

Orbit-preserving transformation groups for a flow

§0. 序言

小和田 正 (津田塾大)

与えられた可測な flow T に対して T の orbits を保つ Ω 上の bimeasurable な変換の全体 G を導入しその構造と T の性質との関係を調らべるのがこの講演の目的である。

いくつかの点で flow T の性質は G とかわりともまともか、具体的な flow を調らへるには遭遇するのであるが、この話では、flow のエルゴード性、スペクトル型、エントロピー、及び flow の time change の問題と G の関係が論ぜられる。

G は変換の普通の積について群をなしているが、以下の議論では群構造をくわしく調らべることはなされていない。むしろどんな元を含むかとかどんな部分群を含むかといった程度しか与えられていない。一つの要因は、 G に flow T の性質を調らべるのに望ましい topology が入るのか不明な事である。 Ω に topology が入っていて、それについて連続な G の変換に制限した群を考えれば充分なのかも知れないが今の段階ではそういう設定をする必要は生るかつた。たとえば flow T を time change してえられる flow かもとの flow T と同型かという問題で同型写像の連続性がどの程度期待出来るかということなどにかかわるのである。

G の導入の動機のもう一つとして、E. Hopf 以来 Ya. G. Sinai, Anosov 等とつながって来た transverse fields の概念がある

。その特別な場合として与えられた flow $J = (\Omega, \mathcal{B}, P, T_t)$ にお
 おし flow $Z = (\Omega, \mathcal{B}, P, Z_t)$ が交換関係 $T_t Z_{s\omega} = Z_{t(s, s\omega)} T_{t\omega}$
 が成立するとき Z を J の transversal flow という。 Z 達の性
 質から flow J の性質を明らかにしようというのが彼等の考
 え方であるが、我々は transversal commutation を相対的なもの
 と認識する ^{立場} によって、 Z を調らべるのに交換関係
 をみたす変換群 $\{T_t\}$ を含むより広い群 G を導入するものであ
 る。したがって彼等の立場に相対的な立場にたっている。

一般にエルゴート理論に於いては、一つの自己同型に対す
 る研究手段に比べて flow に対する研究手段は少ないように
 思われるが、我々の方法がどの程度 flow の研究に役立つも
 のかは今後の研究 ^を またねばならない。

§1 定義

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を standard space, P を確率測度とする。空間
 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の自己同型の群 $\{T_t\}$ が $(\mathcal{B})$ 可測、又は単に
 可測 flow であるとは、

$$\{(t, \omega) \mid T_t \omega \in E \in \mathcal{B}_\Omega\} \in \mathcal{B}_R \times \mathcal{B}_\Omega \quad \text{for } \forall E \in \mathcal{B}_\Omega$$

が成立することである。ここで $\mathcal{B}_R$ は実直線 R 上の topological
 Borel field である。以下で単に flow という時は可測な
 flow を意味するものとする。

定義 1.1 O_ω と点 $\omega \in \Omega$ の flow J に関する orbit, 即ち $O_\omega = \{T_t \omega; -\infty < t < \infty\}$ とする。 σ を orbit を保つ Ω 上の両可測な変換; $\sigma O_\omega = O_\gamma$, $\omega, \gamma \in \Omega$, とするとかかる σ の全体 G は普通の変換の積に関して群になる。変換 $\sigma \in G$ は orbit-preserving であるという。特に $\sigma O_\omega = O_\omega$

をみたす σ の全体 G_0 は G の部分群となしているが変換 $\sigma \in G_0$ は strictly orbit-preserving であるという。記号 C で、全ての T_t ($-\infty < t < \infty$) と交換可能な両可測変換を表わすことにする。明らかに C は G の部分群になっている。更に O 及び O_0 を Ω 上の automorphisms 全体と G 及び G_0 との共通集合とする。 O 及び O_0 はそれぞれ G 及び G_0 の部分群となっている。

上に定義した変換群達は次の意味で flow J の invariant になっている。即ち flow $J^\circ = (\Omega^\circ, B^\circ, P^\circ, T_t^\circ)$ が flow J と同型 ($\theta T_t^\circ \theta^{-1} = T_t$) になっているれば, $\theta G^\circ \theta^{-1} = G$, $\theta G_0^\circ \theta^{-1} = G_0$, 等々である。

