

流れの安定性と 1 / 2 階微分

筑波大学・構造工学系 松内一雄 (Kazuo Matsuuchi)

1. はじめに

層流の安定性は、この層流に加えられた攪乱が成長するか否かで判定される。これまで、この攪乱の一つのフーリエ成分か高々数個の成分でこの安定性が議論され、多くの流れに対しある程度の精度で不安定開始の予知がなされてきた。ところが、円管 Poiseuille 流等の一部の流れは、多くの努力にも関わらず実験で観測される不安定の事実を説明することはできていない。

ここでは、任意の波形を持つ攪乱を記述することを考える。任意波形といえども、安定な無限小振幅波の集合では不安定には導かない。任意波形を考える理由は以下のである。十分に速い流れ、言いかえると大きいレイノルズ数の流れでは、攪乱は流れに乗って変形されずに流されていく。とりあえず無限小振幅の一つのフーリエ成分だけを考えたと、その角振動数 ω と波数 k の間には $\omega \propto k$ が成り立っていると考えられる。すなわち、この攪乱には散逸も分散もほとんど効かない。言い替えると高調波どうしは常に “near resonance” の状態にある。この様なタイプの攪乱は有限振幅になったとき共鳴を起こし、数多くの高調波が発生し大きく変形を受ける。このことが、任意の波形の攪乱を考える理由である。

よく知られているように、流れのレイノルズ数が十分大きいところで、この攪乱には壁モードと中心モードと呼ばれている二つの違ったタイプが存在する。この名前は、攪乱の最大振幅が壁の近くにあるのか中心にあるのかによっている。ここでは、次のような中心モード

$$c = 1 + 4me^{-\frac{3}{4}\pi i}(kR)^{-\frac{1}{2}}, \quad (m=1,2,3,\dots), \quad (1)$$

だけを考える。この式は Poiseuille 流の中心攪乱に対し、Gill⁽¹⁾によって最初に導かれた。このような分散関係式を持つ波の集合を記述することを考える。ここで具体的に導出を試みるのは上に述べた Poiseuille 流中の一つの特別なモードではあるが、数学的には一般性を欠くことはなくここで述べた方法を任意の攪乱に適用できる。

一つの特異なタイプの無限小攪乱に限るが任意の波形変化が可能な定式化を行う。このようにして導き出された方程式は通常の整数階の微分だけではなく、1 / 2 階微分と呼ばれる半端な階数の微分を含む方程式となる。これは、(1) 式の波数 k のべきが半端な数になっていることによる。この 1 / 2 階微分の項は局所的な状態だけではなく、流れの広い領域が影響した大局的な性格を持っていて、様々な興味ある振舞いを示す。この方程式の有限振幅攪乱への拡張も試みるが、Navier-Stokes 方程式から導かれる厳密な拡張ではなく、

一つのモデル方程式によるものである。有限振幅の影響と $1/2$ 階微分が協調して起こす予期せぬ振舞いが述べられる。

2. 問題の定式化と $1/2$ 階微分

任意の波形変化を考えるため、前節で述べた無限小攪乱の全てを次のように重ね合わせる。すなわち、

$$\eta(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(x-ct)} dk. \quad (2)$$

ここで、 $A(k)$ は任意の波数 k の関数である。さらに、複素位相速度 c は $c(-k) = c^*(k)$ を満足するように式 (1) を負の k にまで拡張したものである。フーリエ変換の畳み込み定理を利用すると容易に

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{4m}{\sqrt{\pi R}} \int_x^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x' - x}}, \quad (3)$$

が導ける。右辺に表れる積分は次に定義される演算子 $K^{-1/2}$

$$K^{-1/2} \eta = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x' - x}} \quad (4)$$

