

2次元乱流は“乱流”か？

京大数理解 木田重雄 (Shigeo Kida)

京大理物理 山田道夫 (Michio Yamada)

京大理物理 大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

1. はじめに

乱流現象の最も基本的な性格は、決定論的な方程式に支配されているにもかかわらず、現象が偶然的に見える点である。その原因は、外部からの制御できない微かな擾乱が存在し、それが系の時間発展と共に有意の大きさに発達する点に求めることができる。即ち、乱流系は初期条件の微かな違いを急速に拡大する性質を持つため、外部からの微かな擾乱の偶然性が乱流系全体の偶然性（再現不可能性）として観測されるのである。乱流系に内在するこのような性質は、しばしば、“sensitive dependence on initial conditions”という言葉で表現され、少数自由度系から連続自由度系まで広い範囲の力学系における決定論的不規則現象を特徴づけるものと考えられている。この“初期条件に対する敏感な依存性”が、2

次え Navier-Stokes 方程式に従う乱流運動に存在するか? というのがこの小稿の主題の意味である。

力学系の解の初期条件に対する敏感さの程度を測る代表的な量の一つは、次の様に定義される Lyapounov 数と呼ばれる量である。

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln (\|\delta u(T)\| / \|\delta u(0)\|) \quad (1.1)$$

ここで $\delta u(t)$ (無限小の量) は、時刻 t における無限に近接した2つの解 $u^{(1)}, u^{(2)}$ の差、 $\|\cdot\|$ は δu を計るノルムを表わす。即ち λ は、2つの解の小さな (線型段階の) 差が $t \rightarrow \infty$ で指数的に拡大する程度。

$$\|\delta u(t)\| \sim e^{\lambda t} \|\delta u(0)\| \quad (t \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

を表わし、 λ の正負はそれぞれ解の不安定・安定に対応している。(定義 (1.1) から分かるように Lyapounov 数は系の (attractor の) 大域的な量であり、attractor 全体の性質 (fractal 次え、Hausdorff 次え、Kolmogorov エントロピー等) と密接に結びついていることが知られている。(Eckmann & Ruelle, 1985; Schuster, 1985))

周知のように、2次え乱流では相空間において、エネルギーの逆カスケード現象とエントロピーの (順)カスケード現象が同時に進行する。前者の結果、時間発展と共に速度場は次第に大きく単純なものに移行するが、後者のために、

渦度場は次第に細かく複雑な構造を持つようになる。このことから、2次元乱流の時間発展は、注目する量によって異なる性質を示すことが想像される。即ち ω の大きさを測る際、低波数領域からの寄与を大きく見積るノルムと高波数領域からの寄与を大きく見積るノルムは、それぞれ、エネルギー保存領域と慣性領域の初期条件に対する敏感さを反映することが期待される。(但し、有限次元のアトラクターにおける Lyapunov 数 (1.1) はノルム $\|\cdot\|$ の形には依存しないことに注意。また Burgers 方程式の場合については Nakazawa (1987) 参照)

Lilly は 1972 年に、気象学における数値予報の誤差に関連して、外力とまさつ力を伴う 2次元 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \nabla) \omega = F + \nu \Delta \omega - K \omega \quad (1.3)$$

に近接した2つの初期条件を与え、 64×64 の格子上で数値的に解いて、2つの解 $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ の差の時間発展を研究した (Lilly, 1972)。ここで ω , u , ν はそれぞれ渦度、速度、動粘性率であり、 F は外力の回転、 $-K\omega$ (K は定数) はまさつ力に起因する項である。数値予報の際用いる初期条件は観測点の不足や観測の不正確さのため誤差を伴う。この誤差が予報の精度にどのような影響を与えるのか ("predictability" の (非線型) 問題; Lorenz, 1963, 1965; Charney, 1966; Smagorinsky, 1969; Baumhertner & Julian, 1971) という観点から、どのような初

