

水平加振力による多層構造地盤の震動特性について

島 通 保

CHARACTERISTICS OF VIBRATIONS PRODUCED BY A HORIZONTAL POINT FORCE IN A MULTI- LAYERED ELASTIC GROUND

By *Michiyasu SHIMA*

Synopsis

Integral expressions for the displacement fields produced by a horizontal point force on the surface are derived by using a technique applied first by N.A. Haskell to seismological problem, when an elastic isotropic solid half space is composed of homogeneous layers with parallel boundaries. The integrals for the fields near the source are exactly calculated by digital computer for the branch line integral and the residues and for the integral along the real axis.

The numerical results are compared with spectra in the case where an infinite train of harmonic plane SH waves is vertically transmitted to the surface layers.

1. 序

地表において観測される地震動の特性が、地盤の動特性によって強く影響されることは、これまで多くの人々によって指摘されてきた。とくに地表近くの地盤の構造およびその力学的常数と地盤の動特性との関係は、入力波を平面波とした場合について詳細に研究されている。しかし一般に基盤への入力波形が不明であるため、上記のような観測波形のみでは、地盤の影響を抽出することは困難である。

入力波形の特性のはっきりしているものとしては、不平衡重錘型加振機のようなものによって、人工的に発生された震動波が考えられる。ところでこのような発生機構を地中深く設置することは困難であるが、弾性波動論における相反性の定理によると、震源と受震点の位置を逆にした場合、同一の起振力に対して元と同じ震動の得られることが明らかにされているから、地表での地盤の震動特性を求めるためにも、地表で加振して地中で受震し、その震動記録をとればよい¹⁾。しかし、このような加振機による入力波は、自然地震におけるような平面波ではなく、点状震源からの球面波として取扱わねばならないから、震源あるいは受震点の位置によって、その震動特性もかなり違ってくるはずである。したがってこのような方法によって自然地震時における地盤の震動特性を推定するためには、地表に震源を置いた場合の受震点の位置による震動特性の変化を調べ、これと下方からの平面波の入射による地表の震動特性との関係を求めておくことが必要である。このような観点から、先に、いくつかの平行層からなる完全弾性体とした場合の地盤の震動特性を、震源を SH 型のトルクとした場合について求めたが²⁾、今回は、同様の媒質に対して、表面の点に周期的な水平力を働かせた場合の地中の各点での震動の周波数特性の変化を調べた。

多層構造における弾性波動の問題は、以前から、主に表面波の伝播・分散現象を調べるため、多くの人々によって研究されているが、これらは表面波の完全な形成および卓越が震源から遠い所であること、震源近傍での数値計算の容易でないこと等のため、震源から隔った点では色々調べられているが、そのごく近くではまだほとんど明らかにされていないようである^{3), 4)}。ただ最近、leaking mode の研究のため、比較的近

い点でも求められているが、平面波の鉛直下方から入射による重複反射に近いような、震源の鉛直下方の点の震動は明らかにされていない⁶⁾。今回も、地表および地中の各点の変位に対する積分表示の形式解を導く手続きは、Haskell に従うマトリックス定式化による⁶⁾。これらの積分表示は複素平面上の複素積分に変換した場合、震源に近い点の変位であるため、極からの寄与の他に分岐点からの切目にそった積分の寄与も大きくなる。

記 号

$\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j$: j 番目の層の変位の r, θ, z 成分 (円筒座標系)

ω : 角振動数

ρ_j : 密度

α_j, β_j : P 波および S 波の伝播速度

$k_{\alpha j}, k_{\beta j}$: 角波数 ($\omega/\alpha_j, \omega/\beta_j$)

$\gamma_{\alpha j}, \gamma_{\beta j}$: $\sqrt{(k_{\alpha j}^2 - k^2)}, \sqrt{(k_{\beta j}^2 - k^2)}$

μ_j : 剛性率

d_j : 層の厚さ

δ_j : $2(\beta_j/C)^2$

c : ω/k

2. 波動方程式とマトリックスによる定式化

Fig. 1 に示されているような、いくつかの平行層からなる半無限弾性体中にある、調和振動的な震源に

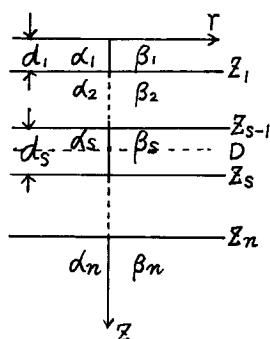


Fig. 1 Structure of elastic half space.

よって発生した波動の、各層中の変位の空間部分は、次のようにポテンシャル $\bar{\varphi}_j, \bar{\psi}_j, \bar{\chi}_j$ によって表わされ、

$$\begin{aligned}\bar{q}_j(r, \theta, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\psi}_j}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial \theta} \\ \bar{v}_j(r, \theta, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial r} \dots\dots\dots (1) \\ \bar{w}_j(r, \theta, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{\psi}_j}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

$\bar{\varphi}_j, \bar{\psi}_j, \bar{\chi}_j$ は波動方程式を満足する。すなわち、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{\varphi}_j &= -k_{\alpha j}^2 \bar{\varphi}_j \\ \nabla^2 \bar{\psi}_j &= -k_{\beta j}^2 \bar{\psi}_j \dots\dots\dots (2) \\ \nabla^2 \bar{\chi}_j &= -k_{\beta j}^2 \bar{\chi}_j\end{aligned}$$

また応力 $\bar{P}_{zzj}$, $\bar{P}_{\theta zj}$, $\bar{P}_{rzj}$ は

$$\begin{aligned}\bar{P}_{zzj}(r, \theta, z) &= 2\mu_j \left[\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_j}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \bar{\psi}_j}{\partial z^3} + k_{\beta j}^2 \frac{\partial \bar{\psi}_j}{\partial z} - \lambda_j k_{\alpha j}^2 \bar{\varphi}_j \right] \\ \bar{P}_{\theta zj}(r, \theta, z) &= \mu_j \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_j}{\partial z \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_j}{\partial z^2 \partial \theta} + \frac{k_{\beta j}^2}{r} \frac{\partial \bar{\psi}_j}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \bar{\chi}_j}{\partial r \partial z} \right] \dots\dots\dots (3) \\ \bar{P}_{rzj}(r, \theta, z) &= \mu_j \left[2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_j}{\partial z \partial r} + 2 \frac{\partial^3 \bar{\psi}_j}{\partial z^2 \partial r} + k_{\beta j}^2 \frac{\partial \bar{\psi}_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{\chi}_j}{\partial z \partial \theta} \right]\end{aligned}$$

である。

ここで、 $\bar{\varphi}_j(r, \theta, z)$, $\bar{\psi}_j(r, \theta, z)$, $\bar{\chi}_j(r, \theta, z)$ が次のように積分表示されるものとする、

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \varphi_j(z) J_l(rk) \cos l\theta dk \\ \bar{\psi}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \psi_j(z) J_l(rk) \cos l\theta dk \dots\dots\dots (4) \\ \bar{\chi}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \chi_j(z) J_l(rk) \sin l\theta dk\end{aligned}$$

