

正則関数の空間上の Fredholm 作用素について

東京医科大学 羽鳥 理 (Osamu Hatori)

序。H. J. Schwartz [4] は単位円板 Δ 上の Hardy 空間 H^2 上の合成作用素 C_φ が可逆であることと、 φ が Δ 上の conformal automorphism であることが同値であることを示した。J. A. Cima, J. E. Thomson and W. R. Wogen [2] は、 H^2 上の Fredholm 合成作用素は可逆なものに限ることを示した。よって H^2 上の合成作用素 C_φ について、Fredholm 作用素であることと、可逆であることと conformal automorphism であることは皆同値である。さらに、P. S. Bourdon [1] は同様の結果が Δ 上の H^p 、円板環、Bergman 空間等についても成立すると述べている。ここでは、もっと一般的な空間について 3 条件の関係について調べてみたい。

1. D を解析多様体で A は $H(D)$ ($: D$ 上の正則関数全体) の部分空間とする。正則写像 $\varphi: D \rightarrow D$ はすべての $f \in A$ に対して $f \circ \varphi \in A$ となるものとする。このとき

$$C_\varphi: A \rightarrow A$$

を $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ により定義し A 上の合成作用素と呼ぶ。 A が Banach 空間で C_φ が有界のとき、 $\dim \ker C_\varphi < \infty$, $\dim A/C_\varphi(A) < \infty$ であるとき C_φ は Fredholm であるという (以後、(F) と略す)。一般に、(F)、可逆であること (以後、(I) と略す) と、 φ が D から D への双正則写像であること (以後、(A) と略す) の間の関係は次のようである。

i) (I) $\Rightarrow$ (F)、ii) (F) $\not\Rightarrow$ (I)、iii) (I) $\not\Rightarrow$ (A)、iv) (A) $\not\Rightarrow$ (F)

よって、(F) と (A) や (I) と (A) はそれぞれ必要条件でも十分条件でもない。

例 1. $\Delta = \{z \in C : |z| < 1\}$ 、 $\varphi(z) = \frac{z+1}{z+2}$ とする。 Δ 上の点列 $\{z_n\}$ を $z_0 = 0$, $z_{n+1} = \varphi(z_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) により定義する。すると、 $\{z_n\}$ は Blaschke の条件 $\sum (1 - |z_n|) < \infty$ を満たしている。次に、

$$A = \{f \in H^\infty(\Delta) : f(z_n) = 0, n = 1, 2, \dots\}$$

と定めると A は一様ノルムに関する Banach 空間である。ここで、 $H^\infty(\Delta)$ は Δ 上の有界正則関数全体よりなる Hardy 環である。すると C_φ は A 上の合成作用素であって $\dim A/C_\varphi(A) = 1$ である。よって C_φ は Fredholm であって可逆でない。

例 2. Δ 、 φ は例 1 と同じで $\bar{\Delta} = \{z \in C : |z| \leq 1\}$ とする。 Δ の境界 $\partial\Delta$ 上の点列 $\{z_0^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ は、 m, n, k_1, k_2 にたいして $\varphi^m(z_0^{(k_1)}) \neq \varphi^n(z_0^{(k_2)})$ を満たしているものとする。ただし、 φ^m は φ の m 回の合成 $\varphi \circ \dots \circ \varphi$ を表す。各 k にたいして $z_n^{(k)} = \varphi^n(z_0^{(k)})$ と定める。 $\bar{\Delta}$ 上の円板環 ($\bar{\Delta}$ 上解析的多項式で一様近似できる連続関数全体) を $P(\bar{\Delta})$ で表す。

$$A = \{f \in P(\bar{\Delta}) : f(z_n^{(k)}) = 0, n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots\} | \Delta$$

と定める。このとき、 C_φ は A 上の合成作用素であって $\dim A/C_\varphi(A) = \infty$ である。よってこれは φ が Δ 上の双正則写像であるが C_φ は Fredholm とならないような例を与えている。

例 3. $\varphi, \{z_n\}$ は例 1 と同じものとする。 $D = \Delta \setminus \{z_n\}$ とする。 $A = H^p|D$ とする。ただし、 H^p は Δ 上の Hardy 空間である。すると、 $\psi = \varphi^{-1}|D$ に対して C_ψ は A 上の可逆な合成作用素であるが $\psi(D) = D \setminus \{0\}$ である。つまり ψ は D 上の双正則写像ではない。

