

6

非線形方程式の解の大域的構造と不規則性の出現

京大 エ 上田 皖亮

時間的に移り変わる物理系の状態を説明するには、系に実在する微小な雑音などを無視して確定的な方程式を導き、定常状態を表わす解を求め、解の安定性を議論する手順が広く一般に行なわれている。問題とする方程式が単独の漸近安定な解をもつ場合は、現象は確定的となる。しかし無数の不安定な解の集合が漸近安定性をもつ場合は、系の状態を表わす動作点は微小な雑音などの影響により解の集合内を彷徨することになり、系にはいわゆる不規則遷移現象が生じる。物理系を記述する多くの方程式においては、方程式中のパラメータ値によって前者あるいは後者の解構造があらわれる。方程式が後者のような解の構造をもちうるのは非線形性に基づくものであり、このような状況下では雑音などの不確定な要素がいかにも小さくても必然的に不規則性が出現する。しかし物理系に観測される不規則過程の確率統計的性質は雑音などの性

値よりはむしろ解の大域的構造に依存するものと思われ、従ってこの種の不規則現象の説明にランダムパラメータを考慮して微分方程式を導く必要はないものと考えられる。

筆者らは永年、非線形電気・電子回路を記述する常微分方程式を対象として不規則遷移現象の研究を行なってきた[1, 2, 3, 4, 5]。これらの非線形方程式を解析的に解くことはほとんど不可能と考えられるため、我々は一連の研究において計算機を用いた。不規則現象に関連する計算機実験では、時間および空間における大域的な解の振舞を調べなければならない。従って計算機解の精度が問題となるが、これらに対してはアナログ計算機およびデジタル計算機による解が定量的ないしは定性的に一致あることの確認を行なうことに留めた。特にアナログ計算機は物理系とみなすことが出来、雑音などが極く自然な形で内在するため不規則過程の研究には極めて好都合である。デジタル計算機のみに頼る場合はこれらの点に注意を払う必要がある。

以下に我々が行なった研究報告の要旨を抜粋する。

(1) 不規則遷移過程は非線形方程式の解の大域的構造に基づいて生じる一般的な非線形現象であり、非線形系における最も広い意味での定常状態といえるだろう。

(2) 不規則遷移過程は漸近安定性をもつ解の集合で表わさ

れ、系の状態を表わす動作点 $\dot{x}$ は雑音の影響により解集合内を彷徨する。解構造の概要は明らかにし得たと考へるが、微細構造については明らかでない点が多い。非線形方程式の解の大域的な議論は殆ど行なわれていない現状では、我々が得た諸結果はこれらの研究を助長するであらう。

(3) 不規則遷移過程の確率統計的性質は、系に作用する雑音の性質には殆ど依存せず、解集合の大域構造によって特徴づけられる。これは計算機実験を行なう過程において直観的に認識した事実であって、種々の性質をもつ雑音を加えて実験を行なった結論ではない。従つてこの項は“仮説”とみなしていただくのが適當であらう。

(4) パラメータの変化による不規則遷移過程の分岐現象は次の二つが代表的と考へられる。

- i) 周期解のくまど型分岐により周期振動が不規則遷移過程へ移行する。この変化は可逆的である。
- ii) 不規則遷移過程を表わす解集合が漸近安定性を失ない、不規則過程が瞬時に消滅したり、爆発的に成長したりする。この変化は一般に非可逆的である。

以上、非線形電気・電子回路に関連した常微分方程式を対象として研究した、不規則遷移現象を紹介した。これらの諸結果が Navier-Stokes 方程式の解の大域的構造と乱流

の発生機構および性質の解明に、有益な示唆となりうることを期待して本報告を終える。

参考文献

- (1) Y. Ueda : Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation, J. Statistical Physics, Vol.20, No.2, 181, 1979.
- (2) 上田：非線形性に基づく確率統計現象 — Duffing 方程式で表わされる系の場合 — 電気学会論文誌, 98巻 3A号 167, 昭 53-3.
- (3) 上田, 他：非線形常微分方程式の計算機シミュレーションと非周期振動, 電子通信学会論文誌, 56-A巻, 4号, 218, 1973. English Translation, Electronics & Communications in Japan, Scripta Electronica Japonica II, scripta publ. co.,
- (4) 上田, 道本：非線形系の大域的構造にもとづく不規則遷移振動, 電子通信学会技術研究報告, 非線形問題研究会資料, NLP 78-4, 1978年4月.
- (5) 上田, 道本, 末友：非線形係数励振系における不規則遷移現象 — 非線形復元項をもつ Mathieu 方程式の場合 — 同上 NLP 78-24, 1978年11月.