

対称安定過程におけるファインマン・カッツ型期待値の増大度

東北大学大学院理学研究科 和田正樹 (Masaki Wada)
Mathematical Institute, Tohoku University
(東北大学大学院理学研究科 竹田雅好教授との共同研究)

2014 年 12 月 16 日発表

1 問題の背景

$M = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x)$ は、生成作用素 $H = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ をもつ $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称安定過程 ($0 < \alpha < (2 \wedge d)$) とする。このとき、対応する正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (u(y) - u(x))(v(y) - v(x)) \frac{A_{d,\alpha}}{|x - y|^{d+\alpha}} dx dy, \quad \mathcal{F} = H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^d)$$

により与えられる。ここで、 $H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^d)$ は $\alpha/2$ 次のソボレフ空間であり、 $A_{d,\alpha}$ は

$$A_{d,\alpha} = \frac{\alpha \cdot 2^{\alpha-1} \Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{\pi^{d/2} \Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})}, \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

で定める。 M の推移確率密度関数を $p(t, x, y)$ とすると、過渡性よりグリーン関数 $G(x, y) := \int_0^\infty p(t, x, y) dt$ が定まり、次のような測度の族を定義できる。

定義 1.1. (1) μ が加藤クラスに属す ($\mu \in \mathcal{K}$) とは、以下の式が成立することである。

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq a} G(x, y) \mu(dy) = 0$$

(2) μ がグリーン緊密である ($\mu \in \mathcal{K}_\infty$) とは、 $\mu \in \mathcal{K}$ であって、以下の式が成立することである。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| \geq R} G(x, y) \mu(dy) = 0 \quad (1.1)$$

以下、 $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対して、シュレディンガー形式を $\mathcal{E}^\mu(u, u) = \mathcal{E}(u, u) - (u, u)_\mu$ により与える。ここで、 $(u, u)_\mu$ は $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$ における内積である。 $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素を H^μ と表す。方程式 $\partial u / \partial t = -H u$ が基本解として、マルコフ過程 M の推移確率密度関数 $p(t, x, y)$ をもつと同様、方程式 $\partial u / \partial t = -H^\mu u$ も基本解をもつことが知られている ([1])。その基本解を $p^\mu(t, x, y)$ と表したとき、 $p^\mu(t, x, y)$ の挙動が $p(t, x, y)$ のそれ ((3.1) を参照のこと) と比べてどうか考えたい。直感的には、 μ が十分小さいときには似たような振る舞いをする事が予想される。その小ささを表す上で、以下の量を定める。

$$\lambda(\mu) := \inf \{ \mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}, (u, u)_\mu = 1 \}$$

これは $\mathbb{M}$ の、 μ とルヴェーズ対応する正值連続加法的汎関数 A_t^μ による時間変更の確率過程における底スペクトルである。この値が大きいほど μ は小さく、以下のように3種類に分類する。

定義 1.2. (1) μ が劣臨界的とは、 $\lambda(\mu) > 1$ を満たすことである。

(2) μ が臨界的とは、 $\lambda(\mu) = 1$ を満たすことである。

(3) μ が優臨界的とは、 $\lambda(\mu) < 1$ を満たすことである。

[13] では、 μ が有限0次エネルギー積分をもつとき、すなわち $\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} G(x, y) \mu(dx) \mu(dy) < \infty$ の条件下では、基本解の安定性が成り立つための必要十分条件が μ の劣臨界性であることを示している。ここで、基本解の安定性とは $p^\mu(t, x, y) \asymp p(t, x, y)$ となること、つまり適切な正定数 c_1, c_2 により

$$c_1 p(t, x, y) \leq p^\mu(t, x, y) \leq c_2 p(t, x, y)$$

が成立することである。これを示すためのカギは [9] による次の同値性である。

$$(i) \lambda(\mu) > 1 \Leftrightarrow (ii) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left[e^{A_\infty^\mu} \right] < \infty \Leftrightarrow (iii) G^\mu(x, y) := \int_0^\infty p^\mu(t, x, y) dt < \infty \quad (x \neq y) \quad (1.2)$$