§ 2. flow の時間変更と群 G

群 G は以下に述べる意味で flow の時間変更 (time change)

と密接な関係をもっている。

定義 2.1 関数 $\tau = \tau(t, \omega) ; R \times \Omega \rightarrow R$ が次の三条件をみたす時 flow J の time change function と呼ぶ。

- (1) $\tau(t, \omega)$ は a.e ω に対して finite valued 且つ $R \rightarrow R$ の 1 対 1 の写像である。
- (2) $\tau(t+s, \omega) = \tau(t, \omega) + \tau(s, T_{\tau(t, \omega)} \omega)$ a.e ω
- (3) $\tau(0, \omega) = 0$ a.e ω .

J の time change function の全体を $\mathcal{T}$ と書くことにする。

特に τ が B -可測 のとき measurable time change function と云う。

変換 $\sigma \in G$ は次の式

$$\sigma T_t \sigma^{-1} \omega = T_{\tau_\sigma(t, \omega)} \omega$$

で関数 $\tau_\sigma(t, \omega)$ を定義するか

Prop. 2.1 1) $\tau_\sigma = \tau_\sigma(t, \omega)$ は flow J の time change function である。

$$2) \quad \tau_{\sigma_1 \sigma_2}(t, \omega) = \tau_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_2}(t, \sigma_1^{-1} \omega), \omega) \quad \text{a.e } \omega$$

を得る。2) のようにして我々は写像: $\sigma \rightarrow \tau_\sigma$ ($G \rightarrow \mathcal{T}$) を得る。更に $S_t \equiv \sigma T_t \sigma^{-1}$, $Q(E) \equiv P(\sigma^{-1} E)$ とおくことにより 新しい flow $S^\sigma = (\Omega, B, Q, S_t)$ がつくられるが明らかに S^σ は J に同型の可測な flow である。

$\mathcal{F}(G) = \{T_\sigma \in \mathcal{F} ; \sigma \in G\}$ とおく。もし $\sigma_1, \sigma_2^{-1} \in C$ ならば $\sigma_1 \sim \sigma_2$ とかくことにすれば、 $\sim$ は同値関係であることは容易にわかる。今 $\sigma_1 \sim \sigma_2$ とすれば

$$\begin{aligned} T_{T_{\sigma_1}(t, \omega)} \omega &= \sigma_1 T_t \sigma_1^{-1} \omega = \sigma_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1 T_t \sigma_1^{-1} \omega \\ &= \sigma_2 T_t \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_1^{-1} \omega = \sigma_2 T_t \sigma_2^{-1} \omega = T_{T_{\sigma_2}(t, \omega)} \omega \end{aligned}$$

従って $T_{\sigma_1}(t, \omega) = T_{\sigma_2}(t, \omega)$ a.e. ω となる。この事から quotient group $G/\sim$ から $\mathcal{F}(G)$ への写像

$$[\sigma] \rightarrow T_\sigma \in \mathcal{F}(G) \quad ([\sigma] \text{ は } \sigma \text{ を代表元とする class})$$

は bijection であることがわかる。

time change function $\tau \in \mathcal{F}$ が measurable ならば

$$S_t \omega \equiv T_{\tau(t, \omega)} \omega$$

によって S_t を定義すると後述するように (定理 3.3), $\{S_t\}$ は time measurable ~~function~~ ^{transformations} の 1-parameter group になるが $\tau \in \mathcal{F}(G)$ になる為の条件は不明である。以上をまとめて

命題 群 $G/\sim$ の元は flow J の time changed flow $S^{[\sigma]}$ をのみおとし $S^{[\sigma]}$ は J に同型になる。又 写像 $G/\sim \ni [\sigma] \rightarrow T_\sigma \in \mathcal{F}(G)$ は bijection になっている。

