実験によってこの対応の当否が判定されるものとする。そして $|\psi\rangle$ と実験結果とを結びつけるために必要な propositions P_5, P_6 は合理的観測理論に依拠して量子力学そのものから提供されることを示すのが次節の議論である。

§3 Born Ansatz の導出

いま測定前の時刻 t_0 において対象 (S) と装置 (M) の状態をそれぞれ $|\psi_{t_0}\rangle, |\phi_{t_0}\rangle$ とすれば、 P_4 により

$$|\psi_{t_0}^{S+M}\rangle = |\psi_{t_0}\rangle |\phi_{t_0}\rangle$$

である。

測定すべき物理量 A に対応する演算子を A とすれば、これは対象 S の正準力学変数の適当な関数であり $|\psi_{t_0}\rangle$ は一般に

$$|\psi_{t_0}\rangle = \sum_k c_k |\lambda_k\rangle \quad \left(\sum_k |c_k|^2 = 1 \right)$$

のごとく A の固有状態 $\{|\lambda_k\rangle\}$ により展開されているとする (P_1' または旧 P_1 ; $\langle\lambda_k|\lambda_{k'}\rangle = \delta_{kk'}$.)

M を力学的自由度 $N \rightarrow \infty$ のマクロ系とし、その体積 $V \rightarrow \infty$ のとき $N/V =$ 有限で生き残る或る第一種示強変数が物理量 A の測定結果を記録するものとする。固有値 λ_k に対応するこの示強変数は (マクロ系の特長として) 量子的揺動を失って古典径数となり、径数の値毎に disjoint な Hilbert Space の“軌道”を与える。(この古典径数の時間的変化は各示強変数の effective action から導かれる (古典的) Euler 方程式で定められる。)

M の無限大自由度を代表する“場”を $\zeta(x, t)$ と書いておくと、 ζ を対角化した表示 (たとえば $\langle\zeta|\phi\rangle \equiv \phi[\zeta]$ とかく。) で、 $\psi_{\Delta t}^{S+M}$ は近似的に次のように表わされる。(福田の公式⁷⁾):

$$\psi_{\Delta t}^{S+M}[\zeta, \dots] = \sum_k c_k(t) |\lambda_k\rangle \phi_{\Delta t}[\zeta, \lambda_k], \quad (3)$$

ここで

$$\Phi_{\Delta t}[\zeta; \lambda_k] = \int [d\zeta'] [d\zeta_0] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt' (\mathcal{L}^M + \mathcal{L}_{\text{int}}(\zeta'; \lambda_k)) \right\} \Phi_{t_0}[\zeta_0].$$

“近似的に”という意味は対象に対する装置側からの反作用により $|\psi\rangle$ が受ける変化を、 Δt がきわめて短時間 ($\Delta t \sim 1/V$) であることを考慮して殆んど無視したことである。ただし C_k のわずかな時間的变化を認めて $C_k(t)$ と書いた。もちろん $C_k(t) \approx C_k(t_0)$ である。さもないと我々の観測は近似的にも t_0 における状態 $|\psi_{t_0}\rangle$ を知ったことにならないであろう。上式で対象のラグランジアン $\mathcal{L}^S$ を落したのも同じ趣旨からである。

この理論は前節の要請 P'_2 を満たしている。すなわち $V \rightarrow \infty$ で異なる λ_k に対する測定装置の状態 $\{\Phi[\zeta; \lambda_k]\}$, $\{\Phi[\zeta; \lambda_{k'}]\}$ ($k \neq k'$) は互に disjoint な H. R. に属し、両空間をつなぐ第一種示強変数の演算子は存在しないから、測定結果を示す情報は安定に保持されている。また式 (3) にいたる数学的操作の中で P_5, P_6 はどこにも用いられていない⁸⁾

さて対象がたまたま A の特定の固有値 (それを再び λ_k と書く。) に属する固有状態 $|\lambda_k\rangle$ にあったとすれば、このとき (3) は単に

$$\Psi_{\Delta t}^{S+M}[\zeta, \dots] = |\lambda_k\rangle \Phi_{\Delta t}[\zeta; \lambda_k] \quad (4)$$