劣臨界性が必要であることは、基本解の安定性と $\mathbb{M}$ の過渡性から (iii) が成立することから示された。十分であることを示すには、まず (ii) より $h(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{A_\infty^\mu} \right]$ がシュレディンガー作用素 H^μ における調和関数であり、適切な正定数 c_0 により $1 \leq h(x) \leq c_0$ を満たすことに注意する。ここで、シュレディンガー形式にドゥーブの h -変換を施して得られるディリクレ形式が $L^2(h^2(x)dx)$ 上に、

$$\mathcal{E}^{\mu, h}(u, u) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (u(x) - u(y))^2 \frac{A_{d, \alpha} h(x) h(y)}{|x - y|^{d+\alpha}} dx dy$$

により与えられるので、これは Chen と熊谷 [2] の意味での α -安定型過程と見なせて、推移確率密度関数 $p^\mu(t, x, y)/h(x)h(y)$ をもつことから十分性が示された。

以上のことから、 μ が臨界的もしくは優臨界的ならば、 $p^\mu(t, x, y)$ は $p(t, x, y)$ とは異なる挙動をもつことがわかる。特に、 μ が臨界的なときには、調和関数 $h(x)$ を定めドゥーブ変換を行える点は劣臨界的なときと同様であるが、 $h(x) \asymp 1 \wedge |x|^{\alpha-d}$ が成り立ち $|x| \rightarrow \infty$ で減衰している点では大きく異なる。それ故、変換後の確率過程は α -安定型過程ではなく Chen と熊谷の結果を適用できず、 $p^\mu(t, x, y)$ の具体評価は興味深い問題である。現在のところ、 $\mathbb{M}$ が3次元のブラウン運動の場合のみについては、Grigor'yan により [4] で具体評価が与えられているが、この手法を適用するためには多くの条件が必要であるため、その他の場合に応用するのは容易ではない。このため、まずは $p^\mu(t, x, y)$ そのものではなく、(1.2) の (i) と (ii) における同値性に着目し、 $p^\mu(t, x, y)$ の空間積分 (ファインマン・カッツ型期待値) $\mathbb{E}_x \left[e^{A_t^\mu} \right] = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t, x, y) dy$ について、 $t \rightarrow \infty$ とした際の発散の様子を与えることにした。

2 先行結果と主結果

μ が優臨界的なときは、ファインマン・カッツ型期待値の増大度は [10] で確立されている。このとき、シュレディンガー作用素 H^μ の最小固有値は負、すなわち

$$C(\mu) := -\inf \{ \mathcal{E}^\mu(u, u) \mid u \in \mathcal{F}, (u, u)_m = 1 \} > 0$$

が成立する。最小固有値に対応する固有関数 $h(x)$ とすると、福島のエルゴード定理を経て、

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim c_1 h(x) e^{C(\mu)t} \quad (t \rightarrow \infty)$$

が得られ、ファインマン・カッツ型期待値は指数関数的に増大する。ここで $A \sim B$ は $B/A \rightarrow 1$ を意味する。然るに、 μ が臨界的なときには $C(\mu) = 0$ であるから、ファインマン・カッツ型期待値は指数関数的には増大しえない。 M が過渡的な標準正規ブラウン運動で μ が $\mathbb{R}^d$ 上のルベグ測度 m に関して絶対連続の場合は、Simon による [7] や Cranston 達による [3] で以下の結果が得られている。

定理 2.1. 臨界的な測度 μ が、コンパクトな台をもつ非負で無限回微分可能な関数 $V(x)$ により $\mu = V \cdot m$ と表されるとき、ファインマン・カッツ期待値は $t \rightarrow \infty$ で以下の増大度をもつ。

