

C*-環の写像の lifting 問題について

新潟大学教育学部 古谷 正 (Tadasi Huruya)

C*-環の商環への写像の lifting 問題を研究するとき、定義域が有限次元の空間の lifting が重要な役割を果たしてきた ([1],[3],[6])。ここでは、定義域が有限次元の空間の lifting 問題のみを扱う。Robertson-Smith [14] は有限次元の operator system から C*-環の商環への completely positive unital 写像は、任意の n について、 n -positive な lifting を持つことを証明した。そこで、いわば $n = \infty$ にあたる completely positive な lifting の場合はどうかという問題が考えられる。ここでは、つぎのような具体例を示す。

2つの生成元をもつ自由群の群 C*-環 $C^*(F_2)$ と reduced 群 C*-環を $C_r^*(F_2)$ とする。 $C_r^*(F_2)$ の生成元 $\{\lambda(u), \lambda(v)\}$ の生成する 5次元の operator system を E とし、 E の $C_r^*(F_2) = C^*(F_2)/J$ への埋め込みを ϕ とする。ここでは、 $\phi : E \rightarrow C^*(F_2)/J$ は completely positive unital な lifting をもたないことを示す。

また、lifting 問題と operator system の maximal tensor 積の関係を調べる。

1. 準備

C*-環 A, B に対して、 $A \otimes B$ で minimal C* tensor 積を、 $A \otimes_{\max} B$ で maximal C* tensor 積を表す。任意の C*-環 B に対して、常に $A \otimes B = A \otimes_{\max} B$ を満たす C*-環 A は nuclear であると呼ぶ [12]。

以下では、C*-環はすべて単位元 1 をもち、イデアルはすべて閉じた両側のみを考える。また、 $L(H)$ を無限次元の separable Hilbert 空間 H の有界作用素全体とする。

C*-環 A の線形部分空間 E が $E^* = E$ かつ $1 \in E$ を満たすとき、 E を operator system と呼ぶ。特に、行列環 M_n の operator system を matrix system と呼ぶことができる。C*-環 A_i の operator system E_i $i = 1, 2$ に対して、 $E_1 \otimes E_2 \subseteq A_1 \otimes A_2$ で minimal tensor 積を定義する。また、代数的テンソル積 $E_1 \odot E_2$ 上に、max ノルムを

$$x = \sum_1^n x_k^{(1)} \otimes x_k^{(2)}, \quad \|x\|_{\max} = \sup \left\| \sum_1^n \theta_1(x_k^{(1)}) \theta_2(x_k^{(2)}) \right\|$$

ここで、 $\sup$ は、 $\theta_i : E_i \rightarrow L(H)$ で commuting range を持つ、すなわち、 $\theta_1(x_1)\theta_2(x_2) = \theta_2(x_2)\theta_1(x_1)$ を満たす completely positive unital 写像の pair (θ_1, θ_2) 全体にわたる。十分多くの (θ_1, θ_2) に結びついた表現の direct sum $\gamma : E_1 \odot E_2 \rightarrow L(H)$ を考えることにより

$$\|x\|_{\max} = \|\gamma(x)\| \quad x \in E_1 \odot E_2$$

の $\gamma(E_1 \odot E_2)$ の閉包を $E_1 \otimes_{\max} E_2$ で表し、 E_1 と E_2 の maximal tensor 積と呼ぶ [13]。 E_1, E_2 が C*-環のとき、C*-環の maximal tensor 積に一致する。また、 E_2 が nuclear C*-環のとき、任意の E_1 に対して、 $E_1 \otimes E_2 = E_1 \otimes_{\max} E_2$ が成立する [13]。この operator

system の maximal tensor 積は、doubly commuting operator の joint normal dilation への応用が知られている [13]。

C^* -環 A に対して、 $A \subseteq B$ を満たす任意の C^* -環 B から A へのノルム 1 の projection が存在するとき、 A を injective と呼ぶ。 $L(H)$ は injective である。

C^* -環 A に対して、任意の C^* -環 B の商環 B/J への completely positive unital な $\phi : A \rightarrow B/J$ が与えられたとき、 A の任意の有限次元の operator system E への制限 $\phi|_E : E \rightarrow B/J$ が completely positive unital な lifting、すなわち、 $\psi : E \rightarrow B$ で $\phi = \pi \circ \psi$ を満たす completely positive unital な写像 ψ が存在するとき、 A は local lifting property をもつと呼ぶ [11]。ただし、 π は商写像 $\pi : B \rightarrow B/J$ を表す。任意個の生成元をもつ自由群 F の群 C^* -環 $C^*(F)$ は local lifting property をもつ ([11] の Lemma 2.1)。つぎの Kirchberg と Choi の結果は、以下の key となる。