に等しい。この演算子が Weyl の $1/2$ 階微分と呼ばれるものである⁽²⁾。上の方程式を解く前に、この $1/2$ 階微分について説明する。この名の由来はもう一度この演算 ($1/2$ 階微分) を施すと 1 階微分になるところからきているが、厳密には 1 階微分に負号を付けたものに対応している。この点で Riemann-Liouville の $1/2$ 階微分とは異なる⁽³⁾。この Weyl の $1/2$ 階微分の意味を知るために一つの簡単な関数 $f(x) = -\exp(-x^2)$ を考える。図 1 に、この $f(x)$ 、 $-df(x)/dx$ 、 $K^{-1/2}f(x)$ を示す。 $1/2$ 階微分は他の二つの波形のほぼ中間に位置する。注目すべき点は、 x の負の側に大きく遠くまで影響を及ぼしていることである。逆に、 x の正の側では指数関数的に減衰し、その影響は現れない。この非対称性がこの半端な微分の特徴である。この微分のさらに詳しい物理的意味や他の流れの例については他の文献に譲る^{(3)~(5)}。

3. 解について

微積分方程式 (3) は解析的に解ける。この方程式を簡単に

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \delta \int_x^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x' - x}} \quad (5)$$

と書いてこの解を求めてみよう。一般解は微積分方程式にも関わらず容易に求めることができる。このことは式(1)のように分散関係式が陽に求まっていることによっている。層流の安定性を議論する上では特に一般解を求める必要もなく、次のような初期値境界値問題を考えるのが適当である。すなわち、 $x=0$ に攪乱源(この問題では管の端)があり、 $t=0$ から

$$\eta(0, t) = \exp(i\Omega t) \quad \text{for } t \geq 0,$$

のような三角関数で表されるような攪乱が入ったと考える。ラプラス変換を用いると容易に

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2}x\right) \int_L \exp[xh(s)] \frac{ds}{s - i\Omega}, \quad (6)$$

と解が、少なくとも形式的には求まる。ここで、積分路 L は複素 s -平面上で虚軸に沿った積分路であり、被積分関数の特異点がすべてこの積分路の左にくるように選んだものである(図2参照)。また、 $m = x/t$ であり、関数 $h(s)$ は

$$h(s) = \frac{s}{m} - s - \frac{\delta}{2}(4s + \delta^2)^{1/2}, \quad (7)$$

で表される。同様な手続きは、文献(6)に紹介されているので参考にされるとよい。任意の x, t に対して上記積分の実行は困難である。そこで、十分に大きな x と t について考える。容易に、

$$\eta(x, t) = 0 \quad \text{for } m > 1, \quad (8)$$

であることが分る。 $m < 1$ に対しては最大降下(steepest descent)法を用いるのが適当である。この方法によれば、 s -平面上の積分路 L は L' に置き換えられる(図2参照)。この積分路は $s = u + iv$ として

$$\delta^2 u + \frac{(1-m)^2}{m^2} v^2 = \frac{\delta^4 - 1 + 2m}{4(1-m)^2}, \quad (9)$$

で示される放物線である。この曲線上の

$$s_0 = \frac{\delta^2 - 1 + 2m}{4(1-m)^2},$$

が最大降下を与える点である。簡単な計算から分るように、もとの積分(6)は条件

$$\frac{\delta^2}{2} \frac{m\sqrt{2m-1}}{(1-m)^2} < \Omega,$$

を満たすとき、被積分関数の唯一の特異点 $s = i\Omega$ に関する留数が加わる。この条件下での解を求めると、

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{s_0 - i\Omega} \left(\frac{2\pi}{x|h_0''|}\right)^{1/2} \exp[s_0 t - (s_0 + \frac{\delta^2}{2} \frac{m}{1-m})x - \frac{\delta^2}{2}x] \\ & + \exp[i\Omega(t-x) - \frac{\delta}{2}x(4i\Omega + \delta^2)^{1/2} - \frac{\delta^2}{2}x], \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ただし、 $h_0'' = h''(s_0)$ であり、右辺第二項目が特異点からの寄与である。この項が波としての伝搬特性を表す。さらに詳しい波頭の形等も議論できるが省略する。

上記のように、少なくとも十分時間が経った遠方場の情報は解析的に得られる。任意の場所時刻での状態を知るには、元の微積分方程式を数値的に解く以外方法はない。さらに有限振幅攪乱への拡張のことも考えると、数値的なアプローチは必須である。

2種類の計算を行った。一つは(3)式を上で解析的に求めたのと全く同じ条件での数値解析である。もう一つは人為的に非線形項を導入し、有限振幅の攪乱に対し1/2階微分の影響を見たものである。この1/2階微分の係数 δ はすべての計算で $\delta = 0.02$ と置いた。