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \begin{cases} c_1 h(x) t^{\frac{1}{2}} & (d=3) \\ c_2 h(x) t / \log t & (d=4) \\ c_3 h(x) t & (d \geq 5) \end{cases}$$

但し、 c_i は適切な正定数で $h(x)$ は $(\Delta/2 + V)h = 0$ を満たすような関数である。

これに対して、安定過程において得られた主結果は次の通りである。

定理 2.2. ([12, Theorem 1.1])

臨界的な測度 $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ がコンパクトな台をもつとき、ファインマン・カッツ型期待値は $t \rightarrow \infty$ で以下の漸近挙動をもつ。

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha} - 1)\pi)}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{\alpha}) \langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) t^{\frac{d}{\alpha}-1} \quad (1 < d/\alpha < 2), \quad (2.1)$$

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) \frac{t}{\log t} \quad (d/\alpha = 2), \quad (2.2)$$

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\langle \mu, h_0 \rangle}{(h_0, h_0)_m} h_0(x) t \quad (d/\alpha > 2). \quad (2.3)$$

ここで $h_0(x)$ はシュレディンガー作用素 H^μ の基底状態であり、第 1 章に登場した調和関数 $h(x)$ そのものである。また、 $\langle \mu, h_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h_0(x) \mu(dx)$ である。

ブラウン運動が $\alpha = 2$ の安定過程であることから、主結果における増大の次数は定理 2.1 と整合している。しかし、対称安定過程及び一般の測度 μ への拡張を行う上で特に工夫すべきことが 2 点あった。

- (a) レゾルベントの漸近展開を得る上で、ブラウン運動ではハンケル関数を用いることができたが、対称安定過程では直接的な計算を行う必要があった。
- (b) レゾルベントに対応する作用素は、関数 V では $\sqrt{V}$ を用いて $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上に定義できたが、測度 μ では代わりに A_t^μ による時間変更の確率過程及び対応するディリクレ形式を用いて、 $L^2(\mu)$ 上に定めた。

以下の証明の概略では、主にこれらの事柄を詳しく述べる。

3 証明の概略

3.1 レゾルベント核の漸近展開

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ の生成作用素は $(-\Delta)^{\alpha/2}$ であるから、

$$\mathbb{E}_x \left[e^{iu \cdot (X_t - x)} \right] = e^{-t|u|^\alpha}$$

が成立し、推移確率密度関数 $p(t, x, y)$ はフーリエ逆変換により

$$p(t, x, y) = B_{d,\alpha} t^{-\frac{d}{\alpha}} g\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\alpha}}\right), \quad B_{d,\alpha} = \frac{\Gamma(d/\alpha)}{\alpha \cdot 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \quad (3.1)$$

とわかる。ここで、 $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $g(0) = 1$ 、 $g(w) \asymp 1 \wedge w^{-d-\alpha}$ 及び $g(0) - g(w) \leq c_1 w^2$ を満たす正値関数である。 $\beta \geq 0$ に対して β -次レゾルベントを

$$G_\beta(x, y) = \int_0^\infty e^{-\beta t} p(t, x, y) dt$$

により定める。このとき、レゾルベントの $\beta \rightarrow 0$ における漸近展開が以下のように得られる。

定理 3.1. ([14, Theorem 2.4])

(1) $1 < d/\alpha < 2$ のとき

$$G_\beta(x, y) = G(x, y) - \frac{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{\alpha}}}{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha} - 1)\pi)} \beta^{\frac{d}{\alpha}-1} + E_\beta(x, y),$$

$$E_\beta(x, y) \leq c_1 \beta |x - y|^{2\alpha-d}$$

(2) $d/\alpha = 2$ のとき

$$G_\beta(x, y) = G(x, y) - \frac{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{\alpha}}}{\Gamma(\alpha+1)} \beta \log \beta^{-1} + E_\beta(x, y),$$