問題は $\mathcal{F}(G)$ の $\mathcal{F}$ の中での characterization である。

§ 3 コホモロジー $H^1(J, R)$ と time change function

この節では flow J の time change function の class を characterize する為に コホモロジー $H^1(J, R)$ を導入する。
便宜上 一般の力学系のコホモロジーを定義しておく。

(X, B, μ) を測度空間, $\mathcal{G}$ を X 上の両可測変換で
 $\mu(E)=0$ の時は $\mu(gE)=0$, $E \in B$, $g \in \mathcal{G}$ をみたすもの
の群とする。又 Σ を或る群とする。 $\mathcal{G} \times X$ から Σ への写像 φ が

$$\varphi(g_2 g_1, \omega) = \varphi(g_1, \omega) \varphi(g_2, g_1 \omega)$$

をみたすとき、 φ を 力学系 $(X, B, \mu, \mathcal{G})$ の群 Σ に
関する コサイクルと呼ぶ。この時コサイクルの全体を記号
 $\tilde{H}^1(\mathcal{G}, \Sigma)$ で表わす。コサイクル φ 及び $\gamma \in \tilde{H}^1(\mathcal{G}, \Sigma)$
が コバングリー h に関して互いにホモログであるとは
は

$$\varphi(g, \omega) h(\omega) = \gamma(g, \omega) h(g\omega)$$

をみたす X 上の関数 $h=h(\omega)$ が存在する事を云う。

明らかに ホモロークの関係は 同値関係である。コサイ
クルのこの関係による同値類のなす群を $\mathcal{G}$ の Σ に関する
コホモロジーと呼び $H^1(\mathcal{G}, \Sigma)$ で表わす。

特に flow $J=(\Omega, B_\Omega, P, T_t)$ に対して群 $\{T_t\}$ の実加法
群 R に関する コホモロジー $H^1(J, R)$ と考えよう。

time change function $\tau \in \mathcal{F}$ に対して、時間変換についての
の添関数 φ を

$$\varphi(u, \omega) = t \quad \text{if } \tau(t, \omega) = u$$

で定義する。容易に

補題 3.1 φ は次の条件をみたす

- a) $\varphi = \varphi(u, \omega)$ は u について $R \rightarrow R$ の 1対1 の上への
写像である (a.e. ω)。
- b) $\varphi(u+v, \omega) = \varphi(u, \omega) + \varphi(v, T_u \omega) \quad \text{a.e. } \omega$
- c) $\varphi(0, \omega) = 0 \quad \text{a.e. } \omega$

を得る。 φ を τ に対応する (flow T の) additive functional
と呼ぶ。つまり, additive functional とは $H^1(J, R)$ の
コサイクルである。特に $\mathcal{F}(G)$ に対応する additive fcl. につ
いて次の事がわかる。

補題 3.2 $\tau_\sigma \in \mathcal{F}(G)$ 及び $\tau_{\sigma^{-1}}$ に対応する add. fcl. $\varphi_{\sigma^{-1}}$

$$\text{について} \quad \tau_\sigma(t, \sigma\omega) = \varphi_{\sigma^{-1}}(t, \omega) \quad \text{a.e. } \omega$$

が成立する。

上の補題から τ_σ は $\varphi_{\sigma^{-1}}$ が可測の時且つその時に限り可
測になることがわかる。二つのコサイクル φ 及び ψ が互い
にホミローグになるための十分条件を与えよう。

定理 3.1 共に可測な コサイクル φ と ψ が 条件

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S [\varphi(t, \omega) - \psi(t, \omega)] dt < \infty \quad \text{a.e. } \omega$$

を満たすならば φ と ψ は互いに $\mathbb{P}$ -エロージである。

証明 $\tilde{h}(\omega) \equiv \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S [\varphi(t, \omega) - \psi(t, \omega)] dt$

$$B = \{\omega \mid \tilde{h}(\omega) < \infty\}$$

とすれば $T_t B \subset B$ である

$$\begin{aligned} \tilde{h}(T_t \omega) &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S [\varphi(s, T_t \omega) - \psi(s, T_t \omega)] ds \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S [\varphi(t+s, \omega) - \varphi(t, \omega) - \psi(t+s, \omega) + \psi(t, \omega)] ds \\ &= \tilde{h}(\omega) - \varphi(t, \omega) + \psi(t, \omega) \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(B) = 1$ である $\tilde{h}$ と $\tilde{h}$ の 1 つの measurable version とすれば

$$\varphi(t, \omega) + \tilde{h}(T_t \omega) = \psi(t, \omega) + \tilde{h}(\omega) \quad \text{a.e. } \omega.$$