変位、応力も同様に積分表示される。

$$\begin{aligned}\bar{q}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{k} \frac{\dot{u}_{Rj}}{c} \frac{dJ_l(rk)}{d(rk)} - \frac{il}{k} \frac{v_{Lj}}{c} \frac{J_l(rk)}{rk} \right\} \cos l\theta dk \\ \bar{v}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{l}{k} \frac{\dot{u}_{Rj}}{c} \frac{J_l(rk)}{rk} + \frac{i}{k} \frac{v_{Lj}}{c} \frac{dJ_l(rk)}{d(rk)} \right\} \sin l\theta dk \dots\dots\dots (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{i}{k} \frac{\dot{w}_{Rj}}{c} J_l(rk) \right\} \cos l\theta dk \\ \bar{P}_{zzj}(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \sigma_{Rj} J_l(rk) \cos l\theta dk \\ \bar{P}_{\theta zj}(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ -i\tau_{Rj} l \frac{J_l(rk)}{rk} - \tau_{Lj} \frac{dJ_l(rk)}{d(rk)} \right\} \sin l\theta dk \dots\dots\dots (5) \\ \bar{P}_{rzj}(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ i\tau_{Rj} \frac{dJ_l(rk)}{d(rk)} + \tau_{Lj} l \frac{J_l(rk)}{rk} \right\} \cos l\theta dk\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}_{Rj}}{c} &\equiv k^2 \left\{ \varphi_j(z) + \frac{d\psi_j(z)}{dz} \right\} \\ \frac{\dot{w}_{Rj}}{c} &\equiv -\frac{k}{i} \left\{ \frac{d\varphi_j(z)}{dz} + \frac{d^2\psi_j(z)}{dz^2} + k_{\beta j}^2 \psi_j(z) \right\} \\ \frac{\dot{v}_{Lj}}{c} &\equiv -\frac{k^2}{i} \chi_j(z) \dots\dots\dots (6) \\ \sigma_{Rj} &\equiv 2\mu_j \left\{ \frac{d^2\varphi_j(z)}{dz^2} + \frac{d^3\psi_j(z)}{dz^3} + k_{\beta j}^2 \frac{d\psi_j(z)}{dz} \right\} - \lambda_j k_{\alpha j}^2 \varphi_j(z) \\ \tau_{Rj} &\equiv -ik\mu_j \left\{ 2 \frac{d\psi_j(z)}{dz} + 2 \frac{d\varphi_j(z)}{dz^2} + k_{\beta j}^2 \psi_j(z) \right\} \\ \tau_{Lj} &\equiv k\mu_j \frac{d\chi_j(z)}{dz}\end{aligned}$$

なお、 $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $\chi_j(z)$ は次の方程式を満足する。

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi_j(z)}{dz^2} &= (k^2 - k_{\alpha j}^2) \varphi_j(z) \\ \frac{d^2\psi_j(z)}{dz^2} &= (k^2 - k_{\beta j}^2) \psi_j(z) \dots\dots\dots (7) \\ \frac{d^2\chi_j(z)}{dz^2} &= (k^2 - k_{\beta j}^2) \chi_j(z)\end{aligned}$$

(6) 式で定義された変位, 応力は今後次のようにマトリックスの形で表わすことにする。

$$\begin{pmatrix} U_{Rj}(z_j) \\ V_{Lj}(z_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{u}_{Rj}(z_j)}{c} \\ \frac{w_{Rj}(z_j)}{c} \\ \sigma_{Rj}(z_j) \\ \tau_{Rj}(z_j) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_{Lj}(z_j) \\ \tau_{Lj}(z_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_{Lj}(z_j)}{c} \\ \tau_{Lj}(z_j) \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(8)$$

層の境界における変位および応力の連続の条件から, 被積分項の $[U_{Rj}(z_j)]$, $[V_{Lj}(z_j)]$ に対しては,

$$\begin{aligned} [U_{Rj}(z_{j-1})] &= [U_{Rj-1}(z_{j-1})] \\ [V_{Lj}(z_{j-1})] &= [V_{Lj-1}(z_{j-1})] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(9)$$

の関係が成立する。

震源を含まない層においては, ポテンシャル φ_j , ψ_j , χ_j は (7) 式の一般解として

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \frac{D'_j}{k^2} e^{-i\gamma_{\alpha j}(z-z_{j-1})} + \frac{D''_j}{k^2} e^{i\gamma_{\alpha j}(z-z_{j-1})} \\ \psi_j(z) &= \frac{\omega'_j}{ik^3} e^{-i\gamma_{\beta j}(z-z_{j-1})} + \frac{\omega''_j}{ik^3} e^{i\gamma_{\beta j}(z-z_{j-1})} \\ \chi_j(z) &= \frac{\epsilon'_j}{k} e^{-i\gamma_{\beta j}(z-z_{j-1})} + \frac{\epsilon''_j}{k} e^{i\gamma_{\beta j}(z-z_{j-1})} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

のように表わせ, また $[U_{Rj}]$, $[V_{Lj}]$ は

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_{Rj}}{c} &= -\left(\frac{\alpha_j}{c}\right)^2 \{ (D'_j + D''_j) \cos \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) - i(D'_j - D''_j) \sin \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) \\ &\quad - \delta_j \gamma_{\beta j} \{ (\omega'_j - \omega''_j) \cos \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) - i(\omega'_j + \omega''_j) \sin \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) \} / k \\ \frac{\dot{w}_{Rj}}{c} &= -\left(\frac{\alpha_j}{c}\right)^2 \tau_{\alpha j} \{ -i(D'_j + D''_j) \sin \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) + (D'_j - D''_j) \cos \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) \} / k \\ &\quad + \delta_j \{ -i(\omega'_j - \omega''_j) \sin \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) + (\omega'_j + \omega''_j) \cos \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) \} \\ \sigma_{Rj} &= -\rho_j \alpha_j^2 (\delta_j - 1) \{ (D'_j + D''_j) \cos \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) - i(D'_j - D''_j) \sin \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) \} \\ &\quad - \rho_j c^2 \delta_j^2 \gamma_{\beta j} \{ (\omega'_j - \omega''_j) \cos \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) - i(\omega'_j + \omega''_j) \sin \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) \} / k \\ \tau_{Rj} &= \rho_j \alpha_j^2 \delta_j \gamma_{\alpha j} \{ -i(D'_j + D''_j) \sin \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) + (D'_j - D''_j) \cos \tau_{\alpha j}(z-z_{j-1}) \} / k \\ &\quad - \rho_j c^2 \delta_j (\delta_j - 1) \{ -i(\omega'_j - \omega''_j) \sin \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) + (\omega'_j + \omega''_j) \cos \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) \} \\ \frac{\dot{v}_j}{c} &= (\epsilon'_j + \epsilon''_j) i k \cos \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) + (\epsilon'_j - \epsilon''_j) k \sin \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) \\ \tau_j &= -(\epsilon'_j + \epsilon''_j) \mu_j \gamma_{\beta j} \sin \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) - i(\epsilon'_j - \epsilon''_j) \mu_j \gamma_{\beta j} \cos \tau_{\beta j}(z-z_{j-1}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

j 番目の層に対して, (11) 式を $z=z_{j-1}$ で計算すると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D'_j + D''_j \\ D'_j - D''_j \\ \omega'_j - \omega''_j \\ \omega'_j + \omega''_j \end{pmatrix} &= [E_{Rj}^{-1}] [U_{Rj}(z_{j-1})] \\ [E_{Rj}^{-1}] &\equiv \begin{pmatrix} -2(\beta_j/\alpha_j)^2 & 0 & (\rho_j \alpha_j^2)^{-1} & 0 \\ 0 & c^2 k (\delta_j - 1) / (\alpha_j^2 \gamma_{\alpha j}) & 0 & k(\rho_j \alpha_j^2 \gamma_{\alpha j})^{-1} \\ k(\delta_j - 1) / (\delta_j \gamma_{\beta j}) & 0 & -k(\rho_j c^2 \gamma_{\beta j} \delta_j)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\rho_j c^2 \delta_j)^{-1} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(12) \\ \begin{pmatrix} \epsilon'_j + \epsilon''_j \\ \epsilon'_j - \epsilon''_j \end{pmatrix} &= [E_{Lj}^{-1}] [V_{Lj}(z_{j-1})] \\ [E_{Lj}^{-1}] &\equiv \begin{pmatrix} (ik)^{-1} & 0 \\ 0 & -(i\mu_j \gamma_{\beta j})^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さらに $z=z_j$ でも同じように計算して、 $d'_j, d''_j, \omega'_j, \omega''_j, \epsilon'_j, \epsilon''_j$ を消去すると、次のような層の上の境界と下の境界を結ぶ Haskell のマトリックで表わされる関係式が得られる。