まず、線形の場合を述べる。 $x = 0$ における境界条件は

$$\eta(0, t) = 0.1 \sin t \quad \text{for } t \geq 0,$$

と選んだ。 $0 \leq t \leq 110$ における波形変化を図3に示す。解析的に得られた解(10)は $x, t \gg 1$ に対する漸近表現であり、厳密な対応はとれないが、両者を比較すると、振幅の減衰割合、 $m > 1$ では攪乱は存在しないこと等、解析的に得られた結果をほぼ正しく表していると思われる。

次に有限振幅の攪乱の振舞いを考える。ただし、この有限振幅の効果を Navier-Stokes 方程式から厳密に導くことはしなかった。とりあえずは、定性的に有限攪乱が1/2階微分の大局的影響下でどのように振舞うかを知ることであり、この非線形の効果は実験結果を定性的に表現する形に選んだ。実験によれば遷移レイノルズ数の流れでパフと呼ばれている乱流塊が発生することが知られている^{(7),(8)}。このパフ中の乱れが強いところは流れが遅くなっている。これは円管流れの乱れ(攪乱)について一般的に言える事実と思われる。この特性を表現するために、次のように方程式を拡張し、攪乱の時空間発展を調べた。すなわち、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (1 - \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \delta \int_x^\infty \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x' - x}} + \eta^3. \quad (11)$$

右辺最後の項は、強制的に入れた散逸項で、この形でなければならぬ物理的理由はない。実験的によく知られているように、ある一定以上の振幅を持つ攪乱のみが不安定へ導く。この場合、どのような時間発展をするのかは余り明確ではないが、実験事実を総合するとかなり発達初期の段階で攪乱の局在化が起こるようである。この事実を表現するために逆ガウス分布の低周波の攪乱と、高周波の三角関数の和で代表させた。具体的には、

$$\eta(0, t) = -0.3e^{-0.05(t-5)^2} + a \sin 5t \quad \text{for } t \geq 0,$$

と選んだ。高周波攪乱の振幅 a は0.1と0.2の2通りを考えた。上で述べた振幅の閾値の存在を見るためである。前者の結果を図4に後者を図5に示す。振幅が0.1の場合はほぼ線形理論で説明できる振舞いを示し、不安定の兆候は見られない。一方 $a = 0.2$ の場合、低周波の谷が前進しなくなり、時間の経過とともに谷は深くなる。この深くなる速さは次第に

加速し、やがて計算の続行が不可能になる（計算結果は $t = 36$ まで図にプロットされている）。すなわち、ある種の不安定現象が存在し流れは層流から次第に離れていく。

4. まとめ

攪乱が有限振幅になるとある種の不安定現象が存在することを示した。限定された条件での計算結果だけから断定的な結論を出すのは不可能であるが、現在のところ、このメカニズムを次のように考えている。波の伝搬速度は低周波の谷のところで一番遅くなる（非線形分散の効果）。一方、高周波は左端から絶え間なく供給されていて、この伝搬速度（位相速度）は低周波の速度より速い。したがって、高周波のエネルギー供給が十分ならば、言い替えると、十分大きな振幅を持っていると、低周波の谷の前で散逸に打ち勝って蓄積してしまう。これが不安定のメカニズムである。

非線形の部分については厳密な解析の結果導出されたものではなく、実験結果の定性的な解析から人為的に導入したものである。正しく実験事実を説明するためには、厳密な Navier-Stokes 方程式からの導出が不可欠である。これは今後の問題としたい。