次に

定理 3.2 flow T は ergodic であるとする。共に可測な コサイクル φ と ψ が 可積分な コバントリール h に関して $\mathbb{P}$ -エロージならば

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S [\varphi(s, \omega) - \psi(s, \omega)] ds < \infty \quad \text{a.e. } \omega$$

証明
$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s [\varphi - \psi] ds = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s [h(T_s \omega) - h(\omega)] ds$$

$$= \int_{\Omega} h(\omega) d\mu - h(\omega) .$$

以下では物特に $\mathcal{F}(G_s)$ に属す time change function の characterization について述べる。

Ω 上の 実可測関数 $f = f(\omega)$ が 条件

(C) $F_\omega(t) = f(T_t \omega) - f(\omega) + t$ が t について $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ 上への 1対1 なる) 関数

をみたすとき f は admissible であると言ふ。

f を admissible function とし、

$$\sigma \omega = T_{f(\omega)} \omega, \quad \omega \in \Omega$$

によって Ω 上の 変換 σ を定義する。

定理 3.3 f を admissible function とし, Ω 上の 変換 σ を

$$\sigma \omega = T_{f(\omega)} \omega, \quad \omega \in \Omega$$

によって定義すると σ は strictly orbit-preserving transf. on Ω である, 即ち $\sigma \in G_s$.

証明 $\mathcal{J}^* = (\Omega^*, \mathcal{B}_{\Omega^*}, P^*, T_t^*)$ を $\mathcal{J}$ の S -表現とする。又 θ を その 天井関数 ~~とす~~, $G(p, t) = t$ 及び

$F(p+t) = \Theta(p)$ とおく。但し p は basic space Ω^0 の $\bar{x}$ Θ は ceiling function とする。basic automorphism は T で表わす。

$$M^* = \{ (p, t) \mid p \in M, M \subset \Omega^0 \} \text{ 及び } M^*(a, b) =$$

$$\{ (p, t) \mid a \leq G(p, t) < b \} \cap M^* \text{ とおく。又}$$

$$W_m = \{ (p, x) \in \Omega^* \mid \sum_{k=0}^{m-1} \theta(T^k p) \leq f(p, x) + b < \sum_{k=0}^m \theta(T^k p) \}$$

$$W_0 = \{ (p, x) \in \Omega^* \mid a + f(p, x) \leq G(p, x) < f(p, x) + b < \theta(p) \} \quad (m \geq 1)$$

とし (特に $M \in \Omega^0$ の measurable set, $TM = N$ とおく。

$$\sigma \text{ が fimeasurable を言うには } M^*(a, b) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (M(a, b) \cap W_n)$$

だから たとえば $\sigma(M^*(a, b) \cap W_1)$ が Ω^0 の Borel set なることを云えば ~~十分である~~ 十分である。(on standard space

だから Ω^0 に Borel structure を入り T は ~~可測~~ 可測にとれ

$M^*(a, b)$ なる σ の Borel sets なる Borel field は生成される。

$f(p, x)$ は Ω 上の admissible function f を Ω^* にうつしかえたものである) しかるに

$$\sigma(M^*(a, b) \cap W_1) = (M^* \cap W_0) \cup$$

$$\cup \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \bigcup_{k=0}^{\infty} M^* \cap [k2^{-n} \leq b + f(p, x) - \theta(T^k p) < (k+1)2^{-n}] \cap [k2^{-n} + a - b \leq G(p, x) < (k+1)2^{-n}] \right\}$$