$$\begin{aligned} [U_{Rj}(z_j)] &= [a_{Rj}][U_{Rj}(z_{j-1})] \\ [V_{Lj}(z_j)] &= [a_{Lj}][V_{Lj}(z_{j-1})] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} (a_{Rj})_{11} &= (a_{Rj})_{44} = \delta_j \cos P_j - (\delta_j - 1) \cos Q_j \\ (a_{Rj})_{12} &= (a_{Rj})_{34} = i\{(\delta_j - 1)k \sin P_j / \tau_{\alpha j} + \delta_j \tau_{\beta j} \sin Q_j / k\} \\ (a_{Rj})_{13} &= (a_{Rj})_{24} = -(\rho_j c^2)^{-1} \{\cos P_j - \cos Q_j\} \\ (a_{Rj})_{14} &= i(\rho_j c^2)^{-1} \{k \sin P_j / \tau_{\alpha j} + \tau_{\beta j} \sin Q_j / k\} \\ (a_{Rj})_{21} &= (a_{Rj})_{43} = -i\{\delta_j \tau_{\alpha j} \sin P_j / k + k(\delta_j - 1) \sin Q_j / \tau_{\beta j}\} \\ (a_{Rj})_{22} &= (a_{Rj})_{33} = -(\delta_j - 1) \cos P_j + \delta_j \cos Q_j \\ (a_{Rj})_{23} &= i(\rho_j c^2)^{-1} \{\tau_{\alpha j} \sin P_j / k + k \sin Q_j / \tau_{\beta j}\} \\ (a_{Rj})_{31} &= (a_{Rj})_{42} = \rho_j c^2 \delta_j (\delta_j - 1) \{\cos P_j - \cos Q_j\} \\ (a_{Rj})_{32} &= i\rho_j c^2 \{(\delta_j - 1)^2 k \sin P_j / \tau_{\alpha j} + \delta_j^2 \tau_{\beta j} \sin Q_j / k\} \\ (a_{Rj})_{41} &= i\rho_j c^2 \{\delta_j^2 \tau_{\alpha j} \sin P_j / k + (\delta_j - 1)^2 k \sin Q_j / \tau_{\beta j}\} \\ (a_{Lj})_{11} &= (a_{Lj})_{22} = \cos Q_j \\ (a_{Lj})_{12} &= i k \sin Q_j / \mu_j \tau_{\beta j} \\ (a_{Lj})_{21} &= i \mu_j \tau_{\beta j} \sin Q_j / k \\ P_j &= \tau_{\alpha j} d_j, \quad Q_j = \tau_{\beta j} d_j, \quad d_j = z_j - z_{j-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

次にもしこの層が震源を含んでいる場合には、前の一般解 (10) 式に、さらに震源の項が加わる。一般に点状震源の存在する点は、数学的な特異点であって、この点でポテンシャルは不連続になる。この震源に対するポテンシャルは、例えば次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \varphi_{s0}(z) &= S^{\pm}_{01} e^{-i\gamma_{\alpha s} |z-D|} \\ \psi_{s0}(z) &= S^{\pm}_{02} e^{-i\gamma_{\beta s} |z-D|} \quad \pm : z \gtrless D \\ \chi_{s0}(z) &= S^{\pm}_{03} e^{-i\gamma_{\beta s} |z-D|} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

(10) 式に (15) 式を加えたものが震源を含んでいる層に対する一般解であるが、これは (10) 式と同じ形をしている。したがって震源を含まない層に対するのと同じ手続きによって、震源のすぐ上の点と上の境界面との関係および震源のすぐ下の点と下の境界面との関係が次のように表わせる。

$$\begin{aligned} [U_{Rs2}(z_s)] &= [a_{Rs2}][U_{Rs2}(D)] \\ [U_{Rs1}(D)] &= [a_{Rs1}][U_{Rs1}(z_{s-1})] \\ [V_{Ls2}(z_s)] &= [a_{Ls2}][V_{Ls2}(D)] \\ [V_{Ls1}(D)] &= [a_{Ls1}][V_{Ls1}(z_{s-1})] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $[a_{Rs1}], [a_{Rs2}], [a_{Ls1}], [a_{Ls2}]$ は (14) 式において

$$\begin{aligned} P_j &= \tau_{\alpha j} d_j \rightarrow P_{s1} = \tau_{\alpha s} (D - z_{s-1}), \quad P_{s2} = \tau_{\alpha s} (z_s - D) \\ Q_j &= \tau_{\beta j} d_j \rightarrow Q_{s1} = \tau_{\beta s} (D - z_{s-1}), \quad Q_{s2} = \tau_{\beta s} (z_s - D) \end{aligned}$$

に置換えたものである。

また震源の上の点と下の点の間には (6) 式と (15) 式によって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_{Rs2}(D) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_{Rs1}(D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{\dot{u}_{Rs}}{c} \right) \\ \delta \left(\frac{\dot{w}_{Rs}}{c} \right) \\ \delta \sigma_{Rs} \\ \delta \tau_{Rs} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{Ls2}(D) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_{Ls1}(D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{\dot{v}_{Ls}}{c} \right) \\ \delta \tau_{Ls} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで, } \delta \left(\frac{\dot{u}_{Rs}}{c} \right) &= k^2 \{ (S^+_{01} - S^-_{01}) - i r_{\beta s} (S^+_{02} + S^-_{02}) \} \\
\delta \left(\frac{\dot{w}_{Rs}}{c} \right) &= i k \{ -i r_{\alpha s} (S^+_{01} + S^-_{01}) + k^2 (S^+_{02} - S^-_{02}) \} \\
\delta \sigma_{Rs} &= k^2 c^2 \rho_s \{ (\delta_s - 1) (S^+_{01} - S^-_{01}) - i r_{\beta s} \delta_s (S^+_{02} + S^-_{02}) \} \\
\delta \tau_{Rs} &= k^2 c^2 \rho_s \{ -\delta_s r_{\alpha s} (S^+_{01} + S^-_{01}) / k - i k (\delta_s - 1) (S^+_{02} - S^-_{02}) \} \dots\dots\dots (18) \\
\delta \left(\frac{\dot{v}_{Ls}}{c} \right) &= i k^2 (S^+_{03} - S^-_{03}) \\
\delta \tau_{Ls} &= -i k \mu_s r_{\beta s} (S^+_{03} + S^-_{03})
\end{aligned}$$

3. 点状水平力震源に対する解

ここで上で述べた考えにしたがって、震源を地表にとり、地中の変位の周波数特性を調べる。震源として、点状の水平方向 ($\theta=0$ の方向) に調和振動的に加えられるものを考える。これは加振方向を軸とする軸対称に波を発生させる。そのポテンシャルを積分表示で示せば

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^\infty S^\pm_{01} e^{-i\gamma_{\alpha s}|z-D|} J_1(rk) \cos \theta dk \\
\bar{\psi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^\infty S^\pm_{02} e^{-i\gamma_{\beta s}|z-D|} J_1(rk) \cos \theta dk \\
\bar{\chi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^\infty S^\pm_{03} e^{-i\gamma_{\beta s}|z-D|} J_1(rk) \sin \theta dk \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

$$S^+_{01} = S^-_{01} = -i \frac{L}{4\pi \omega^2 \rho_s r_{\alpha s}}$$

$$S^+_{02} = -S^-_{02} = \frac{L}{4\pi \omega^2 \rho_s}$$

$$S^+_{03} = S^-_{03} = -i \frac{L}{4\pi \omega^2 \rho_s} \frac{k \beta_s}{r_{\beta s}}$$

