

On Special Lagrangian submanifolds

上智大学

宮岡礼子 (Reiko Miyaoka)

Sophia University

極小曲面論や、極小部分多様体論、そして可積分系理論に関わったことのある人なら誰しも Harvey-Lawson の calibrated geometry に興味を持つことだろう。ケーラー多様体の複素部分多様体が、同じホモロジー類の中で最小体積部分多様体であることは、Wirtinger の定理としてよく知られている。1982 年、これはある symplectic 多様体の special Lagrangian 部分多様体という概念に一般化された。special Lagrangian geometry は Calabi-Yau 多様体上に存在し、special Lagrangian 部分多様体のモデュライ空間論はミラー対称性に関わり、重要である。

ここでは $\mathbb{C}^n$ の special Lagrangian 部分多様体の例をいろいろ考えるため、Harvey-Lawson が与えた $\mathbb{R}^n$ の austere とよばれる部分多様体の normal 束として得られる special Lagrangian cone に注目し、その例に言及する。体積最小性から、これらはもちろん、Hamiltonian stationary な極小部分多様体にもなっている。

極小等径超曲面とその焦部分多様体は compact austere 部分多様体であることから、無限個の等質、及び非等質な special Lagrangian cone が得られることは既に報告した [M]。さらに、極小等径部分多様体、等焦部分多様体とよばれるものからも多くの special Lagrangian cone を得る。

ここでは Bryant による 3 次元 austere 多様体の局所分類 [1] について述べ、cone より広い概念である twisted cone として得られる special

Lagrangian 部分多様体に言及する．また，Bernstein 問題の余次元の高い場合への拡張として，最近得られた Jost-Xin [JX] の結果も紹介する．

1 Calibrated geometry

定義． リーマン多様体 X 上の閉 p 形式 φ が，任意の向き付けられた X の接 p 平面 ξ に対して

$$(1) \quad \varphi_\xi \leq \text{vol}_\xi$$

をみたすとき， (X, φ) を **calibrated manifold** という．

定義． calibrated manifold (X, φ) の部分多様体 M が

$$(2) \quad \varphi|_M = \text{vol}|_M$$

をみたすとき， M を φ manifold という．

Lemma 1.1 $M : \varphi$ manifold は同じホモロジー類のなかで体積最小である．

(次節参照)

例． $(X, \omega) : \text{Kähler 多様体}$ とするとき， (X, ω^p) は calibration を与え， p 次元複素部分多様体 M は φ manifold.

2 Special Lagrangian submanifolds

$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の自然な複素構造を J ，ケーラー形式を $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ とする． $(\mathbb{C}^n, \omega)$ は symplectic 多様体である．

定義． $\mathbb{C}^n$ の Lagrangian 部分多様体 M が同時に極小部分多様体のとき， M を **special Lagrangian 部分多様体** という．

注意. オリジナルな定義は Theorem 2.2 に述べられる同値条件で与えられている.

向き付けられた実 n 平面 $\zeta \subset \mathbb{C}^n$ が **special Lagrangian** とは, Lagrangian であり, かつ $\zeta_0 = \mathbb{R}^n = \{(x, 0)\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ に対して, $SU(n)$ の元 A が存在して $\zeta = A\zeta_0$ となることである.

Theorem 2.1 [3] $\alpha = \Re dz = \Re dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ は *comass one*, すなわち $\alpha(\zeta) \leq |\zeta|$ で, 等号は ζ が *special Lagrangian* の時に限る.

多様体上の *comass one* の閉 n 次形式を **special Lagrangian caribration** という. $\alpha = \Re dz$ は $\mathbb{C}^n$ 上の *special Lagrangian caribration* である.

Theorem 2.2 [3] $\mathbb{C}^n$ の向き付けられた n 次元部分多様体 M が *special Lagrangian* $\Leftrightarrow$ すべての接空間 $T_p M$ が *special Lagrangian*

このときおなじホモロジー類の中で M が体積最小であることは次のようにしてすぐに分かる. M, M' が $\partial M = \partial M'$ をみたし, $H_n(M, \mathbb{R})$ において $[M - M'] = 0$ であるとき $\alpha(T_p M) = |T_p M| = 1$, $d\alpha = 0$ および $\alpha(T_p M') \leq |T_p M'|$ を用いて

$$\text{vol}(M) = \int_M \alpha = \int_{M'} \alpha \leq \text{vol}(M').$$

注意.

