

非直交関数系の数理*

東邦大学・理学部 塚田 真 (Makoto TSUKADA)

1 序論

与えられたベクトルの集合 $\{x_i\}$ でベクトル y を

$$y \sim \sum_i a_i x_i$$

のように表現する問題は、様々な分野で登場する。ここで $\sim$ は等号であったり、何らかの意味で最良近似であったりする。最もよく知られているのは、Fourier 展開であろう。有限次元の場合、 $\{x_i\}_{i=1}^n$ を m 次元列ベクトルの任意の集合として (n, m) 型行列

$$A = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$$

を考えて、 A の一般化逆行列 $A^\dagger$ を

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}$$

で表せば

$$y \sim \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i y) x_i$$

の右辺は y の $\{x_i\}_{i=1}^n$ が生成する部分空間への最小 2 乗近似となる。 $\{x_i\}_{i=1}^n$ が完全正規直交系ならば A はユニタリ行列となり、Fourier 展開に他ならない。

一般化逆行列は非常に便利であり、統計における推定の問題でも重要な役割を果たす。平均および分散共分散は既知であるが直接観測できない確率変数の集合 $\{X_i\}_{i=1}^n$ があり、既知の (m, n) 型行列 A により

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

の関係にある確率変数の集合 $\{Y_j\}_{j=1}^m$ は観測できるとする。 $\{Y_j\}_{j=1}^m$ の実現値 $\{y_j\}_{j=1}^m$ を知ったとき、 $\{X_i\}_{i=1}^n$ の実現値をどう計算すれば良いであろうか。平均および分散共分散は既知であること

*この研究は文部科学省科学研究費基盤研究 (B) 課題番号 18300003 による

より、この問題は $\{X_i\}_{i=1}^n$ が互いに独立である場合に帰着できる。このとき

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \vdots \\ \hat{X}_m \end{bmatrix} = A^\dagger \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

で得られる確率変数 $\hat{X}_i$ が、 $\{Y_j\}_{j=1}^m$ の線形結合の中で X_i が 2 乗平均誤差を最小にするという意味で最良推定である。従って

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix} = A^\dagger \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

で得られる $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^m$ を求めればよい。A が正則行列ならば自明の結果である。

2 Riesz 基底

定理 1 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間として、 $e_1, e_2, \dots \in \mathcal{H}$ を任意とする。このとき、次の条件は同値である：

- (1) 任意の $\{c_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ に対して、 $\sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ は強収束する；
- (2) 任意の $\{c_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ に対して、 $\sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ は弱収束する；
- (3) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して、 $\{\langle e_i | x \rangle\}_{i=1}^\infty \in l^2$ である。
- (4) $a \geq 0$ が存在して、 $\left\| \sum_{i=1}^\infty c_i e_i \right\|^2 \leq a \cdot \sum_{i=1}^\infty |c_i|^2$ を満たす；
- (5) $a \geq 0$ が存在して、 $\sum_{i=1}^\infty |\langle e_i | x \rangle|^2 \leq a \cdot \|x\|^2$ を満たす。

$e_1, e_2, \dots$ は、上の条件を満たすものとして、有界線形写像 $\{c_i\}_{i=1}^\infty \mapsto \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ を A で表し、その共役線形写像 $x \mapsto \{\langle e_i | x \rangle\}_{i=1}^\infty$ を A^* で表す。A に逆変換が存在してそれが有界となるための必要十分条件は、次の 2 つの条件を満たすことが必要十分である。

- (6) $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ の張る線形空間が $\mathcal{H}$ で稠密である；

$$(7) \ b > 0 \text{ が存在して、} \left\| \sum_{n=1}^\infty c_n e_n \right\|^2 \geq b \cdot \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2.$$

(7) は、 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ が線形独立であるという条件を含んでいる。A の逆変換が存在することと A^* の逆変換が存在することは同値であり、次の 2 つの条件を満たすことが必要十分である。

- (8) $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ が線形独立である；

$$(9) \quad b > 0 \text{ が存在して、} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n | x \rangle|^2 \geq b \cdot \|x\|^2.$$

(9) は、 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の張る線形空間が $\mathcal{H}$ で稠密であるという条件を含んでいる。 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ が

(4),(6),(7) を満たす

或はこれと同値な条件

(5),(8),(9) を満たす

とき、 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の Riesz 基底であるという。Riesz 基底によって $\mathcal{H}$ と l^2 は線形同形で両連続な関係にある。

3 シフト変換

$0 \neq \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ および $0 \neq \sigma \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - k\sigma), \quad k \in \mathbb{Z}$$