定理 A ([11] の Proposition 1.1). C^* -環 A が injective で、 C^* -環 B が local lifting property をもつとき、

$$A \otimes B = A \otimes_{\max} B.$$

定理 B ([2] の Theorem 3.1). C^* -環 A から B への completely positive でノルムが 1 以下の写像 ϕ に対して、 $\mathcal{M}_\phi = \{a \in A : \phi(a^*a) = \phi(a)^*\phi(a), \text{かつ} \phi(aa^*) = \phi(a)\phi(a)^*\}$ を ϕ の multiplicative domain とよぶ。 $a \in \mathcal{M}_\phi$ なら、任意の $b \in A$ に対して、 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, $\phi(ba) = \phi(b)\phi(a)$ が成立する。

2. 例

例 1. $C_r^*(F_2)$ の生成元 $\{\lambda(u), \lambda(v)\}$ の生成する 5 次元の operator system を E とし、 E の $C_r^*(F_2) = C^*(F_2)/J$ への埋め込みを ϕ とする。 $\phi : E \rightarrow C^*(F_2)/J$ は completely positive unital な lifting をもたない。

証明

Wassermann の結果 [15] から、short exact 列

$$0 \rightarrow J \rightarrow C^*(F_2) \rightarrow C_r^*(F_2) \rightarrow 0$$

に対して

$$0 \rightarrow J \otimes C^*(F_2) \rightarrow C^*(F_2) \otimes C^*(F_2) \rightarrow C_r^*(F_2) \otimes C^*(F_2) \rightarrow 0$$

は exact でない。よって Kirchberg の結果 ([11] の Proposition 2.2) から $C_r^*(F_2)$ は local lifting property をもたない。すなわち、定理 A により

$$C_r^*(F_2) \otimes L(H) \neq C_r^*(F_2) \otimes_{\max} L(H).$$

ϕ が completely positive unital lifting $\psi : E \rightarrow C^*(F_2)$ をもつと仮定する。

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi : & E \otimes L(H) & \rightarrow & C^*(F_2) \otimes L(H) = C^*(F_2) \otimes_{\max} L(H) & \rightarrow & C_r^*(F_2) \otimes_{\max} L(H) \\ & x \otimes y & \rightarrow & \psi(x) \otimes y & \rightarrow & \phi(x) \otimes y \end{array}$$

は completely positive である。\$\pi\$ を Hilbert 空間 \$K\$ 上の \$C_r^*(F_2) \otimes_{\max} L(H)\$ の faithful な表現とする。\$\tilde{\Phi} : C_r^*(F_2) \otimes L(H) \rightarrow L(K)\$ を \$\Phi\$ の \$C_r^*(F_2) \otimes L(H)\$ への completely positive な拡張とする。\$\tilde{\Phi}(\lambda(u) \otimes 1) = \Phi(\lambda(u) \otimes 1) = \pi(\lambda(u) \otimes 1)\$ なので、

$$\tilde{\Phi}(1) = \tilde{\Phi}((\lambda(u) \otimes 1)^*(\lambda(u) \otimes 1)) = \tilde{\Phi}(\lambda(u) \otimes 1)^* \tilde{\Phi}(\lambda(u) \otimes 1),$$

$$\tilde{\Phi}(1) = \tilde{\Phi}((\lambda(u) \otimes 1)(\lambda(u) \otimes 1)^*) = \tilde{\Phi}(\lambda(u) \otimes 1) \tilde{\Phi}(\lambda(u) \otimes 1)^*.$$