また

$$\delta \dot{u}_{Rs} = \delta \dot{w}_{Rs} = \delta \dot{v}_{Ls} = \delta \sigma_{Rs} = 0$$

$$\delta \tau_{Rs} = i \frac{kL}{2\pi}, \quad \delta \tau_{Ls} = -\frac{kL}{2\pi}$$

震源は地表にあるから (16) 式の $[a_{Rs1}]$, $[a_{Ls1}]$ は単位マトリックスとなり、 $\sigma_{Rs1}(D) = \tau_{Rs1}(D) = \tau_{Ls1}(D) = 0$ となる。

次に基盤より上にある層の U_{Rj} , V_{Lj} に対する表示を求める。境界条件 (9) 式と (13) および (16) 式を結合すると

$$\begin{aligned}
[U_{Rj}(z)] &= [a_{Rj}(z)] \dots [a_{R1}] [U_{R12}(0)] \\
[V_{Lj}(z)] &= [a_{Lj}(z)] \dots [a_{L1}] [V_{L12}(0)] \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

いまの場合、震源は基盤層より上にあるから、波は下から入射してはならないし ($c > \beta_n$)、また無限の下方では変位は有限でなければならない ($c < \beta_n$)。この条件をみたすためには、基盤層の d''_n , ω''_n , ϵ''_n は零であることが必要である。したがって基盤層に対して

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} d'_n \\ d'_n \\ \omega'_n \\ \omega'_n \end{pmatrix} &= (E_{Rn}^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} U_{Rn}(z_{n-1}) \end{pmatrix} = (E_{Rn}^{-1}) \begin{pmatrix} U_{Rn-1}(z_{n-1}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (21) \\
\begin{pmatrix} \epsilon'_n \\ \epsilon'_n \end{pmatrix} &= (E_{Ln}^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} V_{Ln}(z_{n-1}) \end{pmatrix} = (E_{Ln}^{-1}) \begin{pmatrix} V_{Ln-1}(z_{n-1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

右辺に (20) を入れると

$$\begin{pmatrix} d'_n \\ d'_n \\ \omega'_n \\ \omega'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{Rn}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{Rn-1} \end{pmatrix} \cdots \cdots \begin{pmatrix} a_{R1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\dot{u}_{R1}(0)}{c} \\ \frac{w_{R1}(0)}{c} \\ 0 \\ \delta\tau_{R1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\dot{u}_{R1}(0)}{c} \\ \frac{w_{R1}(0)}{c} \\ 0 \\ \delta\tau_{R1} \end{pmatrix} \cdots \cdots (22)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon'_n \\ \epsilon'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{Ln}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{Ln-1} \end{pmatrix} \cdots \cdots \begin{pmatrix} a_{L1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_{L1}(0)}{c} \\ \delta\tau_{L1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_{L1}(0)}{c} \\ \delta\tau_{L1} \end{pmatrix}$$

(22) 式において、 $d'_n, \omega'_n, \epsilon'_n$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_{R1}(0)}{c} &= \frac{RM-SK}{NK-LM} \delta\tau_{R1} \\ \frac{w_{R1}(0)}{c} &= -\frac{RN-SL}{NK-LM} \delta\tau_{R1} \cdots \cdots (23) \\ \frac{v_{L1}(0)}{c} &= \frac{[J_L]_{22} - [J_L]_{12}}{[J_L]_{11} - [J_L]_{21}} \delta\tau_{L1} \end{aligned}$$

これを (20) 式の右辺に入れると

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_{Rj}(z)}{c} &= \frac{(RM-SK)[B_{Rj}]_{11} - (GM-HK)[B_{Rj}]_{12}}{NK-LM} \delta\tau_{R1} + [B_{Rj}]_{14} \delta\tau_{R1} \\ \frac{w_{Rj}(z)}{c} &= \frac{(RM-SK)[B_{Rj}]_{21} - (RN-LS)[B_{Rj}]_{22}}{NK-LM} \delta\tau_{R1} + [B_{Rj}]_{24} \delta\tau_{R1} \cdots \cdots (24) \\ \frac{v_{Lj}(z)}{c} &= \frac{[J_L]_{22} - [J_L]_{12}}{[J_L]_{11} - [J_L]_{21}} [B_{Lj}]_{11} \delta\tau_{L1} + [B_{Lj}]_{12} \delta\tau_{L1} \end{aligned}$$

層構造を 3 層にとった場合の常数は次のようになる。

$$\begin{aligned} B_{K1} &= a_{R1}, \quad B_{R2} = a_{R2} \cdot a_{R1} \\ B_{L1} &= a_{L1}, \quad B_{L2} = a_{L2} \cdot a_{L1} \\ L &= [J_R]_{11} - [J_R]_{21}, \quad K = [J_R]_{12} - [J_R]_{22}, \cdots \cdots (25) \\ G &= [J_R]_{13} - [J_R]_{23}, \quad R = [J_R]_{14} - [J_R]_{24}, \\ N &= [J_R]_{31} - [J_R]_{41}, \quad M = [J_R]_{32} - [J_R]_{42}, \\ H &= [J_R]_{33} - [J_R]_{43}, \quad S = [J_R]_{34} - [J_R]_{44} \end{aligned}$$

また基盤層の変位に対しては、(11) 式の $j=n$ に対して、 $d''_n = \omega''_n = \epsilon''_n = 0$ とおき、 $z=z, z=z_{n-1}$ に対して $\dot{v}_{Rn}/c, \dot{w}_{Rn}/c, \dot{u}_{Ln}/c, \sigma_{Rn}, \tau_{Rn}, \tau_{Ln}$ を求め、 $d'_n, \omega'_n, \epsilon'_n$ を消去すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_{Rn}(z)}{c} &= (1 + \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} / k^2)^{-1} \left[\{ e^{-iP_n} + \gamma_{\beta n} \gamma_{\beta n} e^{-iQ_n/k^2} \} \frac{\dot{u}_{Rn-1}(z_{n-1})}{c} \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{\beta n} \{ e^{-iP_n} - e^{-iQ_n} \} \frac{\dot{w}_{Rn-1}(z_{n-1})}{ck} \right] \cdots \cdots (26) \\ \frac{\dot{v}_{Ln}(z)}{c} &= \{ \cos Q_n - i \sin Q_n \} \frac{\dot{v}_{Ln-1}(z_{n-1})}{c} \end{aligned}$$

$$P_n = \gamma_{\alpha n}(z - z_n), \quad Q_n = \gamma_{\beta n}(z - z_n)$$

(24) および (26) 式を (4) 式に入れて積分すれば、各層における変位が得られるが、積分路として、リーマン面で radiation condition をみたすものがとられなければならない。この条件をみたすものとは、 $\gamma_{\alpha j}, \gamma_{\beta j}$ の虚数部分を負にする面であればよく、この面をリーマン面の upper 面とすれば、ここで

$$\gamma_{\beta j} = \sqrt{k_{\alpha j}^2 - k^2} = -i \sqrt{k^2 - k_{\alpha j}^2}, \cdots \cdots$$