$$|E_\beta(x, y)| \leq c_1 \beta (1 + |\log |x - y|| + \beta |x - y|^\alpha)$$

(3) $d/\alpha > 2$ のとき

$$G_\beta(x, y) = G(x, y) - \beta \tilde{G}(x, y) + E_\beta(x, y)$$

ここで $\tilde{G}(x, y) = \int_0^\infty t p(t, x, y) dt$ であり、

$$E_\beta(x, y) \leq \begin{cases} c_1 \beta^{\frac{d}{\alpha}-1} & (2 < d/\alpha < 3) \\ c_1 \beta^2 \log \beta^{-1} + c_2 \beta^2 (1 + |\log |x - y|| + \beta |x - y|^\alpha) & (d/\alpha = 3) \\ c_1 \beta^2 |x - y|^{3\alpha-d} & (d/\alpha > 3) \end{cases}$$

3.2 時間変更の確率過程及びコンパクト作用素の設定

$\beta \geq 0$ に対して、 $\mathbb{M}^\beta = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x^\beta)$ を $\mathbb{M}$ の β -消滅過程とする。つまり、マルコフ過程の生存時間を ζ 、フィルトレーションを $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ とすると $\mathbb{P}_x^\beta(\Lambda; t < \zeta) = e^{-\beta t} \mathbb{P}_x(\Lambda)$ が $\Lambda \in \mathcal{F}_t$ に対して成り立つとする。このとき、対応するディリクレ形式は $\mathcal{E}_\beta(u, u) = \mathcal{E}(u, u) + \beta(u, u)_m$ で与えられる。更に、 $\mathbb{M}^\beta$ を A_t^μ で時間変更したもの $\check{\mathbb{M}}^{\beta, \mu}$ を、以下のように定める。

$$\check{\mathbb{M}}^{\beta, \mu} = (\{X_{\tau_t}\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x^\beta), \quad \tau_t = \inf\{s > 0 \mid A_s^\mu > t\}$$

更に A_t^μ の台 Y を

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{P}_x(T > 0) = 0\}, \quad T = \inf\{t > 0 \mid A_t^\mu > 0\}$$

と定め、 $\mathcal{F}_e^\beta$ を $(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{F})$ の拡大ディリクレ空間とすると、 $\check{\mathbb{M}}^{\beta, \mu}$ に対応するディリクレ形式が $L^2(Y, \mu)$ 上に以下のように構成される。

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{F}}^\beta &= \{\psi \in L^2(Y, \mu) \mid \exists u \in \mathcal{F}_e^\beta, Y \text{ 上 } \psi = u \text{ } \mu\text{-a.e.}\} \\ \check{\mathcal{E}}^\beta(\psi, \psi) &= \mathcal{E}_\beta(H_Y u, H_Y u), \quad H_Y u(x) = \mathbb{E}_x^\beta[u(X_{\sigma_Y})] \end{aligned}$$

ここで、 σ_Y は Y への到達時刻である。このとき、 $\mathcal{F}_e^\beta$ と $\check{\mathcal{F}}^\beta$ は次の意味で同一視することが可能である。

- $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $u \in \mathcal{F}_e^\beta$ を Y に制限した $u|_Y$ は $\check{\mathcal{F}}^\beta$ に属す。
- 逆に、 Y 上の関数 $\psi \in \check{\mathcal{F}}^\beta$ に対して、 $\check{\mathcal{F}}^\beta$ の定義式で登場した u により $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $H_Y u$ を定めると、これは Y 上では ψ に等しく、 $\mathcal{F}_e^\beta$ に属す。