よって、\$\lambda(u)\$ は \$\tilde{\Phi}\$ の multiplicative domain に属する。同様にして、\$\lambda(v)\$ も \$\tilde{\Phi}\$ の multiplicative domain に属する。\$\{\lambda(u), \lambda(v)\}\$ は \$C_r^*(F_2)\$ を生成するので

$$\tilde{\Phi}(x \otimes 1) = \pi(x \otimes 1) \quad x \in C_r^*(F_2).$$

従って、\$\tilde{\Phi}\$ は \$C_r^*(F_2) \otimes L(H)\$ から \$C_r^*(F_2) \otimes_{\max} L(H)\$ への自然な準同型となり、

$$C_r^*(F_2) \otimes L(H) = C_r^*(F_2) \otimes_{\max} L(H)$$

が成立。これは条件に反する。よって、\$\phi\$ は completely positive unital lifting をもたない。

3. Lifting 定理

Effros-Haagerup の technique [6] と Kirchberg の結果 [11] を使って、つぎの定理を得る。

定理 2. 有限次元の operator system \$E\$ から、local lifting property をもつ \$C^*\$-環 \$A\$ の商環 \$A/J \hookrightarrow\$ completely positive unital な写像 \$\phi\$ に対して、つぎの (i) (ii) は同値。

(i) \$\phi\$ が completely positive unital lifting をもつ。

(ii) \$\Phi : E \otimes C \rightarrow A \otimes_{\max} C\$

$$x \otimes y \mapsto \phi(x) \otimes y$$

が任意の injective \$C^*\$-環 \$C\$ に対して completely positive である。

証明

(ii) \$\Rightarrow\$ (i). \$E\$ が有限次元なので \$\psi = \psi^*\$ を満たす \$\phi\$ の lifting \$\psi\$ が存在する。\$\pi\$ を商写像 \$\pi : A \rightarrow A/J\$ とする。\$J\$ の quasicentral approximate unit \$(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\$ を選び、

$$\psi_\lambda(y) = (1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} \psi(y) (1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}}$$

と置く。Effros-Haagerup ([6] の Theorem 3.2) の証明から、\$\lim_\lambda \|\psi_\lambda\|_{CB} = 1\$ を示せばよい。

上の等式が成立しないと仮定する。このとき

$$\limsup_\lambda \|\psi_\lambda\|_{CB} > 1 + \varepsilon.$$

となる \$\varepsilon > 0\$ が存在する。\$\{\psi_\lambda\}\$ を subnet に置き換えることにより、すべての \$\lambda \in \Lambda\$ について、\$\|\psi_\lambda\|_{CB} > 1 + \varepsilon\$ としてよい。従って、任意の \$\lambda\$ に対して、

$$\|\psi_\lambda \otimes id_\lambda(x_\lambda)\| \geq \|\psi_\lambda\|_{CB} - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす正の整数 n_λ と $x_\lambda \in E \otimes M_{n_\lambda}$ で $\|x_\lambda\| \leq 1$ となる元が存在する。ここで M_{n_λ} は $n_\lambda \times n_\lambda$ 行列環を、 id_λ は M_{n_λ} の恒等写像を表す。 $C = \{(y_\lambda) : y_\lambda \in M_{n_\lambda}, \sup_\lambda \|y_\lambda\| < \infty\}$ とおく。 $y = (y_\lambda) \in C$ と $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $p_\lambda(y) = y_\lambda$ で定義される C から M_{n_λ} 上への準同型を p_λ で表す。

C が injective であり、仮定から $E \otimes C$ から $(A/J) \otimes^{max} C$ への completely positive unital 写像 Φ で、 $\Phi(a \otimes b) = \phi(a) \otimes b$ を満たす写像 Φ が存在する。従って、定理 A から、

$$A \otimes C = A \otimes^{max} C.$$

$\pi \otimes^{max} id_C$ を $A \otimes C$ から $(A/J) \otimes^{max} C$ への $(\pi \otimes^{max} id_C)(a \otimes b) = \pi(a) \otimes b$ を満たす completely positive unital 写像とする。このとき

$$\psi_\lambda \otimes id_\lambda(x_\lambda) = id_A \otimes p_\lambda(\psi_\lambda \otimes id_C(x)),$$

従って

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \|\psi_\lambda \otimes id_\lambda(x_\lambda)\| \leq \|\psi_\lambda \otimes id_C(x)\|.$$

一方、

$$\psi_\lambda \otimes id_C(x) = (1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} \otimes 1 (\psi \otimes id_C(x)) (1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} \otimes 1.$$