(1) *Special Lagrangian calibration* は Calabi-Yau 多様体の上に存在することが知られている. 実際, X を canonical bundle が自明な Kähler 多様体とし, Ω を nowhere-vanishing な正則 n 微分とする. 適当に共形変形して, $|\Omega| = 1$ としてよい. このとき, $\alpha_\theta = \Re(e^{i\theta}\Omega)$ とおくと, *comass one*, すなわち *special Lagrangian calibration* の S^1 族を得る. $\mathbb{C}P^n$ の次数 $n+1$ の超曲面は Calabi-Yau であるが, 特に $\mathbb{C}P^4$ の 5 次超曲面は T^3 fibration をもち, その双対 fibration がミラー対称性と関係する. 一般に

ファイバー T^3 は特異点をもち, special Lagrangian tori のモデュライのコンパクト化が重要である [2].

さて以下では $\mathbb{C}^n$ のみをあつかう.

(2) $\mathbb{C}^n$ の Lagrangian 部分多様体は, 局所的にはある potential 関数 $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて, その勾配ベクトル ∇F のグラフ $\Gamma_F = \{(x, \nabla F(x))\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ として表される. ここに U は $\mathbb{R}^n$ の単連結開領域である. このとき

M が special Lagrangian $\Leftrightarrow$

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \sigma_{2k+1}(\text{Hess } F) = 0.$$

すなわち, $\text{Hess } F$ は固有値を正負の対でもつ.

(3) $(*)$ の C^2 解は, Γ_F が体積最小より, C^ω 級となる (Morrey).

(4) $(*)$ の線形化は楕円型で, 特に Dirichlet 問題は任意の解の C^2 近傍で解ける. $F \equiv 0$ は解だから解は非常にたくさんある.

3 Austere 部分多様体 と special Lagrangian cone

定義. リーマン多様体の部分多様体 M が **austere** $\Leftrightarrow M$ の任意の法方向の第2基本形式の固有値のつくる奇数次の基本対称式は恒等的に0, すなわち M の任意の型作用素は固有値を正負の対でもつ.

austere 部分多様体は必然的に極小部分多様体である. $n=2$ のときはもちろん逆も正しい. 球面 S^{n-1} の部分多様体 M が austere であるのはそのコーン CM が $\mathbb{R}^n$ の austere 部分多様体であるときに限る.

Theorem 3.1 [3] M を多様体 X の部分多様体とすると, M の conormal 束

$$N^*M = \{(x, \xi) \in T_x^*X \mid x \in M, \xi(T_x M) = 0\}$$

は T^*X に自然にはいる *symplectic* 構造に対する *Lagrangian* 部分多様体である。特に

(1) $X = \mathbb{R}^n$ のとき,

$$NM = \{(x, \nu(x)) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \mid x \in M, \nu(x) \in N_x M\}$$

は $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ の *Lagrangian* 部分多様体で, これが *special* $\Leftrightarrow M$ は *austere*.

(2) M を S^{n-1} の *austere* 部分多様体 とすると

$$CNM = \{(tx, s\nu(x)) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \mid x \in M, \nu(x) \in N_x M, t, s \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の n 次元 *special Lagrangian cone*.

4 Bryant による 3 次元 *austere* 部分多様体の分類

このように, *austere* 部分多様体は *special Lagrangian geometry* において, 重要な役割をする. Bryant は $\mathbb{R}^n$ の *austere* 部分多様体の分類を考えた. 部分多様体 $f: M^p \rightarrow \mathbb{R}^{p+r}$ と $x \in M$ に対し, 法方向 ν に対する第 2 基本形式は対称 2 次形式であるから, $T_x M$ 上の 2 次関数を定義していると思える. 第 2 基本形式は法方向に対して線形に定まるので, $A_x \subset S^2(T_x M)$ をそれらが張る部分空間と定義する.

定義. 内積をもつ実ベクトル空間 V 上の 2 次関数のつくる空間 $S_2(V^*)$ の部分空間 Q が *austere* $\Leftrightarrow Q$ の各要素の固有値の奇数次基本対称式 $= 0$.

$n = 3$ のとき, *austere* 部分空間 Q は次の 4 つのタイプに分類される. $\mathbb{R}^3$ の直交座標を x_1, x_2, x_3 とするとき, Q は次の 1 ~ 4 いずれかの, 2 次関数の張る空間の $O(3)$ 共役元でえられる.