即ち $\sigma(M(a, b) \cap M_1)$ は B -可測である。 $M^*(a, b) \cap W_m$

について ~~同様である~~ 同様である。又 σ の可測性について同様に考えられるから省略する。

以下では σ が σ 可測であることを言う。

$\sigma\omega = \sigma\zeta$, $\omega, \zeta \in \Omega$ とする、即ち $T_{f(\omega), \omega} = T_{f(\zeta), \zeta}$ である。

$t \equiv f(\omega) - f(\zeta)$ とおけば、 $\zeta = T_t\omega$ だから

$$\sigma\zeta = \sigma T_t\omega = T_{f(T_t\omega) + t}\omega = \sigma\omega = T_{f(\omega), \omega}$$

従って $f(T_t\omega) - f(\omega) + t = 0$, 故に $t = 0$ 即ち $\zeta = \omega$ 。

任意の $\zeta \in \Omega$ に対し 元 $\omega \in \Omega_\zeta$ と 時間 $t \in \mathbb{R}$ をえらんで

$\zeta = T_t\omega$ と表わす。 $t \equiv \zeta - f(T_t\omega)$ とおきように t を

えらべるから $\zeta = T_{f(T_t\omega) + t}\omega = T_{f(T_t\omega)}T_t\omega = \sigma T_t\omega$

即ち σ は onto mapping である。以上のことから $\sigma \in G_d$ が云えた。

$\sigma \in G_d$ を与えれば $\sigma\omega = T_t\omega$ とする 時間 t が存在するがこれを $f_\sigma(\omega)$ と表わす。同様 $F_\omega(t) \equiv f_\sigma(T_t\omega) - f_\sigma(\omega) + t$ は明らかに 1対1 である。 f_σ の可測性は不明である。

命題 3.1 time change function $\tau_\sigma \in \mathcal{F}(G_d)$ は次の形を
(といる); $\tau_\sigma(t, \omega) = f_\sigma(T_t\omega) - f_\sigma(\omega) + t$ a.e. ω 。

普通の時間を φ_0 と表わす、即ち $\varphi_0(t, \omega) = t$, $\forall \omega \in \Omega$ 。

当然 φ_0 は $\tilde{H}^1(J, \mathbb{R})$ の元である。これを用いて time change function τ が G_d の元から induce される為の十分条件を与える。

定理 33 φ を $\tau \in \mathcal{T}$ に対応する additive f.t.l. とする。

もし φ が φ_0 に admissible なコバウンダリーに関してホエーグなら τ は G_δ の元から induce される 即ち $\tau \in \mathcal{T}(G_\delta)$ である。

証明. $\varphi(t, \omega) = f(T_t \omega) - f(\omega) + \varphi_0(t, \omega)$ とする。 f が admissible だから 前の結果から $\sigma \in G_\delta$ が存在して $f = f_\sigma$ 。又 σ に対応する time change function を τ_σ とすると $\varphi(t, \omega) = \tau_\sigma(t, \sigma\omega) = \varphi_{\sigma^{-1}}(t, \omega)$ a.e. ω である。故に $\tau(t, \omega) = \tau_{\sigma^{-1}}(t, \omega)$ を得る。

以上から

定理 34 time change function τ に対応する φ が

可測で且つ
$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S [\varphi(t, \omega) - t] dt < \infty \quad \text{a.e. } \omega$$

ならば τ は G_δ の元から induce されて、 τ による time changed flow は flow T に metrically isomorphic になる。

これらの議論を A. Kolmogorov と I. Arnold が研究した トーラス上の flow の time change の問題へ応用してみよう。

M_2 を 2次元トーラス, $\mathcal{B}$ を topological Borel field, $dx dy$ を normalized Lebesgue measure, T_t を 微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = r \quad (r \text{ is irrational number}) \end{cases}$$

により定義される変換群とし flow $J = (M_2, \mathcal{B}, dx dy, T_t)$

を与える。又 $K(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の周期1の関数で

$0 < K(x, y) \in C^{(k)} \quad (k \geq 3)$ と仮定する。

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dx dy = 1$$

additive fth $\varphi = \varphi(t, x, y)$; $\varphi(t, x, y) = \int_0^t K(x+s, y+rs) ds$