$J \otimes C$ の quasicentral approximate unit $(e_\lambda \otimes 1)_{\lambda \in \Lambda}$ は $(1 \otimes 1 - e_\lambda \otimes 1)^{\frac{1}{2}} = (1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} \otimes 1$ を満たすので、

$$\begin{aligned} \lim_\lambda \|\psi_\lambda \otimes id_C(x)\| &= \|\psi \otimes id_C(x) + J \otimes C\| \\ &= \|\psi \otimes id_C(x) + J \otimes^{max} C\| \\ &= \|\pi \otimes^{max} id_C(\psi \otimes id_C(x))\| \quad ([8] \text{ の Theorem 2 による}) \\ &= \|\Phi(x)\| \\ &\leq \|x\| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

これは矛盾。

(i) $\Rightarrow$ (ii). ψ を ϕ の completely positive unital lifting とする。商写像 $\pi : A \rightarrow A/J$ に対して、 $\pi \otimes^{max} id_C(a \otimes b) = \pi(a) \otimes b$ を満たす completely positive unital な写像 $\pi \otimes^{max} id_C : A \otimes^{max} C \rightarrow (A/J) \otimes^{max} C$ が存在する。 $A \otimes C = A \otimes^{max} C$ なので、 $\Phi(a \otimes b) = \pi \otimes^{max} id_C(\psi \otimes id_C(a \otimes b))$ で $\Phi : E \otimes C \rightarrow (A/J) \otimes^{max} C$ を定義する。 Φ が求める写像である。

任意の C^* -環 A に対して、 $C^*(F)$ から A 上への準同型が存在する自由群 F が選べることから、上の定理より、つぎの結果を得る。

系 3. 有限次元の operator system E から、 C^* -環 A の商環 A/J へ completely positive unital な ϕ に対して、

$$\begin{aligned} \Phi : E \otimes C &\rightarrow A \otimes_{max} C \\ x \otimes y &\rightarrow \phi(x) \otimes y \end{aligned}$$

が任意の injective C^* -環 C に対して completely positive なら、 ϕ が completely positive unital lifting をもつ。

4. Operator system の maximal tensor 積

補題 4. E を M_n の matrix system, $\pi : C \rightarrow L(H)$ を C^* -環 C の表現, $\phi : E \rightarrow \pi(C)'$ で、 $\Phi : E \otimes C \rightarrow L(H)$ は $\Phi(x \otimes y) = \phi(x)\pi(y)$ を満たす completely positive unital な写像とする。このとき、 ϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi} : M_n \rightarrow \pi(C)'$ が存在する。

証明

$E \otimes C \subseteq M_n \otimes C$ で $L(H)$ が injective なので、 Φ の $M_n \otimes C$ への completely positive な拡張 $\Psi : M_n \otimes C \rightarrow L(H)$ が存在する。 $y \in C$ に対して、 $\Psi(1 \otimes y) = \Phi(1 \otimes y) = \pi(y)$ なので、

$$\Psi((1 \otimes y)^*(1 \otimes y)) = \Psi(1 \otimes y)^*\Psi(1 \otimes y), \quad \Psi((1 \otimes y)(1 \otimes y)^*) = \Psi(1 \otimes y)\Psi(1 \otimes y)^*$$

従って、定理 A により、 $x \in M_n, y \in C$ に対して、

$$\pi(y)\Psi(x \otimes 1) = \Psi(1 \otimes y)\Psi(x \otimes 1) = \Psi(x \otimes y) = \Psi(x \otimes 1)\Psi(1 \otimes y) = \Psi(x \otimes 1)\pi(y).$$

従って、 $\tilde{\phi}(x) = \Psi(x \otimes 1) \in \pi(C)'$ が求める写像である。

補題 5. E を operator system, C を C^* -環とする。 $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in E \otimes C$ に対して、

$$\|z\|_{\max} = \sup\{\|\sum_i \phi(x_i)\pi(y_i)\| : \phi : E \rightarrow L(H), \pi : C \rightarrow L(H)\} \quad (*)$$

ここで $\sup$ は ϕ と π は commuting range をもつ completely positive unital と表現の pair (ϕ, π) 全体にわたる。

証明

$\phi : E \rightarrow L(H), \psi : C \rightarrow L(H)$ を commuting range をもつ completely positive unital な写像とする。 (π, K, V) を ψ の minimal Stinespring 表現、すなわち、 $\psi(y) = V^*\pi(y)V$ $y \in C$. V は isometry である。また Arveson の定理 ([13] の Theorem 10.7) から unital *-homomorphism

$$\gamma : (V^*\pi(C)V)' \rightarrow \pi(C)' \cap \{VV^*\}'$$

が存在し、 $x \in E$ に対して、

$$V\phi(x) = \gamma(\phi(x))V$$

を満たす。 $\tilde{\phi}(x) = \gamma(\phi(x))$ $x \in E$ とおく。 $\pi : C \rightarrow L(K), \tilde{\phi} : E \rightarrow L(K)$ は commuting range をもつ。また

$$\phi(x)\psi(y) = \phi(x)V^*\pi(y)V = V^*\gamma(\phi(x))\pi(y)V = V^*\tilde{\phi}(x)\pi(y)V.$$