4. 積分の数値計算の方法

三層の層構造の場合について、 $\theta=0$ の方向の水平力震源に対し、 $\theta=\frac{\pi}{2}$ の方向の地中の $\bar{v}_j(r, \frac{\pi}{2}, z)$ について、その周波数特性を数値的に求めた。すなわち

$$\begin{aligned}\bar{v}_j\left(r, \frac{\pi}{2}, z\right) &= \bar{v}_{Rj}\left(r, \frac{\pi}{2}, z\right) + \bar{v}_{Lj}\left(r, \frac{\pi}{2}, z\right) \\ \bar{v}_{Rj} &= -\frac{\delta\tau_{R1}}{k} \int_0^\infty \frac{1}{\delta\tau_{R1}} \frac{\dot{u}_{Rj}(z)}{crk} J_1(rk) dk \equiv -\frac{\delta\tau_{R1}}{k} \int_0^\infty F_{Rj}(k, \tau_{\alpha 3}, \tau_{\beta 3}) J_1(rk) dk \\ \bar{v}_{Lj} &= \frac{i\tau_{L1}}{k} \int_0^\infty \frac{1}{\delta\tau_{L1}} \frac{\dot{v}_{Lj}(z)}{c} \frac{dJ_1(rk)}{d(rk)} dk = \frac{i\delta\tau_{L1}}{k} \int_0^\infty \frac{1}{\delta\tau_{L1}} \frac{\dot{v}_{Lj}(z)}{crk} \{-J_1(rk) + rkJ_0(rk)\} dk \\ &\equiv \frac{i\delta\tau_{L1}}{k} \int_0^\infty F_{Lj}(k, \tau_{\beta 3}) \{J_1(rk) - rkJ_0(rk)\} dk \dots\dots\dots (27)\end{aligned}$$

この $F_{Rj}(k, \tau_{\alpha 3}, \tau_{\beta 3})$ はいづれも k について偶函数であり、 $\tau_{\alpha 1}, \tau_{\alpha 2}, \tau_{\alpha 3}, \tau_{\beta 1}, \tau_{\beta 2}, \tau_{\beta 3}$ の6つの根号をもつが、 $\tau_{\alpha 1}, \tau_{\alpha 2}, \tau_{\beta 1}, \tau_{\beta 2}$ の表層に関する根号については偶函数であるため、 $k_{\alpha 1}, k_{\alpha 2}, k_{\beta 1}, k_{\beta 2}$ はリーマン面上の分岐点とはならない。 $k_{\alpha 3}, k_{\beta 3}$ の点からのみ分枝の切目を入れればよい。したがってリーマン面は4葉である。

SH トルク震源に対する積分の数値計算においては、被積分の実軸に沿う $k \rightarrow \infty$ に対する収束が遅いため、第一種のベッセル函数を2つのハンケル函数に分け収束の早い線に沿う積分に変換してから計算した。水平力震源に対しては、被積分項が k の零の近くでも比較的大きく、受震点の位置が鉛直下方の場合には、 $k \rightarrow \infty$ に対して、比較的速やかに零に近づく。したがってこのような点での計算にはむしろ実軸に沿う積分の方が計算し易い。しかし表面あるいは表面に近い点では、被積分項の $k \rightarrow \infty$ に対する収束がよくないから、SH トルク震源の場合とほぼ同様に積分路の変換を行なってから計算する方がよい。すなわち、(27) 式は

$$\begin{aligned}\bar{v}_{Rj} &= -\frac{\delta\tau_{R1}}{k} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty F_{Rj} \cdot H_1^{(1)}(rk) dk + \int_0^\infty F_{Rj} H_1^{(2)}(rk) dk \right\} \\ \bar{v}_{Lj} &= \frac{i\delta\tau_{L1}}{k} \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty F_{Lj} \{H_1^{(1)}(rk) - rkH_0^{(1)}(rk)\} dk + \int_0^\infty F_{Lj} \{H_1^{(2)}(rk) - rkH_0^{(2)}(rk)\} dk \right] \dots\dots (28)\end{aligned}$$

$F_{Rj}(k, \tau_{\alpha 3}, \tau_{\beta 3})$ の特異点は分岐点 $k_{\alpha 3}, k_{\beta 3}$ 、レイレイ波に相当する極であり、 $F_{Lj}(k, \tau_{\beta 3})$ は前回で示したように分岐点 $k_{\beta 3}$ とラブ波に相当する極を特異点としてもつ。いずれの場合も実根はリーマン面上葉に存在し、複素根はこの葉に存在しないことが示される。また分岐点および極は実軸の第4象限側に存在する。このような性質を考慮したリーマン面が Fig. 2 に示されている。

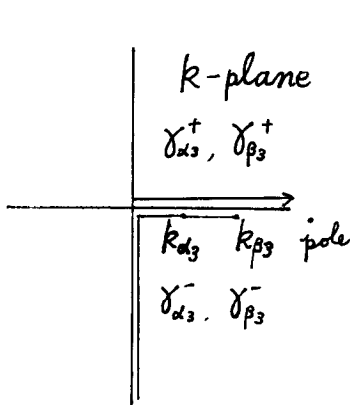


Fig. 2

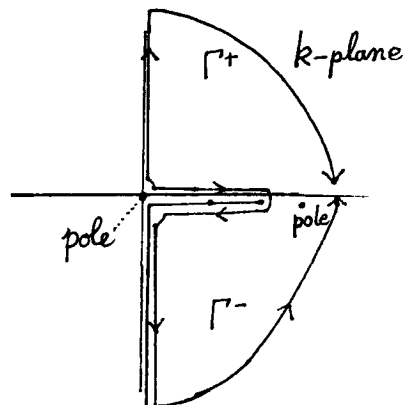


Fig. 3

われわれの求めているのは r の小さい値に対する変位であるから、線積分の算方法として通常とられる steepert descent の方法をとることはできないが、Cauchy の定理にしたがって、実軸から (28) 式の各積分の第1項は Fig. 3 の Γ^+ の積分路に、第2項は Γ^- の積分路に移して数値計算する。(28)式を Γ^+, Γ^-

に沿って積分する場合、 F_{Rj} , F_{Lj} の極の外に、これらの函数が $k=0$ で零にならないため、 $H_1^{(1)}(rk)$, $H_1^{(2)}(rk)$ の $k=0$ での極が被積分項の極になる。また

$$R_e(\gamma_{\alpha 3}) > 0, \quad R_e(\gamma_{\beta 3}) > 0 : \text{第1象限 } (\gamma^+_{\alpha 3}, \gamma^+_{\beta 3})$$

$$R_e(\gamma_{\alpha 3}) < 0, \quad R_e(\gamma_{\beta 3}) > 0 : \text{第4象限 } (\gamma^-_{\alpha 3}, \gamma^-_{\beta 3})$$

になり、

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(-rk) &= -H_0^{(2)}(rk) \\ H_1^{(1)}(-rk) &= H_1^{(2)}(rk) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (29)$$

になることを考慮すると、

$$\begin{aligned} \bar{v}_{Rj} = & -\frac{\delta\tau_{R1}}{2k} \left[\int_0^{k\alpha_3} \{F_{Rj}(k, \gamma^+_{\alpha 3}, \gamma^+_{\beta 3}) - F_{Rj}(k, \gamma^-_{\alpha 3}, \gamma^-_{\beta 3})\} H_1^{(1)} dk \right. \\ & + \int_{k\alpha_3}^{k\beta_3} \{F_{Rj}(k, \gamma^+_{\alpha 3}, \gamma^+_{\beta 3}) - F_{Rj}(k, \gamma^+_{\alpha 3}, \gamma^-_{\beta 3})\} H_1^{(2)} dk \\ & - \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \{F_{Rj}(i\tau, \gamma^+_{\alpha 3}, \gamma^+_{\beta 3}) - F_{Rj}(i\tau, \gamma^-_{\alpha 3}, \gamma^-_{\beta 3})\} K_1(r\tau) d\tau \\ & + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int F_{Rj}(k, \gamma^+_{\alpha 3}, \gamma^+_{\beta 3}) H_1^{(1)} dk + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int F_{Rj}(k, \gamma^-_{\alpha 3}, \gamma^-_{\beta 3}) H_1^{(2)} dk \\ & \left. - 2\pi i \sum \text{Res}(F_{Rj}(k, \gamma_{\alpha 3}, \gamma_{\beta 3}) H_1^{(2)}) \right] \quad \dots\dots\dots (30) \\ & \left[\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int F_{Rj} H_1^{(1)} dk + \int F_{Rj} H_1^{(2)} dk = \frac{1}{r} \{F_{Rj}(0, \gamma^+_{\alpha 3}, \gamma^+_{\beta 3}) + F_{Rj}(0, \gamma^-_{\alpha 3}, \gamma^-_{\beta 3})\} \right. \right. \\ \bar{v}_{Lj} = & -\frac{i\delta\tau_{Lj}}{2k} \left[\int_0^{k\beta_3} \{F_{Lj}(k, \gamma^+_{\beta 3}) - F_{Lj}(k, \gamma^-_{\beta 3})\} (H_1^{(2)} - rkH_0^{(2)}) dk \right. \\ & - \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \{F_{Lj}(i\tau, \gamma^+_{\beta 3}) - F_{Lj}(i\tau, \gamma^-_{\beta 3})\} (K_1 + r\tau K_0) d\tau \\ & + \frac{1}{r} (F_{Lj}(0, \gamma^+_{\beta 3}) + F_{Lj}(0, \gamma^-_{\beta 3})) \\ & \left. \left. - 2\pi i \sum \text{Res}(F_{Lj}(k, \gamma_{\beta 3}) (H_1^{(2)} - rkH_0^{(2)})) \right] \quad \dots\dots\dots (31) \right. \end{aligned}$$