参考文献

- (1) A. E. Gill, On the behaviour of small disturbances to Poiseuille flow in a circular pipe, J. Fluid Mech. Vol.21(1965), 145-172.
- (2) A. Erdélyi(ed.), *Tables of integral transforms*, Vol.2 (McGraw-Hill, 1954) 181-212.
- (3) 杉本信正, 非整数階微分・積分とその応用, ながれ, Vol.4(1985), 110-120.
- (4) T. Kakutani and K. Matsuuchi, Effect of viscosity on long gravity waves, J. Phys. Soc. Japan Vol.39(1975) 237-246.
- (5) 杉本信正, 非整数 $1/2$ 階微分で与えられる履歴を伴う非線形波動, 流体の非線形波動の数理的側面研究集会報告集, 数理解析研講究録 740(1991), 1-26.
- (6) S. A. Thau, Linear dispersive waves, *Nonlinear waves*, ed. S. Leibovich and A. R. Seebass. Cornell Univ., 1974, 45-78.
- (7) I.J. Wygnanski, M. Sokolov, and D. Friedman, On the transition in a pipe, Part 2, J. Fluid Mech., Vol.69(1975), 283-304.
- (8) 松内一雄, 本宮雅之, 安達勤, 円管内パフの発生と自己維持, 第23回乱流シンポジウム講演論文集, 1991, 227-233.

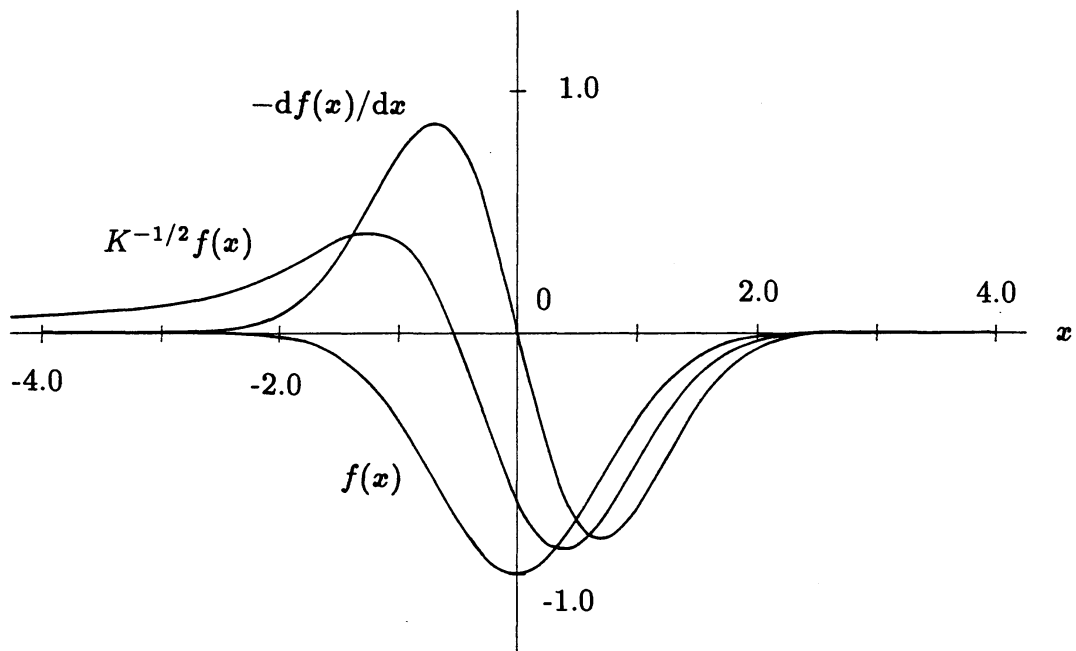


図1 $f(x) = \exp(-x^2)$ と選んだ時の $f(x)$ 、 $-df(x)/dx$ 、 $K^{-1/2}f(x)$ 。

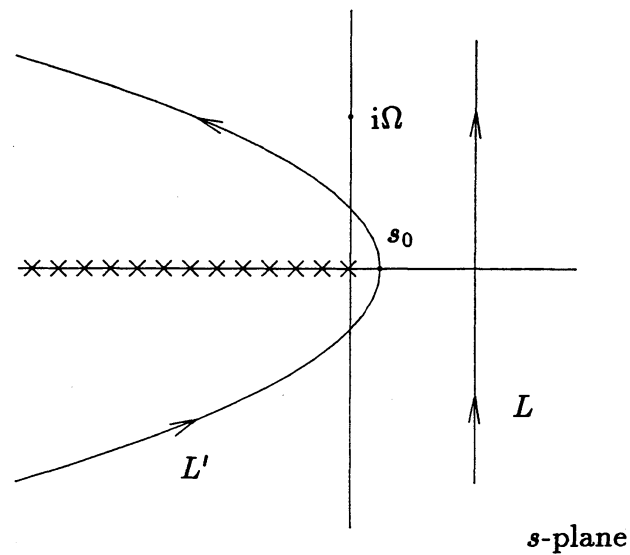


図2 積分路 L と変形された積分路 L' 。×印のところは、分岐点 $(-\delta^2/4, 0)$ から左に解の多価性を防ぐために設けた分岐切断 (branch cut) である。