と定義し、 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が生成する線形部分空間を $\mathcal{V}$ で表す。このとき

$$\widehat{\varphi}_k(t) = e^{-2\pi i k \sigma t} \widehat{\varphi}(t)$$

が成立する。 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は線形独立であることは次のようにしてわかる。 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の Fourier 変換 $\{\widehat{\varphi}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が線形独立であることを示せばよい。

$$\sum_{k=-n}^n a_k \widehat{\varphi}_k(t) = 0$$

であるとする。このとき

$$\sum_{k=-n}^n a_k e^{-2\pi i k \sigma t} \widehat{\varphi}(t) = 0$$

であり、 $\widehat{\varphi} \neq 0$ なので

$$\forall t \in (t_0, t_1), \quad \widehat{\varphi}(t) \neq 0$$

であるような微小区間 (t_0, t_1) が存在する。従って、

$$\forall t \in (t_0, t_1), \quad \sum_{k=-n}^n a_k e^{-2\pi i k \sigma t} = 0$$

であり、解析接続によって

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=-n}^n a_k z^k = 0$$

でなければならず、すべての係数は 0 である。次の結果が知られている ([7],[8])。

補題 1 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が正規直交系であるための必要十分条件は

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi} \left(\frac{s+n}{\sigma} \right) \right|^2 = \sigma, \quad \text{for almost all } s \in [0, 1).$$

であることである。

実際に具体例を見てみよう。

$$\varphi(x) = 1_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって定義される Haar 関数系は正規直交系である。このとき

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t x} \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i t x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i t} (e^{-2\pi i t} - 1) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{t+n} (e^{-2\pi i(t+n)} - 1) \right|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{t+n} (e^{-2\pi i t} - 1) \right|^2 \\ &= |e^{-2\pi i t} - 1|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(t+n)^2} \\ &= 2(1 - \cos 2\pi t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(t+n)^2} \\ &= 4(\sin^2 \pi t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(t+n)^2} \end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(t+k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t}$$

であることより、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t+n)|^2 = 1, \quad \text{for almost all } t \in [0, 1].$$

が示される。

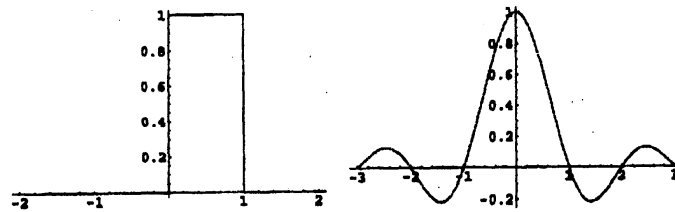


図 1: Haar 関数 $\varphi(x)$ のグラフ (左) と、 $|\hat{\varphi}(t)| = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ のグラフ (右)

上の補題は、 $f \in \mathcal{H}$ に対して $\{\langle \varphi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ を対応させる写像がユニタリになる条件を述べている。条件を緩めて、この写像が有界で可逆であるための条件を述べた次の定理が言える。

定理 2 $0 < a \leq b$ に対して、

$$a \cdot \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_k | f \rangle|^2 \leq b \cdot \|f\|^2 \quad \text{for all } f \in \mathcal{V}$$

であることと

$$a\sigma \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{s+n}{\sigma}\right) \right|^2 \leq b\sigma \quad \text{for almost all } s \in [0, 1].$$

は同値である。

Proof.

$$a\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_k | f \rangle|^2 \leq b\|f\|^2 \quad \text{for all } f \in \overline{\mathcal{V}}$$

であるとする (このことは、Lemma 1 と合わせて $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が $\overline{\mathcal{V}}$ の Riesz 基底であるということである)。 $A: f \mapsto \{\langle \varphi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は、 $\overline{\mathcal{V}}$ から $l^2(\mathbb{Z})$ の上への可逆な有界線形写像であり、

$$a\|f\|^2 \leq \|A^{-1}\|^{-2} \|f\|^2 \leq \|Af\|^2 \leq \|A\|^2 \|f\|^2 \leq b\|f\|^2 \quad \text{for all } f \in \overline{\mathcal{V}}$$

が成立する。 $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を $l^2(\mathbb{Z})$ の標準基底、即ち、各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\epsilon_k = \{\delta_{ik}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ として $\psi_k = A^{-1}\epsilon_k$ とおく。

$$\begin{aligned} f &= A^{-1}Af \\ &= A^{-1}\{\langle \varphi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= A^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k | f \rangle \epsilon_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k | f \rangle \psi_k \end{aligned}$$