(27) 式の表示にしたがって、直接実軸にそって積分する場合、レイレイ mode, ラブ mode に相当する極は特異点であるが、第4象限にあるから第一象限側に小半円で迂回させ、またこの点の前後で被積分函数が近似的に奇函数であることを考慮して数値積分する。

5. 計算結果と考察

(27) 式あるいは (30) および (31) 式を使って、いくつかの層構造に対して、振幅 $\bar{v}_j(r, \pi/2, z)$ の周波数特性を地中の各点について計算した結果を以下において示す。数値計算の対象とした層構造は、土質の地盤において多く見られるものに近い。S 波および P 波速度で、第1層 100 m/sec. 180 m/sec., 第2層 200 m/sec. 360 m/sec., 第3層 400 m/sec., 1000 m/sec. の組と、第1層 100 m/sec. 180 m/sec. 第2層 300 m/sec. 480 m/sec., 第3層 600 m/sec. 1200 m/sec. の組であり、これに対して数種の厚さを与えて、変位振幅 $\left| \bar{v}_j \left(r, \frac{\pi}{2}, z \right) \right|$ を計算したものが Figs. 4~7 に示されている。この場合、震源は地表の原点にあって、発生する波動の振幅の周波数特性は変位について平坦であるから、点が震源に近づけば変位振幅の周波数特性は平坦になるはずである。また計算した点は原点の真下ではなく、 $r=5\text{m}$ の点である。これは r が余り零に近いと、ベッセル函数の性質から積分の収束が極端に悪くて計算時間が長くなるためと、実際の観測において地震計設置点は、普通起振機の真下ではなく、その中心から数 m ずらして地中に設置されるからである。

それぞれ、地表から 100 m 近くまでの数点におけるものが図示されている。(19) 式のタイプの震源に対して、振幅は地中に入るにつれて速やかに減少するが、受震点の深さによる振幅の周波数特性の変化をみやす

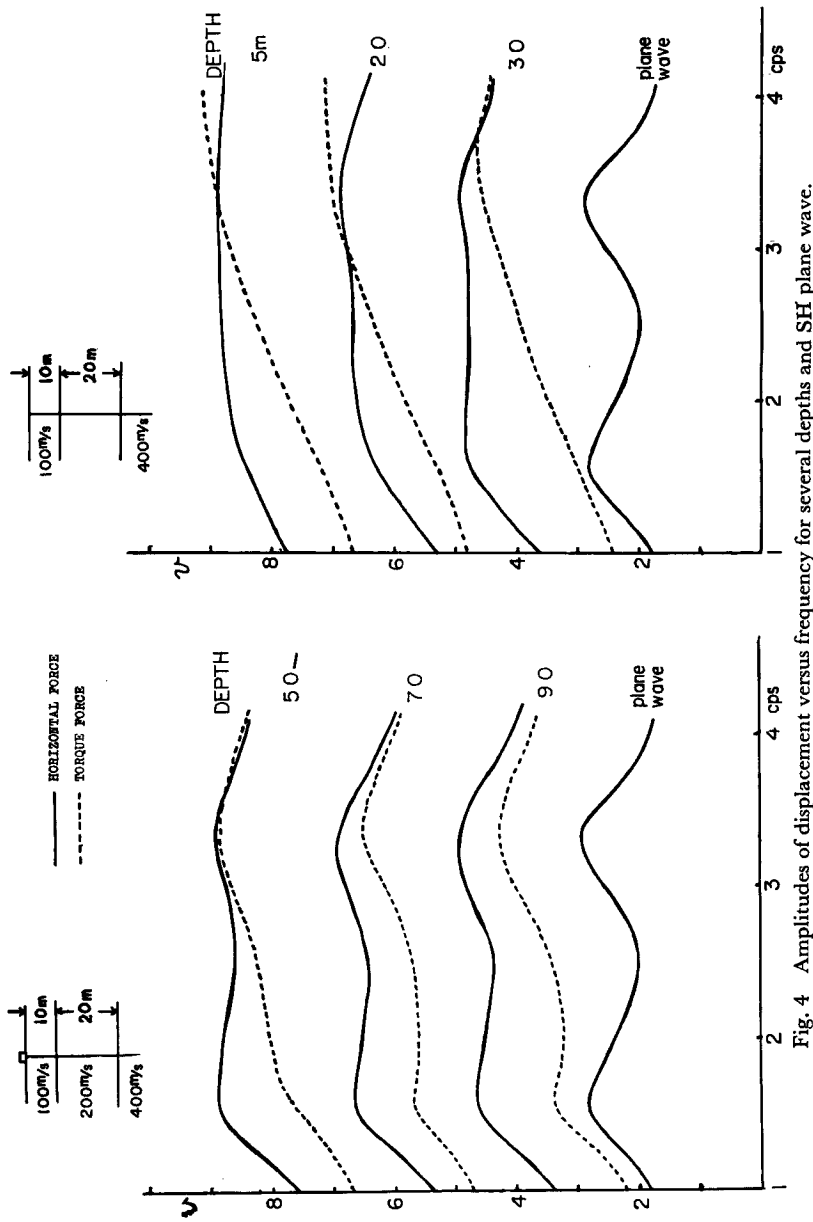


Fig. 4 Amplitudes of displacement versus frequency for several depths and SH plane wave.