を考えよう。time changed flow $S = (M_2, \mathcal{B}, Q, S_t)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{K(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{r}{K(x, y)} \\ dQ(x, y) = K(x, y) dx dy \end{cases}$$

に対し「flow J と S は同型か」というのが我々の問題である。それに対して次の結果を得る。

定理 3.5 r に対して $H, L > 0$ が存在して

$$|m + nr| > \frac{L}{(|m| + |n|)^H}, \quad 0 < H < k-2$$

かすべての整数 m, n について成立するものとする。この時

flow J と flow S は測度論的に同型である。

証明 $K(x, y) = \sum_{m, n} C_{m, n} e^{2\pi i(m x + n y)}$ を $K(x, y)$ の Fourier 展開とする

$$\varphi(t, x, y) = t + \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} C_{m, n} \frac{e^{2\pi i(m + nr)t} - 1}{2\pi i(m + nr)} e^{2\pi i(m x + n y)}$$

より

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S [\varphi - t] dt = \sum \frac{C_{m, n}}{2\pi i(m + nr)} e^{2\pi i(m x + n y)}$$

を得る。右辺が絶対収束することと示そう。

$K(x, y)$ を偏微分する 2 によって Fourier 係数 $C_{m, n}$ の増加式が次のように得られる。

$$2^{k-1} \pi^k (|m| + |n|)^k |C_{m, n}| \leq \text{Max} \left\{ \text{Max} \frac{\partial^k}{\partial x^k} K, \text{Max} \frac{\partial^k}{\partial y^k} K \right\}$$

$$\therefore \frac{|C_{m, n}|}{2\pi |m + nr|} \leq M / 2^k \pi^{k+1} L (|m| + |n|)^{k-H} \quad \equiv M$$

$N(j)$ を $|m| + |n| = j$ とする格子点 (m, n) の個数とすれば

$$N(j) \leq 2^2 (j+1) \leq 2^3 j$$

(したがって

$$\begin{aligned} \frac{M}{2^k \pi^{k+1} L} \sum (|m| + |n|)^{H-k} &\leq \frac{M}{2^k \pi^{k+1} L} \sum^{\uparrow \infty} (N(j) j)^{H-k} \\ &\leq \frac{M}{2^k \pi^{k+1} L} 2^3 \sum j^{H-k+1} \end{aligned}$$

もし $H < k-2$ なら右辺は収束する。おのり定理より J は S^1 同型であることが結論される。

§4 コサイクル f_J in $H^1(G_s, R)$

この節では flow J によって決まる 群 G_s の コサイクル f_J を考察する。元 $\sigma \in G_s$ に対し $f_\sigma = f_\sigma(\omega)$, $\sigma\omega = T_{f_\sigma(\omega)}\omega$ に対応する 2 つを省きみたか $\{f_\sigma; \sigma \in G_s\}$ は次の性質をみたすことが容易にわかる。

$$\text{補題 4.1} \quad f_{\sigma_2\sigma_1}(\omega) = f_{\sigma_1}(\omega) + f_{\sigma_2}(\sigma_1\omega) \quad \text{a.e } \omega$$

$G_s \times \Omega$ から R への mapping を

$$f_J(\sigma, \omega) \equiv f_\sigma(\omega)$$

で定義すれば上の補題から $f_J \in \tilde{H}^1(G_s, R)$ である。 $\tau_\theta \in \mathcal{F}(G_s)$ に対し, $G_s \times \Omega \rightarrow R$ なる mapping $\tau_\theta \circ f_J$ を

$$(\tau_\theta \circ f_J)(\sigma, \omega) = \tau_\theta(f_J(\sigma, \omega), \omega)$$

で定義すると

補題 4.2 $\tau_\theta \circ f_J$ は f_J に ホモロークな $\tilde{H}^1(G_s, R)$ の コサイクルである。

証明。 $\tau_\theta \circ f_J(\sigma_2\sigma_1, \omega) = \tau_\theta(f_J(\sigma_2\sigma_1, \omega))$

$$= \tau_\theta(f_J(\sigma_1, \omega), \omega) + \tau_\theta(f_J(\sigma_2, \sigma_1\omega), T_{f_J(\sigma_1, \omega)}\omega)$$

$$= (\tau_\theta \circ f_J)(\sigma_1, \omega) + (\tau_\theta \circ f_J)(\sigma_2, \sigma_1\omega)$$