$\check{\mathbb{M}}^{\beta, \mu}$ のグリーン作用素は $L^2(Y, \mu)$ 上で

$$\mathcal{G}_\beta f(x) = \int_Y G_\beta(x, y) f(y) \mu(dy)$$

により定められるが、 $\mathcal{G}_\beta f \in \check{\mathcal{F}}^\beta$ であること、先に述べた $\check{\mathcal{F}}^\beta$ と $\mathcal{F}_e^\beta$ の同一視及び、 $\mathcal{F}_e^\beta$ が $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$ にコンパクトに埋め込まれること ([11]) から、この作用素はコンパクトであるとわかる。作用素 $\mathcal{G}_\beta$ の最大固有値を γ_β で与え、対応する固有関数で $L^2(Y, \mu)$ ノルムが 1 に等しいものを h_β とする。この時点では h_β は Y 上の関数であるが、 Y の外では

$$h_\beta(x) = \frac{1}{\gamma_\beta} \int_{\mathbb{R}^d} G_\beta(x, y) h_\beta(y) \mu(dy)$$

と拡張すると、 $\check{\mathcal{F}}^\beta$ の元を $\mathcal{F}_e^\beta$ と同一視することに相当する。 $\mathbb{R}^d$ 上全体で、このように定義した h_β は

$$\frac{1}{\gamma_\beta} = \inf\{\mathcal{E}_\beta(u, u) \mid u \in \mathcal{F}_e^\beta, (u, u)_\mu = 1\} = \mathcal{E}_\beta(h_\beta, h_\beta)$$

を満たしている。 $1/\gamma_0$ が第 1 章における $\lambda(\mu)$ そのものであることも踏まえて、次が示される。

補題 3.2. h_β は h_0 に $\mathcal{E}$ -弱収束及び $L^2(\mu)$ -強収束し、 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \gamma_\beta = \gamma_0 = 1$ である。

更に、 μ がコンパクト台をもつことと、レゾルベント核 $G_\beta(x, y)$ の漸近展開を用いて作用素 $\mathcal{G}_\beta$ の漸近展開が次のように得られる。

(1) $1 < d/\alpha < 2$ のとき、

$$\mathcal{G}_\beta = \mathcal{G}_0 - \frac{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}}{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1}\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

ただし、 $\mathcal{D}_1$ 及び $\mathcal{D}_2$ は次のように定める。

$$\mathcal{D}_1 f(x) = \int_Y f(y)\mu(dy), \quad \mathcal{D}_2 f(x) = \int_Y E_\beta(x, y)f(y)\mu(dy).$$

(2) $d/\alpha = 2$ のとき、 $1 < d/\alpha < 2$ における $\mathcal{D}_1$ 及び $\mathcal{D}_2$ により

$$\mathcal{G}_\beta = \mathcal{G}_0 - \frac{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)}\beta \log \beta^{-1}\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

(3) $d/\alpha > 2$ のとき、 $\mathcal{D}_1 f(x) = \int_Y \tilde{G}(x, y)f(y)\mu(dy)$ 及び $1 < d/\alpha < 2$ における $\mathcal{D}_2$ により

$$\mathcal{G}_0 - \beta\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

$\mathcal{D}_2$ の作用素ノルムが $E_\beta(x, y)$ のもつ β のオーダーに等しいことに注意すると、[6] 同様にして $\mathcal{D}_1$ までの項でコンパクト作用素における 1 次摂動理論 ([5]) が適用できて γ_β の $\beta \rightarrow 0$ での漸近展開が得られる。

定理 3.3. 最大固有値 γ_β は、 d/α に応じて以下の漸近展開をもつ。

$$\gamma_\beta = 1 - \frac{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\langle \mu, h_0 \rangle^2}{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1} + o(\beta^{\frac{d}{\alpha}-1}) \quad (1 < d/\alpha < 2) \quad (3.2)$$

$$\gamma_\beta = 1 - \frac{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\langle \mu, h_0 \rangle^2}{\Gamma(\alpha+1)}\beta \log \beta^{-1} + o(\beta \log \beta^{-1}) \quad (d/\alpha = 2) \quad (3.3)$$

$$\gamma_\beta = 1 - (h_0, h_0)_m \beta + o(\beta) \quad (d/\alpha > 2) \quad (3.4)$$