という展開式を得る。また、任意の $g \in \overline{\mathcal{V}}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle g | f \rangle &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k | g \rangle \psi_k \middle| f \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g | \varphi_k \rangle \langle \psi_k | f \rangle \\ &= \left\langle g \middle| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle \varphi_k \right\rangle \end{aligned}$$

が成立することから

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle \varphi_k$$

という展開式も成立する。ここで、 $A^*: \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k$ である。実際、

$$\begin{aligned} \langle Af | \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \rangle &= \left\langle \{\langle \varphi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}} \middle| \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\langle \varphi_k | f \rangle} c_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \varphi_k \rangle c_k \\ &= \left\langle f \middle| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k \right\rangle \\ &= \langle f | A^* \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \rangle \end{aligned}$$

であることより示される。 A^* も可逆な有界線形写像で、 $(A^*)^{-1}: f \mapsto \{\langle \psi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ なので

$$\|A^*\|^{-2} \|f\|^2 \leq \|(A^*)^{-1}f\|^2 \leq \|(A^*)^{-1}\|^2 \|f\|^2$$

即ち

$$\|A\|^{-2} \|f\|^2 \leq \|(A^*)^{-1} f\|^2 \leq \|A^{-1}\|^2 \|f\|^2$$

であるから

$$\frac{1}{b} \cdot \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_k | f \rangle|^2 \leq \frac{1}{a} \cdot \|f\|^2 \quad \text{for all } f \in \overline{\mathcal{V}}$$

を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k t} \right|^2 dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_k | f \rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{a} \cdot \|f\|^2 \\ &= \frac{1}{a} \cdot \|\widehat{f}\|^2 \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle \widehat{\varphi}_k(t) \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k \sigma t} \widehat{\varphi}(t) \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k s} \widehat{\varphi}\left(\frac{s}{\sigma}\right) \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k s} \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{s}{\sigma}\right) \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{a\sigma} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k s} \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{s}{\sigma}\right) \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{a\sigma} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k(s+n)} \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{s+n}{\sigma}\right) \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{a\sigma} \cdot \int_0^1 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k s} \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{s+n}{\sigma}\right) \right|^2 ds \end{aligned}$$

ここで、 f を $\overline{\mathcal{V}}$ 全体を動かすと $\{\langle \psi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は $l^2(\mathbb{Z})$ 全体を動き、 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle e^{-2\pi i k t}$ は $L^2[0, 1)$ 全体を動くので

$$a\sigma \int_0^{2\pi} h(s) ds \leq \int_0^1 h(s) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{s+n}{\sigma}\right) \right|^2 ds$$

が任意の非負可積分関数 h に対して成立する。このことから

$$a\sigma \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{s+n}{\sigma}\right) \right|^2, \quad \text{for almost all } s \in [0, 1)$$

が示される。同様に、

$$b\sigma \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{s+n}{\sigma}\right) \right|^2, \quad \text{for almost all } s \in [0, 1)$$

も得る。逆は

$$f = \sum_{k=-m}^m c_k \varphi_k$$

に対して、上の証明の逆を辿って

$$\begin{aligned} \|f\| &= \int_0^1 \left| \sum_{k=-m}^m c_k e^{-2\pi i k s} \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi} \left(\frac{s+n}{\sigma} \right) \right|^2 ds \\ &\geq a\sigma \int_0^1 \left| \sum_{k=-m}^m c_k e^{-2\pi i k s} \right|^2 ds \\ &= a\sigma \sum_{k=-m}^m |c_k|^2 \end{aligned}$$

同様に

$$\|f\| \leq b\sigma \sum_{k=-m}^m |c_k|^2$$

が言えるから $B: \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k$ が $l^2(\mathbb{Z})$ から $\bar{\mathcal{V}}$ への可逆な有界線形写像として定義でき $B^*: f \mapsto \{\langle \varphi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ も可逆な有界線形写像であることより証明される。■

この定理の後半の条件を満たさない φ を作ることは易しい。例えば

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq |t| < n + \frac{1}{n+2}, \\ 0, & \text{if } n + \frac{1}{n+2} \leq |t| < n+1, \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と定義し、 $\sigma = 1$ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

より $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ なので、 ψ の逆 Fourier 変換を φ とする。 φ の Fourier 変換は ψ である。このとき、

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(t+k)|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\psi(t+k)|^2 = n-1 \quad \text{for } \frac{1}{n+1} \leq t < \frac{1}{n} \text{ and } n \in \mathbb{N}$$

であるので、定理の後半の条件を満たさない。

注意 1 上の証明において、 $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の双対 Riesz 基底で、

$$\langle \varphi_k | \psi_l \rangle = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