となり、 Φ_{t_0} は $\Phi_{\Delta t}$ に変化することによって、測定を試みた物理量 A がその固有値 λ_k に見出されたことを表わす。かくて P_6 が成立した。ここで装置は t_0 において純粋状態にあるとしたが、混合から始めても同じことが言える。

次に一般の場合には、 P'_1 の後段の“統計集団の状態”の概念を用いて

$$U_{\Delta t}^{S+M} = |\Psi_{\Delta t}^{S+M}\rangle \langle \Psi_{\Delta t}^{S+M}|$$

を作れば、これから直ちに

$$U_{\Delta t}^{S+M}[\zeta, \zeta'] = \sum_k |C_k|^2 |\lambda_k\rangle \langle \lambda_k| \otimes |\Phi_{\Delta t}[\zeta; \lambda_k]\rangle \langle \Phi_{\Delta t}[\zeta'; \lambda_k]| \quad (5)$$

がえられる⁹⁾ つまり測定後の時刻 $t_0 + \Delta t$ において、合成系 $S + M$ は見掛けの上では純粋状態であるが、実質は (5) のような混合に転化しているのである。(5) の右辺は $U_{t_0}^{S+M} \rightarrow U_{\Delta t}^{S+M}$ において状態収縮が実現したことを示している。

いま (1b) の $|\psi_n\rangle$ を $|\lambda_k\rangle$ と同定しこれを (5) と比較すれば、両者は同一物であるから、我々は否応なしに

$$|C_k(t_0 + \Delta t)|^2 = w_k \quad (6)$$

と等置しなければならない。これが P_5 の内容であった。

ただし福田の公式 (3) は、先に注意したように $\Delta t \sim \frac{1}{V} \rightarrow 0$ としたときに成立する近似式であるから、(6) もまたこの条件の下でのみ成立する。Newmann の Process I は瞬時 (augenblicklich) に

起ると仮定されているので、 $C_k(t_0 + \Delta t) \approx C_k(t_0)$ と見なせば (6) は単に P_5 を“追認”したに過ぎぬともいえようが、しかしながら、もし (3) が近似的にも満されぬような“乱暴な”測定をすれば、その時にはまた (6) も成立しなくなってしまうことを指摘しておきたい。言いかえれば P_5 は条件付きでのみ妥当する命題であって無条件的に要請されるべき公理ではない。

こうして我々は (P'_1, P'_2, P_3, P_4) が、きわめて一般的な、しかし一定の条件の下で通常のルール $(P_1, \dots, P_6)$ を再現するのを見たが、最後にこの考察から引き出される問題点のいくつかに言及しておきたい。

§ 4 議 論

(1) 観測理論の帰結として P_5, P_6 が説明された理由は、 P_1 と P_2 とを拡張して P'_1, P'_2 に置き換えたことによる。とくに、(6) の等置のためには“統計集団の状態”に関する定義式 (1a, 1b) が不可欠であった。統計集団を構成する個々の系の状態に $|\psi\rangle$ を対応させることを認めれば (旧 P_1 , または P'_1 の前半), 統計集団の状態 (純粋状態か混合か) の物理的内容は本来量子力学とは無関係に規定しうるものである。問題は、これに対応する数学的表式として U ないし U' の演算子の存在を要請したことにある。期待値公理を含んだ (Newmann の意味の) 統計演算子は、種々の物理量の期待値の算出のための補助手段と見ることができるが、我々の場合にはこれらは期待値公理に代るべきアルゴリズムとして公理的な役割を演ずることになる。ただし前節の議論からわかるように第一種測定の説明のためにはこれは不必要で、 P_1 と P'_2 とから P_6 が直ちに導かれることに注意しておきたい。故に秤 (はかり) につけられるべきものは P'_1 (とくに Eq. (1a, b)) と P_5 の両者である。