又 $\tau_\theta(t, \omega) = f_\theta(T_t\omega) + f_\theta(\omega) + t$ に於いて $t \equiv f_J(\sigma, \omega)$

とおくことにより $\tau_\theta \circ f_J(\sigma, \omega) = f_\theta(T_{f_J(\sigma, \omega)}\omega) - f_\theta(\omega) + f_J(\sigma, \omega)$

$$= f_\theta(\sigma\omega) - f_\theta(\omega) + f_J(\sigma, \omega)$$

もし $T_0 \circ f_J$ は エバントリー f_0 に属して f_J に ホモロークである。

逆に

補題 4.3 コサイクル $g = g(\sigma, \omega) \in \tilde{H}^1(G, R)$ が admissible
エバントリー $h = h(\omega)$ に属して コサイクル f_J に ホモロークな
ならば G の 元 θ が存在して $T_\theta \circ f_J = g$ a.e. ω

証明 $\theta\omega \equiv T_{h(\omega)}\omega$, $\omega \in \Omega$ で θ を 定義する。 $\theta \in G$ である。
 $T_\theta(t, \omega) = h(T_t\omega) - h(\omega) + t$ である。 したがって

$$\begin{aligned} (T_\theta \circ f_J)(\sigma, \omega) &= h(T_{f_J(\sigma, \omega)}\omega) - h(\omega) + f_J(\sigma, \omega) \\ &= h(\sigma\omega) - h(\omega) + f_J(\sigma, \omega) \\ &= g(\sigma, \omega). \end{aligned}$$

以上の二つの補題から J と 同じ trajectories をも flow
が J に同型になるための条件を次のような形で与えることが出来る。

定理 4.1 $S = (\Omega, \mathcal{B}, Q, S_t)$ を flow J と同じ軌道をもつ flow とする。 もし コサイクル f_S と f_J が admissible
なエバントリーに属して ホモロークならば S と J は 同型である。
又 g が admissible エバントリーに属して f_J に ホモローク
ならば、 J に同型な J の time changed flow S が存在して
 $g = f_S$ である。

§5. カ学系 $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, A)$ と flow J の インター

この節では カ学系 $A = (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, A)$ の構造と J の インター
 $\text{ker}(J)$ との関係について述べる。 A の定義は次の通りで
 ある。

timechange functions $\tau_\sigma(t, \omega) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ か $\forall \omega$ について、微分係数

$$\left. \frac{d\tau_\sigma(t, \omega)}{dt} \right|_{t=0} \neq 0 \quad \text{をもつ時、class } \mathcal{F}(A) \text{ に属するといふ}$$

$$A = \{ \sigma \in \mathcal{O} \mid \tau_\sigma \in \mathcal{F}(A) \} \quad \text{と置く。}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\tau_\sigma(t+h, \omega) - \tau_\sigma(t, \omega)]/h = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_\sigma(h, T_{\tau_\sigma(t, \omega)} \omega)/h$$

だから $\tau_\sigma \in \mathcal{F}(A)$ は 任意の t で微分可能である。又

$\sigma_1, \sigma_2 \in A$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_{\sigma_1 \sigma_2}(t, \omega)}{t} = \lim_{\tau_{\sigma_2} \rightarrow 0} \frac{\tau_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_2}(t, \sigma_1^{-1} \omega), \omega)}{\tau_{\sigma_2}(t, \sigma_1^{-1} \omega)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_{\sigma_2}(t, \sigma_1^{-1} \omega)}{t}$$

より $\sigma_1 \sigma_2 \in A$ を得る。又 $t = \tau_{\sigma^{-1}}(\tau_\sigma(t, \sigma \omega), \omega)$ だから

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{\sigma^{-1}}(s, \omega)}{s} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tau_\sigma(t, \sigma \omega)} = \frac{1}{\tau'_\sigma(0, \sigma \omega)}$$