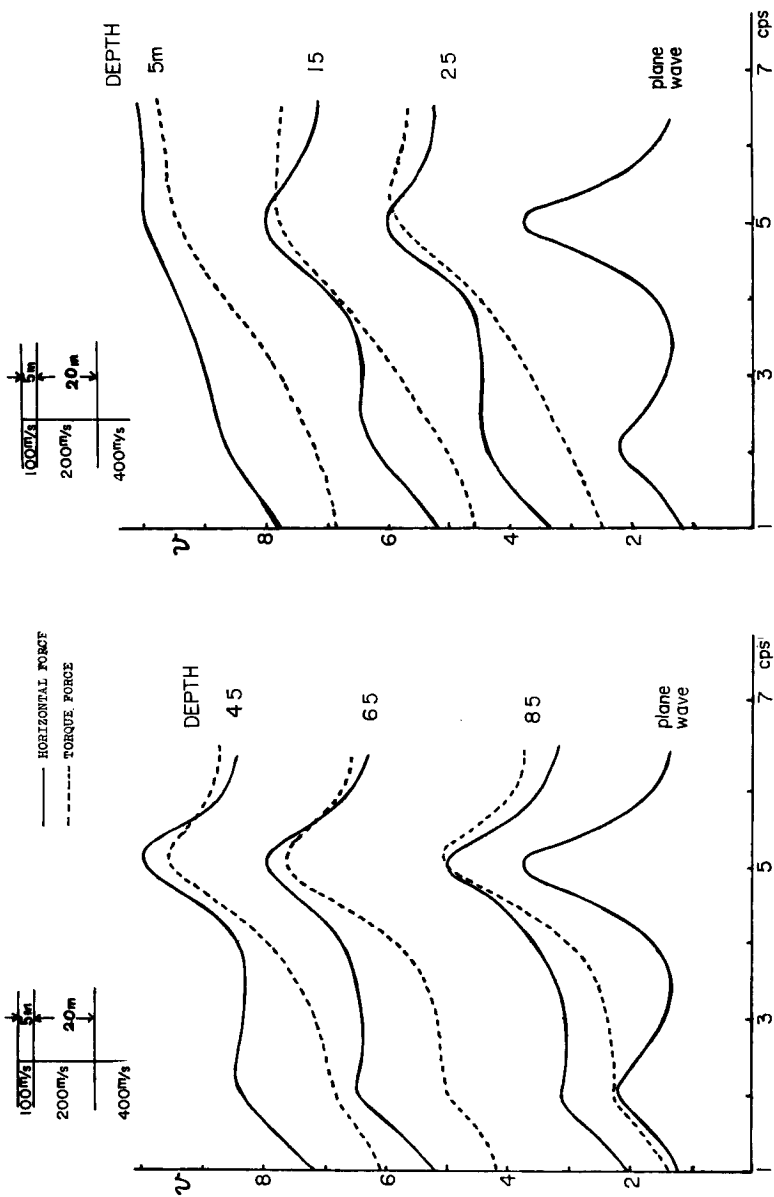


Fig. 5 Amplitudes of displacement versus frequency for several depths and SH plane wave.

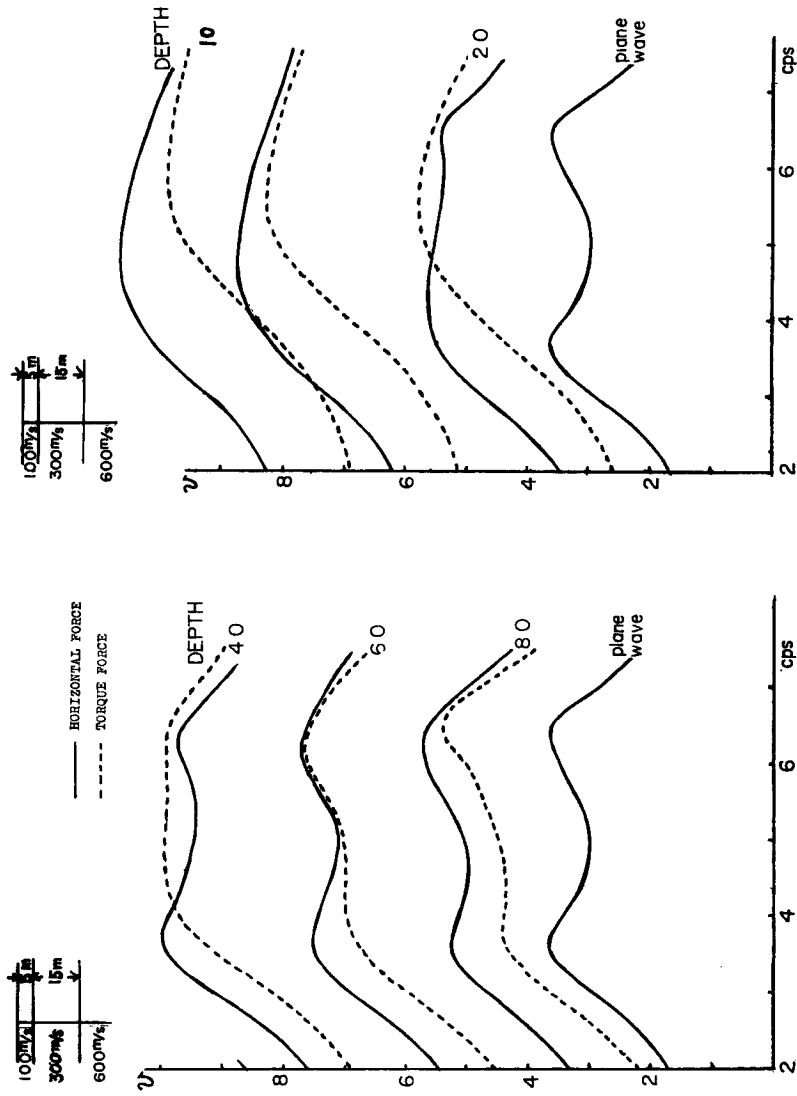


Fig. 6 Amplitudes of displacement versus frequency for several depths and SH plane wave.

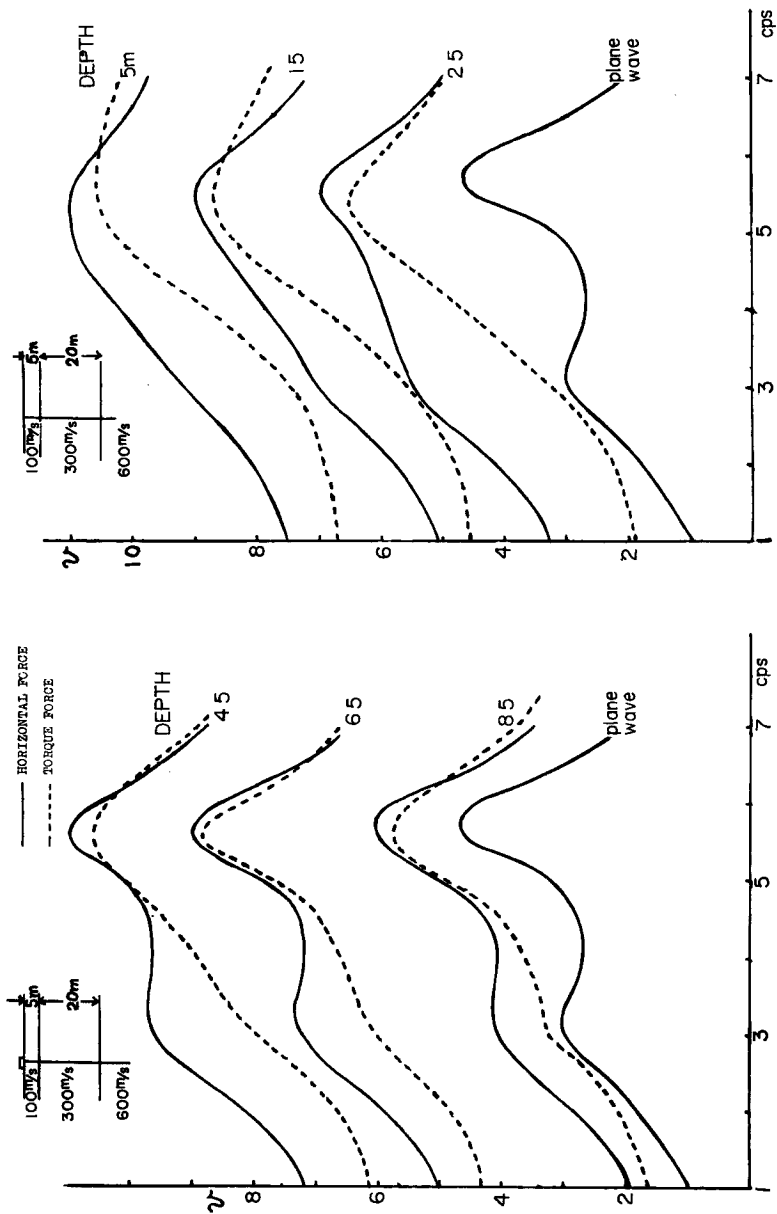


Fig. 7 Amplitudes of displacement versus frequency for several depths and SH plane wave.