3.3 ターベリアン定理からファインマン・カッツ型期待値の時間増大度

まずは、以下の等式が成立することに注意する。

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] = 1 + \int_0^t p_s^\mu(x)ds, \quad p_s^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(s, x, y)\mu(dy).$$

$\int_0^t p_s^\mu(x)ds$ の $t \rightarrow \infty$ での振る舞いを知るためには、レゾルベント G_β^μ の $\beta \rightarrow 0$ での振る舞いを調べ、ターベリアンの定理を適用すればよい。レゾルベント方程式から

$$G_\beta^\mu = (1 - \mathcal{G}_\beta)^{-1}(\mathcal{G}_\beta \mu).$$

であるが、 h_β への射影 $P_\beta f(x) = (f, h_\beta)_\mu h_\beta$ とそれ以外の部分への直交分解を考えて、以下を得る。

$$G_\beta^\mu = (1 - \gamma_\beta)^{-1}(G_\beta \mu, h_\beta)_\mu h_\beta + R_\beta, \quad R_\beta \in \mathcal{F}_e, \quad \sup_{0 \leq \beta \leq 1} \mathcal{E}(R_\beta, R_\beta) < \infty \quad (3.5)$$

(3.2)–(3.5) に注意すると、 $\mathcal{E}$ -弱収束の意味で次が成立する。

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{\frac{d}{\alpha}-1} G_\beta^\mu(x) = \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) \quad (1 < d/\alpha < 2) \quad (3.6)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \log \beta^{-1} G_{\beta}^{\mu} \mu(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) \quad (d/\alpha = 2) \quad (3.7)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta G_{\beta}^{\mu} \mu(x) = \frac{\langle \mu, h_0 \rangle}{(h_0, h_0)_m} h_0(x) \quad (d/\alpha > 2) \quad (3.8)$$

これを各点収束に強めるためには、まず $\epsilon > 0$ と $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $p^{\mu}(\epsilon, x, y) dy =: g(y) dy$ が $\mathcal{K}_{\infty}$ に属すると、[8] より $(u, u)_{g \cdot m} \leq \|Gg\|_{\infty} \mathcal{E}(u, u)$ となることに注意する。このとき、 $\mathcal{E}$ -弱収束から $L^2(g \cdot m)$ -弱収束が導けるため、(3.6)–(3.8) の両辺に p_{ϵ}^{μ} を作用させるとよい。 p_{ϵ}^{μ} と G_{β}^{μ} の可換性も加味すると、次が得られる。

補題 3.4. $x \in \mathbb{R}^d$ の各点において、以下の式が成立する。

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{\frac{d}{\alpha}-1} G_{\beta}^{\mu} p_{\epsilon}^{\mu} \mu(x) &= \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) \quad (1 < d/\alpha < 2) \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \log \beta^{-1} G_{\beta}^{\mu} p_{\epsilon}^{\mu} \mu(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) \quad (d/\alpha = 2) \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta G_{\beta}^{\mu} p_{\epsilon}^{\mu} \mu(x) &= \frac{\langle \mu, h_0 \rangle}{(h_0, h_0)_m} h_0(x) \quad (d/\alpha > 2) \end{aligned}$$

ここで、関数 $k(\beta)$ を

$$k(\beta) = \begin{cases} \beta^{\frac{d}{\alpha}-1} & (1 < d/\alpha < 2) \\ \beta \log \beta^{-1} & (d/\alpha = 2) \\ \beta & (d/\alpha > 2) \end{cases}$$

とすると、次のターベリアンの定理が得られる。

補題 3.5. ν は $[0, \infty)$ 上のボレル測度で、全ての $\beta > 0$ に対して $\int_0^{\infty} e^{-\beta t} \nu(dt) < \infty$ が成り立つとする。このとき $\lim_{\beta \rightarrow 0} k(\beta) \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \nu(dt) = D \geq 0$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} k\left(\frac{1}{t}\right) \nu[0, t) = \frac{D}{\Gamma((d/\alpha) \wedge 2)}$ である。