即ち $\sigma^{-1} \in A$, if $\sigma \in A$ である。したがって A は群をなし
 ていることがわかる。明らかに 群 $\{T_x\} \subset A$ だから
 カ学系 $A = (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, A)$ は $J = (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, T_x)$ の拡張
 になっている。

補題 5.1 (Yuzvinsky) T_λ is ergodic flow J の time change function $\sigma \in A$ とすれば

$$T_\sigma(t\omega) = \lambda t \quad \text{a.e. } \omega$$

定理 5.1 Flow J は ergodic なるものとする。もし J の エン
トロピー $h(J)$ が $0 < h(J) < \infty$ ならば

$$A = \mathcal{O} \cap \mathcal{C}$$

証明. $\mathcal{S} = (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, S_t)$ を $T_\sigma \in A$ による J の time
changed flow とする。

$$h(T_1) = h(S_1) = h(T_\lambda) = \lambda h(T_1)$$

従って $\lambda = 1$ 。故に $S_t \omega = \sigma T_t \sigma^{-1} \omega = T_t \omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$ 。

一方 $A \supset \mathcal{O} \cap \mathcal{C}$ は明らかである。

定理 5.2 $J = A \cap G_1$, 且 J は ergodic なるものとする。

証明. $\sigma \in A \cap G_1$ とする。 $U_\sigma(t, \omega) = f_\sigma(T_t \omega) - f_\sigma(\omega) + t$

$$\sigma T_t \omega = T_{f_\sigma(T_t \omega) + t} \omega = T_t \sigma \omega$$

であるが上の補題から $f_\sigma(T_t \omega) - f_\sigma(\omega) + t = \lambda t$ a.e. ω

よって J が ergodic ため $f_\sigma(\omega) = c(\text{const})$ a.e. ω 従って

$$\sigma \omega = T_{f_\sigma(\omega)} \omega = T_c \omega, \quad \sigma = T_c \quad \text{a.e. } \omega.$$

系 5.1 flow T は ergodic であるとする。もし 或る T_0 と交換可能でない自己同型 $\sigma \in A$ が存在すれば エントロピー $h(T)$ は zero or infinite である。

上の系で = 通り の可能性 $h(T)=0$, $h(T)=\infty$ が有り得るか 実際にどちらの場合も起り得る。後者の例としては T が Brown 運動の flow がある。前者の例としては ロバチエスキー平面の horocycle flow などがある。

エントロピーから力学系について今の定理から $A = \Omega \cap C$ であるが、必ずしも $A = T$ とはならない。その観点から flow ではなくて automorphism について、2 通りの類似な approach をする。これによって次の結果を述べることに出来る。即ち $T = (\Omega, B, P, T)$ を 普通の two sided Bernoulli shift の力学系とし、状態は有限 $x_1, \dots, x_n$ とし、それらから出現する確率をそれぞれ $p_1, \dots, p_n$ とする。状態空間 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ の 1 つの permutation を L とし、 Ω 上の変換 σ_L を

$$\sigma_L(\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) = (\dots, L\omega_{-1}, L\omega_0, L\omega_1, \dots)$$

で定義する。又 K を Ω 上の連続 (discrete top. に ついて) な変換の全体とする。

定理5.2. 群 $A \cap K$ が T と全ての σ_L によって生成されるのは $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ の時且その時に限る。又 $p_i \neq p_j$ となる pair p_i, p_j が存在すれば $A \cap K = \{T^m\}$ となる。

state が一様分布しているとは $\{T^m\} \subseteq A$ となっている訳である。従ってこの時力学系 (A, T) は $\{T^m\}$ の nontrivial な拡張になっている。

以下では A の structure によって flow T のスペクトル型がまるごとあることを示す。下の定理の例として horocycle flow などを考えられたい。

定理5.3 T を ergodic flow とする。

もし A が 1-parameter ^{sub}group $\{\sigma_s\} \mid \sigma_s \in C\}$ を含むならば T は連続スペクトルを ~~含む~~ もつ。