期条件のズレがどの程度の速さで大きくなるのかということが調べられた。彼は速度場の（有限の大きさの）差

$$\Delta u(x, t) = u^{(1)}(x, t) - u^{(0)}(x, t) \quad (1.4)$$

のエネルギー・スペクトルの変化に注目し、スペクトルは相似な形を保ちながら（時間的に）指数的に増加し $u^{(1)}(x, t)$ や $u^{(2)}(x, t)$ と同程度の大きさまで発達すること（図1）、またその指数 λ ($|\Delta u| \propto e^{\lambda t}$) はエンストロフィー・散逸率 η から作られる時間の逆数の $2/3$ と数値の上で近いことなどを見出した。

（なお Basdevant らによっても類似の計算が行なわれている (Basdevant et al., 1981)）。

Lilly の結果は、スペクトルの相似的変形、つまり初期条件に対する敏感さは波数によらないことを示唆し興味深いが、数値計算における最大波数が 62 と小さいことやまさつかの項をつけ加えていることなどのために、そのまま発達した2次元乱流についての結果として解釈するのは難しい。また、彼は Δu の成長を $|\Delta u| \sim |u|$ となるまで計算していて、 Δu の発展の線型段階と非線型段階の分離が必ずしも明白ではない。

いま、解の初期条件に対する敏感さを、 Δu の線型段階に注目して、Lyapounov 数を計算することによって調べようとするとき、定義 (1.1) に従えば、系には何らかの（時間平均的な意味での）定常状態が存在しなければならない。従って、2

次え Navier-Stokes 乱流は、外力によって駆動されていることが必要である（そうでなければ常に $\lambda \leq 0$ となる）。他方、良く知られているように 2 次元乱流のエネルギー逆カスケード現象は、エネルギーをより低い波数のモードに輸送するために、無限に広い領域においては、定常状態が存在しない。この困難は、乱流を実質的に有限領域内に限る条件（周期境界条件等）を課することにより回避できるが、このような条件下での定常 2 次元乱流の性格は現在までのところ明らかとはいえない。

以上の理由から、まずここでは、周期境界条件下において自由減衰する 2 次元乱流について、線型段階における Δu の発展をいくつかのノルムを用いて調べることを試みた。自由減衰する 2 次元乱流では、初期条件の微小な差異はどのように発達（又は減衰）するのかを調べるため、有限の大きさの時間 T について量 (1.1) を作りいくつかのノルムで比較した。従って上で注意したように、我々の λ は必ずしも Lyapunov 数を与えるわけではないが、2 次元乱流の相似的減衰過程における解の攪乱に対する敏感さを反映している。

2. 数値的方法と初期条件

わずかに異なる 2 つの初期条件を用いて、近接した 2 つの

(乱流) 解 $u^{(1)}, u^{(2)}$ の差 (線型領域) の時間発展を数値的に調べる。これら 2 つの解は共に非圧縮性流体の 2 次元 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \omega^{(i)}}{\partial t} + (u^{(i)} \nabla) \omega^{(i)} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \omega^{(i)}, \quad (2.1)$$

$$\omega^{(i)} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \psi^{(i)} \quad (2.2)$$

$$u^{(i)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \psi^{(i)}, -\frac{\partial}{\partial x_1} \psi^{(i)} \right) \quad (i=1, 2) \quad (2.3)$$

及び x_1, x_2 方向共に周期 2π の周期境界条件に従うとする。ここで $\psi^{(i)}, u^{(i)}, \omega^{(i)}, \nu$ は各々流れ関数、速度、渦度、動粘性率を表わす。我々の扱う解は乱流解であるため数値スキームは十分に広いスケールの (インストロフイーの) 散逸領域まで取扱えることが必要である。ここでは計算速度の向上と記憶領域の能率のために、速度場 $u^{(1)}, u^{(2)}$ に Navier-Stokes 方程式が保存する対称性を課して数値計算を行った。図 2 に示すように、この対称性により基本領域 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ の速度場は 16 の互いに合同な部分に分割される。この対称性のもとの高能率数値スキームについては Kida (1985)、木田・山田・大木谷 (1986) に詳述されているので、ここでは、非線型項については 2/3-rule を用いた Fourier スペクトル法を (1024 × 1024 モード、最大波数 341)、時間発展 (0 ≤ t ≤ 30) については Runge-Kutta-Gill 法を用いたことを述べるにとどめる。