1. $A_0 = (0)$
2. $A_1 = (x_1^2 - x_2^2)$

$$3. A_2 = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$$

$$4. A'_2 = (x_1x_2, x_1x_3)$$

3次元 austere 部分多様体 M の第2基本形式は、上の4つの型のただひとつに属する。これは M は極小部分多様体なので解析的であり、 M のある開集合上で第2基本形式の型がきまれば、 M の稠密開集合上で第2基本形式はこの型になるからである。そこで、3次元 Austere 部分多様体 M も対応する4つの型に分類される。すなわち

1. M はアフィン部分空間 (全測地的)

2,3. Gauss 写像が退化する Twisted cone

4. $\mathbb{R}^5$ の generalized helicoid $f : U \rightarrow \mathbb{R}^5$, ここに $U \subset \mathbb{R}^3$ を適当な開集合として

$$f(x) = (\lambda_0 x_0, x_1 \cos(\lambda_1 x_0), x_1 \sin(\lambda_1 x_0), x_2 \cos(\lambda_1 x_0), x_2 \sin(\lambda_1 x_0)).$$

さて、2,3 の Twisted cone は次のようにして与えられる。 $u : \Sigma \rightarrow S^{2+r}$ を極小曲面とすると u は

$$d * du = -2\phi u$$

をみたす。ここに ϕ は Σ の面積要素。 b を

$$d * db = -2\phi b$$

をみたす M 上の関数とする。 $\beta = u * db - b * du$ できるベクトル値1形式とする。これは閉形式であることがただちにわかるので、 M 上のベクトル値関数 v で、 $dv = \beta$ となるものが存在する。このとき

$$f = v + tu : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3+r}$$

は3次元 austere 部分多様体となる。 $v = 0$ のときは通常の cone であることから、これを Twisted cone という。したがってこの conormal 束も special Lagrangian cone を与える。

5 Generalised Bernstein Problem

Bernstein 問題: $\mathbb{R}^n$ の完備な極小グラフで与えられる超曲面は超平面か?

$n \leq 7$ では正しい (De Giorgi, Almgren, Simons) が, $n > 7$ では反例がある (Bombieri-De Giorgi-Giusti) .

Bernstein 問題の一般化 (Jost-Xin (99,01)) $\Gamma_F = \{(x, \nabla F(x)) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n\}$ が special Lagrangian, したがって体積を最小にしているとき, これが n 次元アファイン空間となるのはいつか?

動機付けは, 上でも述べたミラー対称性に現れる special Lagrangian torus fibration の fiber が一般に特異点をもつことから, この特異点の構造を調べることの重要性にある.

Theorem 5.1 [4] Γ_F が超平面 $\Leftrightarrow$ ある $\beta < \infty$ に対して

$$\{\det(I + (\text{Hess}(F))^2)\}^{1/2} \leq \beta$$

証明では一般化されたガウス写像 $G : M \rightarrow Gr^+(n, 2n)$ の像が, Lagrangian Grassmann という全測地的部分空間の “凸集合” におさまるなら, 定値写像になるという, 極小曲面のガウス写像の値分布論を一般化した議論を行っている.

6 Remarks

1. austere 部分多様体の局所分類は $n \geq 4$ では大変煩雑になる. austere 超曲面に限ると, 主曲率の重複度が 2 以上では主曲率分布の積分多様体は球面になり, すべての主曲率の重複度が 2 以上ならば, これは Dupin 超曲面で, コンパクトなものはおそらく極小等径超曲面のみであろう (予想).

重複度 1 の主曲率を持つ場合はかなり複雑になるので, コンパクト超曲面の場合の考察から始めるべきであろう.

2. special Lagrangian graph の Gauss 写像の考察は重要と思われる. これは Grassmann 多様体 $G(n, 2n)$ への調和写像を与えており, 特に像はある全測地的部分空間 Lagrangian Grassmann にはいる. $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$ の special Lagrangian graph については Lewy による興味深い結果がある [5].

References

- [1] R. Bryant, *Some Remarks on the Geometry of Austere Manifolds*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica (Nova Sie) **21** (1991) 133-157.
- [2] M. Gross and P. M. H. Wilson, *Mirror symmetry via 3-tori for a class of Calabi-Yau threefolds*, Math. Ann. **309** (1997) 505-531
- [3] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated Geometries*, Acta. Math. **148** (1982) 47-157.
- [4] J. Jost and Y. L. Xin *A Bernstein theorem for special lagrangian graphs* preprint no.4 MPI (2001)
- [5] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian of a homeomorphism by harmonic gradients*, Ann. of Math. **88** (1968) 518-529
- [6] R. Miyaoka, 等径超曲面今昔, 数理研講究録 (2001)

Reiko MIYAOKA,
 Department of Mathematics,
 Sophia University
 Kioi-cho, Chiyoda-ku, 102-8554 Tokyo, JAPAN
E-mail Address: r-miyaok@hoffman.cc.sophia.ac.jp