を満たしているものとして特徴化される。

実際、(*) を満たす $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が一意であることが次のように示すことができる。上の証明で考えたように、逆を持つ有界線形写像 $A: \bar{\mathcal{V}} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ として

$$f \mapsto \{\langle \varphi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

による $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の像は、(*) により $l^2(\mathbb{Z})$ の標準基底に他ならない。 A は one-to-one 写像なので、 $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は一意でなければならない。

双対 Riesz 基底の一意性より、 $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ はすべて 1 つの関数

$$\psi = \psi_0$$

のずらしから成ること、即ち、すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\psi_k(x) = \psi(x - k), \quad x \in \mathbb{R}$$

が言える。このことは次のようにして証明できる。 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(Uf)(x) = f(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

すると、 U は $L^2(\mathbb{R})$ 上にユニタリ変換であるので、

$$\langle U\varphi_k | U\psi_l \rangle = \langle \varphi_k | \psi_l \rangle = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

より、 $\{U\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の双対 Riesz 基底は $\{U\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ である。ところが $\{U\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{\varphi_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ であり、 $\{\varphi_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の双対 Riesz 基底は $\{\psi_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ であるので、双対 Riesz 基底の一意性から $\{U\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{\psi_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ でなければならない。従って

$$U\psi_k = \psi_{k-1}$$

を得る。これより望みの結果

$$\psi_k = (U^*)^k \psi$$

を得る。

P を

$$f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle \varphi_k, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

により定義すると、

$$f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k | f \rangle \psi_k, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

とも表現できて、これは $L^2(\mathbb{R})$ から閉部分空間 $\overline{\mathcal{V}}$ 上への直交射影である。即ち

$$Pf = \arg \min_{g \in \overline{\mathcal{V}}} \|f - g\|, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

である (最小 2 乗近似)。

注意 2 定理 2 において $a = b$ ととれるとき、 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ はタイトフレームであるという。補題 1 から、そのための必要十分条件は $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が直交系になっていることであることがわかる。

$\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ によって

$$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k$$

と表現できるので

$$\delta_{0,j} = \langle \psi | \varphi_j \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \langle \varphi_k | \varphi_j \rangle$$

である。従って、無限行列

$$C = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \langle \varphi_{-m} | \varphi_{-m} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{-m} | \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_{-m} | \varphi_m \rangle & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \langle \varphi_0 | \varphi_{-m} \rangle & \cdots & \langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0 | \varphi_m \rangle & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle \varphi_m | \varphi_{-m} \rangle & \cdots & \langle \varphi_m | \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_m | \varphi_m \rangle & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

を考えると

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \vdots \\ c_{-m} \\ \vdots \\ c_0 \\ \vdots \\ c_m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

であるので

$$C^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ c_{-m} \\ \vdots \\ c_0 \\ \vdots \\ c_m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

即ち、逆行列 C^{-1} の中央の行 (または列) を取り出すと $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を得る。

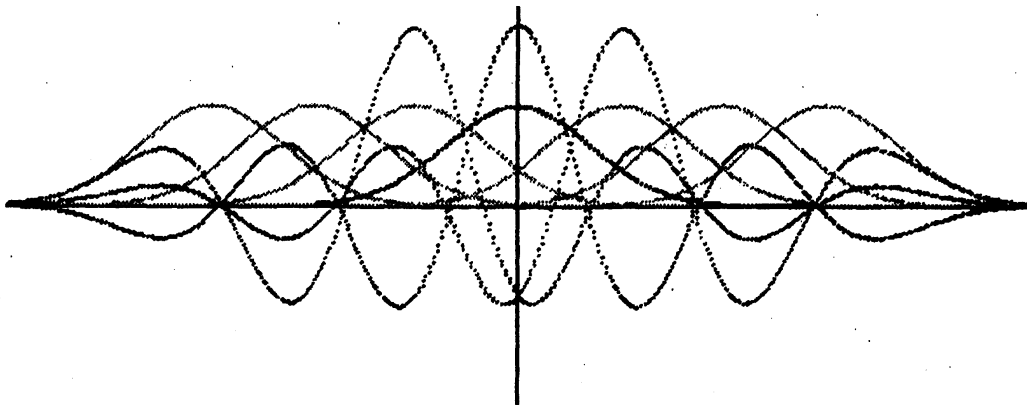


図 2: $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $\sigma = 1$ に対する ψ のグラフ