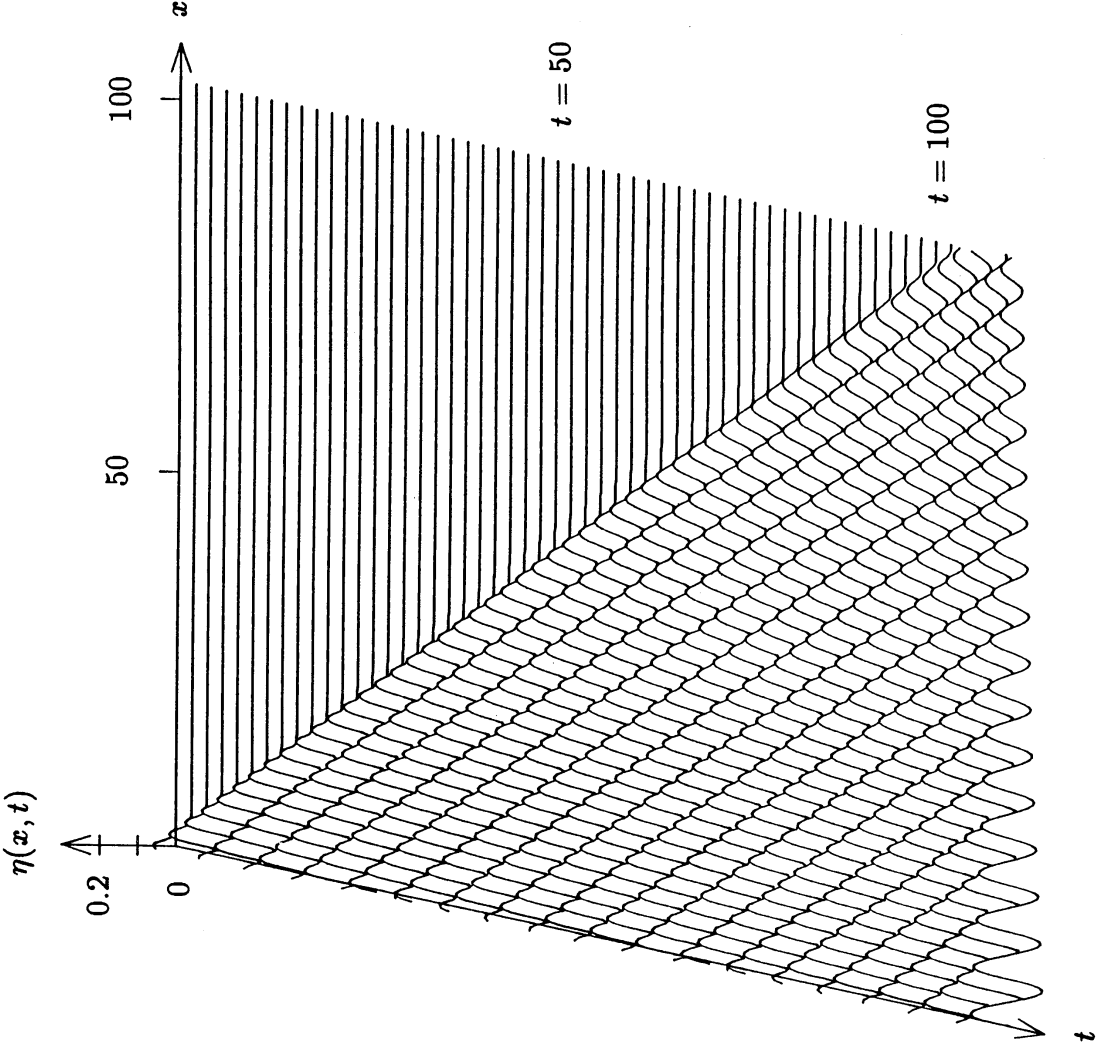


図 3 無限小振幅波の伝搬 ($0 \leq t \leq 110$)。

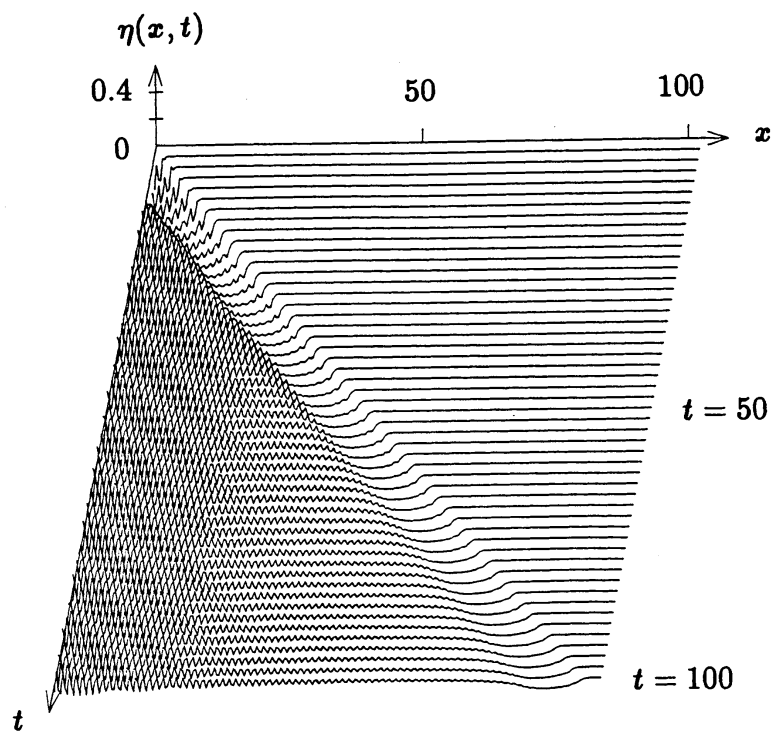