(2) P_2 と P'_2 との関係について一言すれば、 P'_2 は P_2 における“観測しない限り”という制限を撤廃し、Schrödinger 方程式の適用を (これと等価な経路積分形式を借り)、 N (又は V) $\rightarrow \infty$ の体系にまで拡大したものと見てよい。数学の言葉を真似れば、 P'_2 とはいわば P_2 の“完備化”であって、この結果 Newmann が Process I として別格化した測定過程を量子力学の法則内で取扱う途がひらかれることになる。合理的観測理論によって状態収縮を物理的に説明しようとする試みはすべて P'_2 の立場に立っていると言ってよい。従ってこの立場で合理的観測理論が得られたならば P_2 はもはや有効性を失い、 P'_2 によって置き換えられるべきものである。

(3) 測定とは $S + M$ の単なる相互作用ではなく、 S の物理的状态の内容が、情報として M の中に安定に記録されるような過程でなければならない。 $|\psi|^2$ あるいは $|C_k|^2$ は対象の状態に関する情報の一部にすぎないが、これが M に記録されるためには、その自由度 N が無限大であることが必須のように思われる。だとすれば状態の収縮もこのことから生ずる不可避的な過程であると考えてよいであろうか?

(4) 全宇宙の $|\Psi|^2$ を観測によって知ることはできないが、全宇宙の量子力学的状態 $|\Psi\rangle$ という概念は意味をもつ。また宇宙が無限自由度系であれば、その任意の部分系 S_1 に自由度無限大の適当な部分系 S_2 を作用させ、前者の情報の一部を後者に記録させることは可能であるから、 S_1 と S_2 のすべて可能な組み合わせによって得られる情報の総和をとることが、宇宙について我々人間の獲得できる最大限の知識となるのではないか?

(5) (P'_1, P'_2) から (P_5, P_6) を導くことを比喩的にいえば、Newton 力学の第二法則から特別の場合と

して等速運動（慣性の法則）を説明することと似ている。しかし Newton 力学の公理系として第一法則を不可欠とする立場もあるから、この類比には異論もあろう。（1988. 1. 16 記）

注と文献

- 1) J. von Neumann, "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik" (1932)

日本語訳『量子力学の数学的基礎』（井上健，広重徹，恒藤敏彦訳みすず書房，1969）。

- 2) ディラック『量子力学』では期待値公理から Born Ansatz を導出する説明法がとられている。
- 3) 言うまでもないが、この考え方では対象と装置との境目は任意でなく、測定装置の特殊性がそこに現われるべき或る場所に客観的基準で決定される。
- 4) 外国における研究史については、たとえば M. Jannar『量子力学の哲学上，下』（井上（健）訳，紀伊国屋 1984）を見よ。
- 5) 全宇宙の Ψ に意味があるかどうかに関して有名な朝永一伏見問答（1951，朝永振一郎著作集 8『量子力学の世界像』（みすず書房）pp 316—322 あたり）がある。
- 6) 高林武彦，「観測の理論」[『量子物理学の展望下』（江沢，恒藤編，岩波 1978，pp 557—595 所収）]。
- 7) R. Fukuda, Phys. Rev. A35 (1987), 8; idid A36 (1987), 3023.
- 8) Eq. (3) は Feynmann の汎関数経路積分形式を運用してえられたものである。これは状態振巾の合成規則のみから成り立っているのので，途中に Born Ansatz が入る余地はない。
- 9) Cross term

$$\sum_{k \neq k'} C_k C_{k'}^* |\lambda_k\rangle \langle \lambda_{k'}| \otimes |\phi_{dt}[\zeta; \lambda_k]\rangle \langle \phi_{dt}[\zeta'; \lambda_{k'}]|$$

は（異なる λ_k に対する）M の H. R. が $V \rightarrow \infty$ で disjoint になるため $\rightarrow 0$ となる。（文献 7）ならびに素研 74（1987）No 3 の福田氏の解説）

- 10) ちなみに Neumann もこの点に関連して次のように言っている：

“いずれにしても Process II ($\sim P_2$) を適用できるのは S (対象) + M (装置) に対してだけである。もちろんその結果が S については，Process I ($\sim P_5$) を直接適用したのと同じ結果を与えることを示さなければならない。これが成功してはじめて，物理学的世界を量子力学的な基礎にたって考察する統一的な方法がえられたことになる。”（文献 1）邦訳 p 282.)