$G_{\beta}^{\mu} p_{\epsilon}^{\mu} \mu(x) = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} p_{t+\epsilon}^{\mu} \mu(x) dt$ であることに注意して、この定理を適用すると $k\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^t p_{s+\epsilon}^{\mu} \mu(x) ds$ の $t \rightarrow \infty$ における極限が求まる。更に

$$k\left(\frac{1}{t+\epsilon}\right) \int_0^{t+\epsilon} p_s^{\mu} \mu(x) ds = k\left(\frac{1}{t+\epsilon}\right) \int_0^t p_{s+\epsilon}^{\mu} \mu(x) ds + k\left(\frac{1}{t+\epsilon}\right) \int_t^{t+\epsilon} p_s^{\mu} \mu(x) ds$$

において $t \rightarrow \infty$ とすると、第 2 項が 0 に収束すること、 $\frac{k(1/(t+\epsilon))}{k(1/t)}$ が 1 に収束することから、定理 2.2 が得られる。

4 今後の展望

定理 3.1 で与えたレゾルベントの漸近展開では、誤差項 $E_{\beta}(x, y)$ は $|x - y| \rightarrow \infty$ としたとき発散する関数で上から評価されている。作用素 G_{β} の漸近展開でも、そのまま適用するために十分条件として、 μ にコンパクト性を課していた。しかしながら、 $\mu \in \mathcal{K}_{\infty}$ であっても、定義式 (1.1) に基づき現在得られている漸近展開を x と y が両方とも適切なコンパクト領域に含まれている場合のみ適用し、それ以外のときには $G_{\beta}(x, y)$ を別の関数で上下から評価を行えば、 γ_{β} の上下からの評価が得られるので、 $(1 - \gamma_{\beta})/k(\beta)$ は $\beta \rightarrow 0$ で、(3.2)–(3.4) の第 2 項に現れる定数に収束することが示される。3 章 3 節の議論については、少なくとも μ が 0 次有限エネルギーをもつときには、 $\mu \in \mathcal{K}_{\infty}$ に対しても正しい。

参考文献

- [1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, In Random partial differential equations (Oberwolfach, 1989), Birkhäuser, Inter. Ser. Num. Math. 102, 1–31, (1991).
- [2] Chen, Z.-Q. and Kumagai, T.: Heat kernel estimates for stable-like processes on d -sets, Stoc. Proc. Appli. 108, 27–62, (2003).
- [3] Cranston, M., Koralov, L., Molchanov, S., Vainberg, B.: Continuous model for homopolymers, Journal of Funct. Anal. 256, 2656–2696, (2009).
- [4] Grigo'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Contemp. Math. 338, 93–191, (2006).
- [5] Kato, T.: Perturbation thoery of linear operators, Reprint of the 1980 Edition, Springer, (1980).
- [6] Klaus, M. and Simon, B.: Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case, Analysis of Physics 130, 251–281, (1980).
- [7] Simon, B.: Large time behavior of the L^p norm of Schrödinger semigroups, Journal of Functional analysis 40, 66–83, (1981).
- [8] Stollmann, P., Voigt, J.: Perturbation of Dirichlet forms by measures, Potential Anal. 5, 109–138, (1996).
- [9] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α -stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 2729–2738, (2006).
- [10] Takeda, M.: Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, J. Theor. Probab. 21, 336–355, (2008).
- [11] Takeda, M., Tsuchida, K.: Differentiability of spectral functions for symmetric α -stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. 359, (2007), 4031–4054.
- [12] Takeda, M., Wada, M.: Large time asymptotics of Feynman-Kac functions for symmetric stable processes, preprint.
- [13] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, Tohoku Math. Journal 66, (2014), 523–537.
- [14] Wada, M.: Asymptotic expansion of resolvent kernels and behavior of spectral functions for symmetric stable processes, submitted.