上で述べた無限行列 C が何者であるかを、 C と対称的に定義できる無限行列

$$D = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \langle \psi_{-m} | \psi_{-m} \rangle & \cdots & \langle \psi_{-m} | \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_{-m} | \psi_m \rangle & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \langle \psi_0 | \psi_{-m} \rangle & \cdots & \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_0 | \psi_m \rangle & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle \psi_m | \psi_{-m} \rangle & \cdots & \langle \psi_m | \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_m | \psi_m \rangle & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

と合わせて考えてみよう。 C は

$$\psi_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{ik} \varphi_k, \quad i \in \mathbb{Z}$$

と表現したときの展開係数で決まる行列 $[c_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ を考えたとき

$$\delta_{ij} = \langle \psi_i | \varphi_j \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{ik} \langle \varphi_k | \varphi_j \rangle$$

の関係から、互いに逆行列の関係にある。一方、定理2の証明で述べたように

$$\psi_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | \psi_i \rangle \varphi_k, \quad i \in \mathbb{Z}$$

という展開ができ、補題1で $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が $\overline{\mathcal{V}}$ で線形独立なので、この展開は一意である。即ち、 C と D は互いに逆行列の関係にある。 $A: f \mapsto \{\langle \varphi_k | f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を考える。定理2の証明においては A は $\overline{\mathcal{V}}$ を定義域としてが、定理の条件を満たす限りこの定義域は $L^2(\mathbb{R})$ でよい(第2章参照)。この共役写像は $A^*: \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k \varphi_k$ である。この定義域は $l^2(\mathbb{Z})$ で値域は $\overline{\mathcal{V}}$ である。このとき

$$A^* A f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k | f \rangle \varphi_k, \quad \text{for all } f \in L^2(\mathbb{R})$$

で、また

$$A A^* \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k | \varphi_j \rangle \xi_j \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

である。特に、後者の式の右辺をよく見ると、これは $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を無限列ベクトルとして C を施したものに他ならない。従って $A A^*$ の無限行列表現が C である。

$$P f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | f \rangle \varphi_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k | f \rangle \psi_k, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

であったが、

$$\begin{aligned} P f &= P P f \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \psi_k \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_l | f \rangle \psi_l \right. \right\rangle \varphi_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle \psi_k | \psi_l \rangle \langle \varphi_l | f \rangle \varphi_k \end{aligned}$$

より、 C の逆行列 D が計算できれば Pf の計算ができる。 C は無限行列なので、数値計算で求めるには $-N \leq k \leq N$ の有限行列にして計算する。 N は十分小さな $\epsilon > 0$ に対して $\sum_{|k|>N} |\langle \varphi_k | f \rangle| < \epsilon$ ようにとる。あるいは、上の関係式は

$$Pf = A^* (AA^*)^{-1} Af = A^\dagger Af$$

と変形できるので、 A の一般化逆写像を用いても計算できる。この場合は、 $L^2(\mathbb{R})$ の関数を十分大きな区間 $[\alpha, \beta]$ の十分小さな幅の有限個の点でサンプリングして有限次元に落として A を行列とみなして一般化逆行列を計算する。

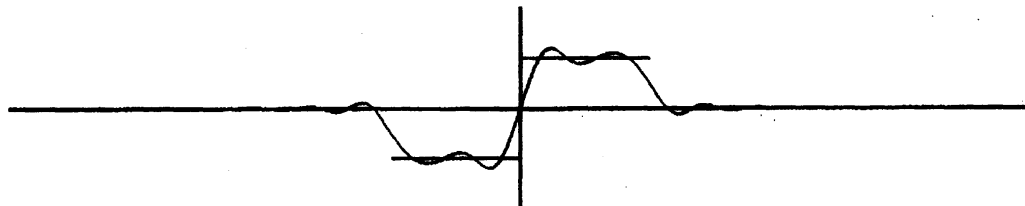


図 3: $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $\sigma = 1$ による f と Pf のグラフ

参考文献

- [1] Ola Bratteli, Palle Jorgensen, Wavelets Through a Looking Glass, Birkhäuser, 2002.
- [2] Charles K. Chui (ed.), Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, 1992.
- [3] Ingrid Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992.
- [4] Lokenath Debnath, Wavelet Transforms and Their Applications, Birkhäuser, 2002.
- [5] Yves Meyer, Wavelets and Operators, Cambridge University Press, 1992.
- [6] Mary Beth Ruskai, Gregory Beylkin, Ronald Coifman et al. (ed.), Wavelets and Their Applications, Jones and Bartlett Publishers, 1992.
- [7] David F. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2002.
- [8] 新井仁之, フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2001.
- [9] 塚田 真, 加藤雅彦, “フレームの関数解析,” 情報科学としての関数解析とその応用, 数理解析研究所講究録 1340, 京都大学数理解析研究所, 2003.9.