くするため、図示する際にそれぞれの層構造に対して、各深さでの振幅特性を最大値が深さによらず同一の値を示すように規格化し、さらにその振幅の零の線を順次2つつ上にあずらして、振幅の周波数特性の曲線を、震源をSHトルクにした場合と並べて描いた。また一番下の曲線は、変位について周波数特性一定の平面SH波が鉛直下方から入射した場合の地表の変位の周波数特性を表わしている⁷⁾。

図においては、地表の震源に対する地中点の変位振幅として表わされているが、序文でのべた相反性の定理よって、図のような例は、地中加振による地表点の特性と考えてもよい。図に示された周波数範囲に対して、各構造とも、基盤層の点に対応する各図の左の3本の曲線においては、曲線は2つのピークを示している。位相関係を示す Figs. 8~11 から明らかであるが、この低サイクルのピークは、2つの層からなる表層の基本モードに相当するものであり、高サイクルのピークは2次モードを表わすものである。点線で示さ

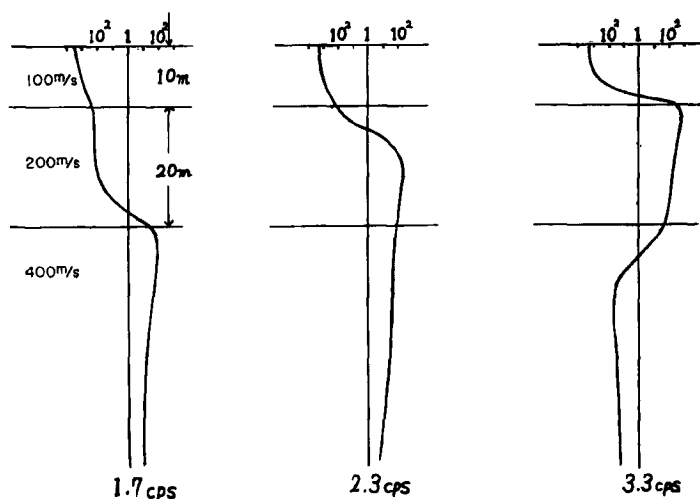


Fig. 8 Amplitudes dependent on depth.

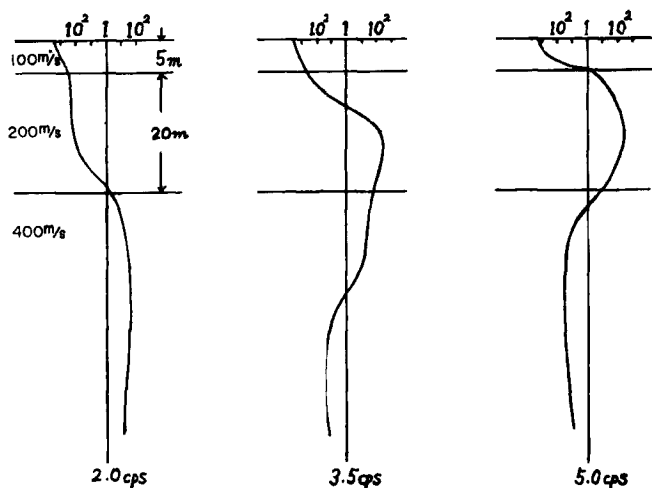


Fig. 9 Amplitudes dependent on depth.

れた SH トルク震源の場合の周波数特性曲線に比して、やや明瞭に2つのピークが現れている。これは水平力震源の方が鉛直方向に射出されるエネルギーの割合が多く、それによる重複反射の constructive な mode の形成し易いことによると思われる。

次に図の右の2つの曲線は第2層の点の変位振幅を表わすものであるが、これらの点では上記の2つのピークは不明瞭なものになってはいるが、その特徴は残っている。また第1層では曲線は平坦に近くなっているから、第1層の震源に近い点で、地盤震動の共振点を見出すことは無理である。

いずれの場合も、震源を SH トルクにしたときよりは、2つの共振の mode はやや明瞭に現れており、第2層においては SH トルク震源のときには現れていなかった基本 mode も不明瞭ながら見られる。

このように深部に入るにつれて、表層による地盤震動の周波数特性は次第に明瞭になっているから、共振の mode を見出すためにはなるべく深い点で測定する方がよいが、実際問題として、経済的にいってなるべく浅い点での測定で望まれる。基本モードについても、低サイクル附近で、細かく測定すれば、その点を見

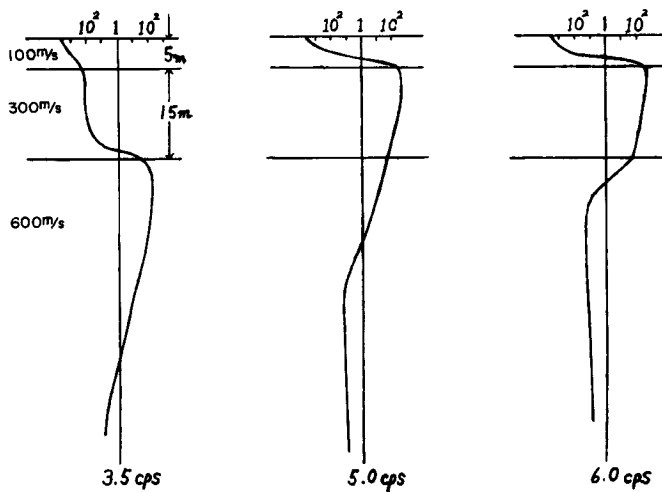


Fig. 10 Amplitudes dependent on depth.

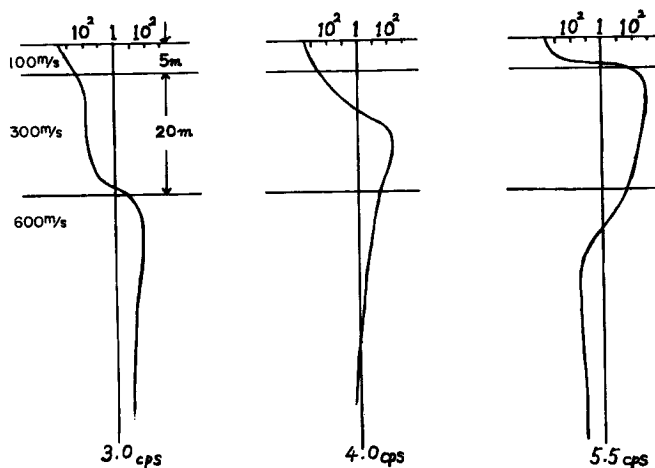


Fig. 11 Amplitudes dependent on depth.

出すこともできるであろうから、基盤中であれば、浅くとも基本モードから発見することは可能であろう。
数値計算には京都大学大型計算センター FACOM230 60 を用いた。

参 考 文 献

- 1) Knopoff, L. and A.F. Gangi: Seismic Reciprocity, *Geophysics*, Vol. 24, 1959, pp. 681~691.
- 2) 島 通保・入倉孝次郎: SH型トルクに多層構造地盤の震動特性について(2), 京都大学防災研究所年報, 12号 A昭和44.3 pp. 181~190.
- 3) Ewing, W.M., W.S. Jardetzky and F. Press: *Elastic Waves in Layered Media*, 1957, pp. 124~254.
- 4) Harkrider, D.G.: Surface Waves in Multi-layered Elastic Media 1, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 54, 1964, pp. 627~679.
- 5) Laster, S.J., J.G. Foreman and A.F. Linville: Theoretical Investigation of Modal Seismograms for a Layer over a Half-space, *Geophysics*, Vol. 30, 1965, pp. 571~596.
- 6) Haskell, N.A.: The Dispersion of Surface Waves on Multi-layered Media, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 43, 1953, pp. 17~34.