図4 有限振幅波の伝搬（攪乱振幅 0.1、 $0 \leq t \leq 100$ ）。

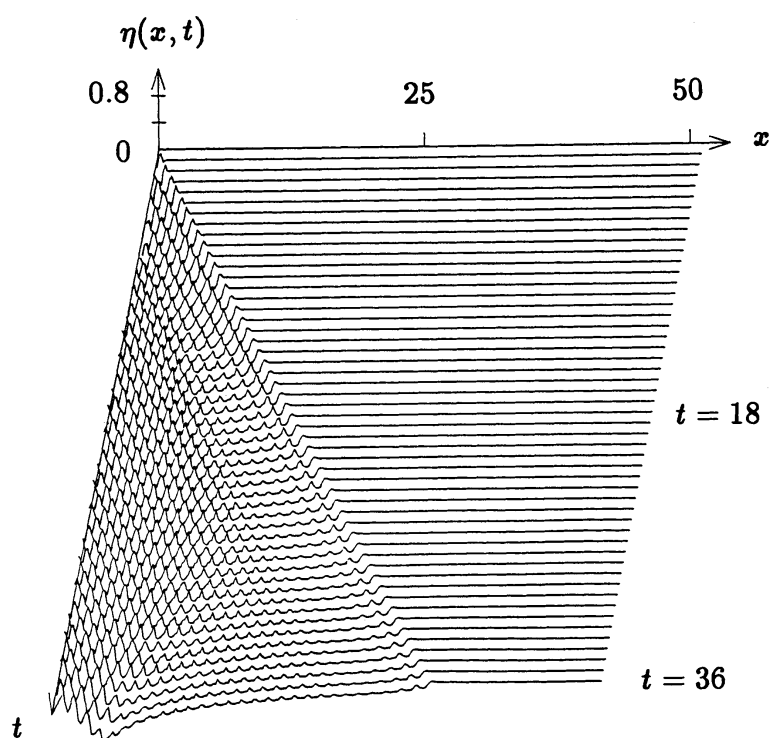


図5 有限振幅波の伝搬（攪乱振幅 0.2、 $0 \leq t \leq 36$ ）。