例 4. $D = \{z \in \Delta : \operatorname{Re} z > 0\}$ とし φ は例 1 と同じとする。 $A = H^p|_D$ とする。このとき、 C_φ は可逆であるが φ は D 上の双正則写像ではない。

例 3、例 4 は一見特殊な例にも見えるが、次の定理 1 の (a)、(b) の特別な場合になっている。以下では、Banach 空間とは限らない正則関数の空間を扱う。さらに、 (F') で条件 $\dim A/A \circ \varphi < \infty$ を表す。 A が Banach 空間のときは $(F) \rightarrow (F')$ である。

定理 1. Ω は n 次元解析多様体で D はその相対コンパクトな領域で次を満たすものとする：
 D の Ω における境界 ∂D の各点 z と z の Ω の開近傍 V にたいして $V' \subset V$ で $V' \cap D$ が連結であるような z の開近傍 V' が存在する。 A は $H(D)$: D 上の正則関数全体の部分空間で次の 2 条件 1)、2) を満たすものとする。

1) A の n 個の直積 $A^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i \in A\}$ の中の列 $\{F^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ で各 $F^{(i)}$ は Ω まで正則に拡張できて、 $\{F^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ から作った任意の一次結合 $\sum a_i f^{(i)}$ に対して D の開集合 U が存在して、 $\sum a_i F^{(i)}$ はその上で単葉となる。

2) D の任意の有限集合 K に対して

$$\dim A|_K = K \text{ の要素の個数}$$

が成立する。

φ は D から D への正則写像で $A \circ \varphi \subset A$ 、 $\dim A/A \circ \varphi < \infty$ を満たすとする。すると、 φ は単葉になる。さらに、次の (a) または (b) が成立する。

(a) D の thin set E (空集合にもなりうる) が存在して、 φ は D から $D \setminus E$ の上への双正則写像である。

(b) ∂D の点 z_0 と z_0 の (Ω での) 開近傍 V_{z_0} と正則関数 $\tilde{\varphi} : D \cup V_{z_0} \rightarrow D$ で $\tilde{\varphi}|_D = \varphi$ なるものが存在する。

注) $\Omega = C^n$ 、 A が各座標関数 $z_1, \dots, z_n$ の多項式を含んでいるときは、 $F^{(i)} = (z_1^i, \dots, z_n^i)$ と考えれば 1) は満たされ、また、2) も成立する。(ちなみに、定理 1 において A が定数関数を含んでいる場合は A が D の点を分離することと要素が 2 つの K について 2) の等式が成立することは同値である。よって、例 3、例 4 の A は定理 1 の条件を満たしている。

略証: まず、2) などより φ が D 上単葉であることがわかる。そこで、(a) または (b) が成立することを示す。まず、 $\dim A/A \circ \varphi < \infty$ より $\dim A^n/A^n \circ \varphi = l < \infty$ となるので $u = (u_1, \dots, u_n) \in A^n$ と $(a_1, \dots, a_{l+1}) \in C^{(l+1)}$ で

$$\sum_{i=1}^{l+1} a_i F^{(i)} = u \circ \varphi$$

となるものが存在する。 $f = \sum a_i F^{(i)}$ とおく。つまり $f = u \circ \varphi$ である。

$M = \{z \in D : z \text{ の } D \text{ 内の開近傍 } U_z \text{ と } C^n \text{ の領域 } \Phi \text{ と}$

Φ から U_z への双正則写像 ζ が存在して

$$\det \left(\frac{\partial u_i \circ \zeta}{\partial w_j} \right) \circ \zeta^{-1}(z) = 0\}$$

とおく。ただし、 $\det \left(\frac{\partial u_i \circ \zeta}{\partial w_j} \right)$ は Φ の座標系 $(w_1, \dots, w_n)$ に関する $(u_1 \circ \zeta, \dots, u_n \circ \zeta)$ の complex Jacobian である。すると、 M は $(\Phi, \zeta$ の選び方によらず) well-defined である。

1) より f は D のある開部分集合上単葉なので $M = D$ とはなりえず、よって M は D の thin set (空集合の場合も含めて) である。つぎの 2 つの場合を考察する。

a) $\partial(D \setminus \varphi(D)) \subset M$ (ここでは、 ∂ は $D \setminus \varphi(D)$ の D における境界を意味する。)

b) $\partial(D \setminus \varphi(D)) \not\subset M$.

a) の場合が (a) に対応し、b) が (b) に対応する。まず a) の場合は $D \setminus M$ が連結であることから $D \setminus \partial(D \setminus \varphi(D))$ も連結となりこのことから $D \setminus \varphi(D) = \partial(D \setminus \varphi(D))$ となつ