さらに

$$\|\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i)\| \leq \|V^*\| \|\sum_i \tilde{\phi}(x_i)\pi(y_i)\| \|V\| = \|\sum_i \tilde{\phi}(x_i)\pi(y_i)\|.$$

ここで (*) の右辺を $\|z\|_{rep}$ とおくと、

$$\|z\|_{rep} \geq \|z\|_{max}$$

逆の不等式は明きらかである。

補題 6. E を M_n の matrix system, C を C^* -環で、 $E \otimes_{max} C \neq E \otimes C$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \Phi: E \otimes C &\rightarrow A \otimes_{max} C \\ x \otimes y &\rightarrow \phi(x) \otimes y \end{aligned}$$

が completely positive でない E から separable C^* -環 A への completely positive unital な写像 ϕ が存在する。

証明

もし任意の commuting range をもつ completely positive unital な $\phi: E \rightarrow L(H)$ と表現 $\pi: C \rightarrow L(H)$ に対して、 ϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi}: M_n \rightarrow \pi(C)'$ をもつとすると、

$$E \otimes_{max} C \subseteq M_n \otimes_{max} C = M_n \otimes C$$

となる。よって、commuting range をもつ ϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi}: M_n \rightarrow \pi(C)'$ をもたない completely positive unital な写像 $\phi: E \rightarrow \pi(C)'$ と表現 $\pi: C \rightarrow L(H)$ が存在する。

$\phi(E) \subseteq A$ となる $\pi(C)'$ の separable な C^* -部分環 A を選ぶ。ここで

$$\begin{aligned} \Phi: E \otimes C &\rightarrow A \otimes_{max} C \\ x \otimes y &\rightarrow \phi(x) \otimes y \end{aligned}$$

が completely positive とする。

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: E \otimes C &\rightarrow A \otimes_{max} C \rightarrow A \otimes_{max} \pi(C) \rightarrow L(H) \\ x \otimes y &\rightarrow \phi(x) \otimes y \rightarrow \phi(x) \otimes \pi(y) \rightarrow \phi(x)\pi(y) \end{aligned}$$

は completely positive である。

補題 4 によつて ϕ の completely positive な拡張 $\tilde{\phi}: M_n \rightarrow \pi(C)'$ が存在し、 ϕ の性質に反する。

系 7. matrix system E , C^* -環 C に対して、次は同値。

(i) $E \otimes_{max} C = E \otimes C$,

(ii) 任意の C^* -環 A への completely positive unital 写像 ϕ に対して

$$\begin{aligned} \Phi: E \otimes C &\rightarrow A \otimes_{max} C \\ x \otimes y &\rightarrow \phi(x) \otimes y \end{aligned}$$

は completely positive である。

補題 8. B と C を $B \otimes_{\max} C \neq B \otimes C$ を満たす C^* -環とする。このとき E を含む任意の B の C^* -部分環 A への埋め込み ϕ に対して

$$\begin{aligned}\Phi: E \otimes C &\rightarrow A \otimes_{\max} C \\ x \otimes y &\rightarrow \phi(x) \otimes y\end{aligned}$$

は completely positive でない B の有限次元 operator system E が存在する。

証明

$$\|z\|_{\max, B} > \|z\|_{\min}$$

を満たす $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ $x_i \in B$, $y_i \in C$ が存在する。ただし、 $\|z\|_{\max, B}$ は $B \otimes_{\max} C$ における z のノルムを、 $\|z\|_{\min}$ は z の $B \otimes C$ における z のノルムを表す。