てよって $D \setminus \varphi(D) \subset M$ である。そこで $E = D \setminus \varphi(D)$ とおけば E は thin set で φ は D から $D \setminus E$ への双正則写像となる。次に、b) の場合を考える。この場合は $w_0 \in \partial(D \setminus \varphi(D))$ と w_0 の D 内での開近傍 U_{w_0} で $u|_{U_{w_0}}$ が U_{w_0} より $u(U_{w_0})$ への双正則写像となるようなものが存在する。 $\{w_n\}$ を $\varphi(D) \cap U_{w_0}$ の点列で $w_n \rightarrow w_0$ なるものとする。 φ が単葉なので $z_n = \varphi^{-1}(w_n)$ が well-defined で $z_n \rightarrow z_0$ なる $z_0 \in \partial D$ が存在すると仮定して一般性を失わない。条件 1) より f は Ω 上の正則写像 $\tilde{f}$ に拡張される。すると $\tilde{f}(z_n) = u \circ \varphi(z_n) = u(w_n)$ より $\tilde{f}(z_0) = u(w_0)$ となる。 $V = \tilde{f}^{-1}(u(U_{w_0}))$ とおくと、 u が U_{w_0} で単葉なので $u(U_{w_0})$ が開集合となる。よって V は z_0 の開近傍となる。 D に関する条件より z_0 の開近傍 V_{z_0} で $V_{z_0} \subset V$ 、 $V_{z_0} \cap D$ は連結なるものが存在する。そこで $\varphi_0 : V_{z_0} \rightarrow D$ を $\varphi_0(z) = (u|_{U_{w_0}})^{-1} \circ \tilde{f}(z)$ により定めると φ_0 は正則で $V_{z_0} \cap D$ が連結なので $\varphi_0|_{V_{z_0} \cap D} = \varphi|_{V_{z_0} \cap D}$ となる。そこで

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(z), & z \in D \\ \varphi_0(z), & z \in V_{z_0} \end{cases}$$

とおけば $\tilde{\varphi}$ は $V_{z_0} \cup D$ で well-defined な正則関数で $\tilde{\varphi} = \varphi$ となる。

定理 1 より Schwartz[4]、Cima-Thomson-Wogen[2] と同様な結果が広い範囲の空間に対して成立することが分かる。

系 1. D は compact bordered Riemann 面または polydisc または C^2 級の強擬凸領域とする。 D 上の正則関数からなる Banach 空間 A が $A \supset H(D) \cap C(\bar{D})$ を満たし、 D から D への任意の双正則写像 ψ について $A \circ \psi \subset A$ であるとする。ただし、 $C(\bar{D})$ は D の閉包 (compact bordered Riemann 面のときは $D \cup (D \text{ の borders })$) 上の複素値連続関数全体である。 φ が D から D への正則写像で $A \circ \varphi \subset A$ とするとき、 (F') 、 (F) 、 (I) 、 (A) は互いに同値である。

略証: まず $(I) \implies (F)$ 、 $(F) \implies (F')$ は自明である。次に、 $(F') \implies (A)$ を示す。 A は

定理 1 の条件を満たすことが分かりそのことより (a) または (b) が成立する。一方 $A \subset H(D) \cap C(\bar{D})$ なので各 $z \in \partial D$ に対して $\dim A/B_z = \infty$ となる。ここで $B_z = \{f \in A : f \text{ は } z \text{ で正則}\}$ である。このことから実は (b) は起こり得ないことが分かる。さらに、この系の D においては D と $D \setminus E$ が双正則同値となる thin set E は空集合に限ることが分かる。つまり (A) が成立する。最後に (A) $\implies$ (I) は A が D 上の双正則写像に関して不変であることから分かる

系 1 の条件を満たす A は例えば H^p ($0 < p \leq \infty$)、Bergman 空間、Bloch 空間等たくさんある。

REFERENCES

1. P. S. Bourdon, *Fredholm multiplication and composition operators on the Hardy space*, Integral Eq. and Operator th. **13** (1990), 607–610.
2. J. A. Cima, J. E. Thomson and W. R. Wogen, *On some properties of composition operators*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 215–220.
3. O. Hatori, *Fredholm composition operators on a space of holomorphic functions*, preprint.
4. H. J. Schwartz, *Composition operators on H^p* , Thesis, University of Toledo, 1969.