E を $\{1, x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*\}$ の線形結合とする。もし Φ が completely positive とする。 $\|z\|_{\max, A}$ を $A \otimes_{\max} C$ の z のノルムとすると、

$$\|z\|_{\min} \geq \|\Phi(z)\| = \|z\|_{\max, A} \geq \|z\|_{\max, B}$$

これは、はじめのノルムの不等式に反する。

補題 9. C を non-nuclear C^* -環 とする。このとき

$$E \otimes_{\max} C \neq E \otimes C$$

を満たす matrix system E が存在する。

証明

C が non-nuclear なので $\pi(C)''$ が injective でない表現 π が存在する。Choi-Effros ([4] の Theorem 3.4) より、行列環 M_n の matrix system E で、completely positive unital な $\phi: E \rightarrow \pi(C)'$ で $\pi(C)'$ に値をもつ M_n への completely positive な拡張を持たない写像 ϕ が存在する。いま $E \otimes_{\max} C = E \otimes C$ とする。

$$\begin{aligned}\Phi: E \otimes C &\rightarrow \pi(C)' \otimes_{\max} C \rightarrow L(H) \\ x \otimes y &\rightarrow \phi(x) \otimes y \rightarrow \phi(x)\pi(y)\end{aligned}$$

は completely positive である。補題 4 より ϕ は $\pi(C)'$ に値をもつ M_n への completely positive な拡張をもつことになり ϕ の性質に反する。よって系 7 より求める結果が得られる。

$M = \{(x_n) : x_n \in M_n \text{ } \sup_n \|x_n\| < \infty\}$, $K(H)$ を Hilbert 空間 H 上のコンパクト作用素全体とする。Junge-Pisier の結果 [10] により、 $L(H) \otimes L(H) \neq L(H) \otimes_{\max} L(H)$, $M \otimes M \neq M \otimes_{\max} M$, Wassermann の結果 [16] により、 $(L(H)/K(H)) \otimes L(H) \neq (L(H)/K(H)) \otimes_{\max} L(H)$, $C_r^*(F_2) \otimes L(H) \neq C_r^*(F_2) \otimes_{\max} L(H)$. また $M, L(H)$ は injective である。separable な C^* -環 A に対して、可算個の生成元をもつ自由群 F_∞ の C^* -群環 $C^*(F_\infty)$ から A 上の準同型が存在する。よって、定理 2、補題 6, 8, 9 から、例 1 以外に有限次元の operator system E を定義域とする completely positive unital map $\phi: E \rightarrow C^*(F_\infty)/J$ で completely positive unital な lifting をもたない写像の例が作れる。

参考文献

- [1] W. Arveson, *Notes on extensions of C^* -algebras*, Duke Math. J., **44** (1977), 329–355.
- [2] M.-D. Choi *A Schwarz inequality for positive linear maps on C^* -algebras*, Ill. J. Math., **18** (1974), 565–574.
- [3] M.-D. Choi and E.G. Effros *The completely positive lifting problem for C^* -algebras*, Ann. of Math., **104** (1976), 585–609.
- [4] —————, *Injectivity and operator spaces*, J. Funct. Anal., **24**, (1977), 156–209.
- [5] —————, *Nuclear C^* -algebras and injectivity: the general case*, Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 443–446
- [6] E.G. Effros and U. Haagerup *Lifting problems and local reflexivity for C^* -algebras*, Duke Math. J., **52** (1985), 103–128.
- [7] E.G. Effros and E.C. Lance, *Tensor products of operator algebras*, Adv. in Math., **25** (1977), 1–34.
- [8] A. Guichardet, *Tensor products of C^* -algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **160** (1965), 986–989.
- [9] U. Haagerup, *Injectivity and decomposition of completely bounded maps*, Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, (Lecture Notes in Mathematics **1132**(1985), 170–222.
- [10] M. Junge and G. Pisier, *Bilinear forms on exact operator spaces and $L(H) \otimes L(H)$* , Geom. Funct. Anal., **5**(1995), 329–363.
- [11] E. Kirchberg, *On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^* -algebras*, Invent. Math., **112** (1993), 449–489.
- [12] C. Lance, *On nuclear C^* -algebras*, J. Funct. Anal., **12** (1973), 157–176.
- [13] V.I. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes in Math., No 146 (Longman Sci. and Tech., 1986).
- [14] A.G. Robertson and R.R. Smith, *Liftings and extensions of maps on C^* -algebras*, J. Operator Theory, **21** (1989), 117–131.
- [15] S. Wassermann, *On tensor products of certain group C^* -algebras*, J. Funct. Anal., **23** (1976), 239–254.

- [16] ———, *A pathology in the ideal space of $L(H) \otimes L(H)$* , Indiana Univ. Math. J., **27** (1978), 1011–1020