解 $u^{(1)}$ の初期条件には、 2048×2048 モードで（上記対称性の下で）数値実験を行って得られた発達した乱流場を採用した。粘性値は $\nu = 2.5 \times 10^{-5}$ 、初期Reynolds数 $R \equiv E / (2\rho\nu^4)^{1/3}$ （ E はエネルギー、 ρ はプリンストロフィーを表わす）の値は $R = 1.9 \times 10^4$ である。さらに、 $u^{(1)}$ とわずかに異なる場 $u^{(2)}$ の初期条件を得るために、我々は速度差

$$\Delta u = u^{(2)} - u^{(1)} \quad (2.4)^*$$

を、 $t=0$ で $u^{(1)}$ と相似なスペクトル形を持ち大きさが

$$|\Delta u| / |u| = 10^{-4} \quad (\text{for } \forall k) \quad (2.5)$$

となるように乱数を用いて生成した。我々の方法では、 Δu について線型化された方程式を用いる方法とは異なり、 Δu の非線型効果が入りこむ危険が存在する。従って(2.5)式で選んだ Δu の大きさが十分小さいかどうかを確認する必要がある。

3. 速度場 $u^{(1)}$ の時間変化

速度場 $u^{(1)}$ の統計量の時間変化($0 \leq t \leq 30$)を図3に示す。粘性が小さいためエネルギーは一定値に止まる一方、エンストロフィーは $t=0$ から $t=30$ の間に2割程度減少する。またプリン

*: この稿中では記号 Δ は差を表わす意味で用いて、ラプラスシアンの意味では用いない。

ストロフィーはこの間小さな振動をくりかえしながら初期値の1割以下の値まで減少する。(19リンストロフィーの急激な上昇が見られないのは初期条件としてすでに十分乱流化した場を用いているためである。) 図4に速度場 u'' のエンストロフースペクトル $Q(k) \equiv k^2 E(k)$ ($E(k)$ はエネルギースペクトル)の時間変化を示した。 $t=0$ で $Q(k) \sim k^{-1}$ ($E(k) \sim k^{-3}$)に近いベキが見られるが、時間発展と共に、次第により傾いたスペクトルに変化した。これは乱流場 u'' のReynolds数が比較的小さいため広い慣性領域が実現されず、 $Q(k) \sim k^{-1}$ が維持されないことによるものである。エンストロフィー散逸波数

$$k_d(t) = \eta(t)^{1/6} L^{-1/2} \quad (2.6)$$

は $t=0, 5, 10, 20$ の時それぞれ $k_d(t) \sim 168, 124, 114, 108$ となる。

4. 速度差 Δu の時間変化

速度場の差 Δu の大きさを測る1ルムとして我々は次の3種類のものも採用した。

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_E &\equiv \left[\iint |\Delta u|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_0^\infty E_{dif}(k) dk \right]^{1/2} \\ \|\Delta u\|_Q &\equiv \left[\iint |\Delta \omega|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$= \left[\int_0^\infty k^2 E_{dif}(k) dk \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_p &\equiv \left[\iint |\Delta \mathcal{K}|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_0^\infty k^4 E_{dif}(k) dk \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで $\Delta \omega$, $\Delta \mathcal{K}$ は各々 渦度の差、di-vorticity の差で次のように定義される：

$$\Delta \omega = \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times (\Delta \mathbf{u}) \quad (\mathbf{e}_z \text{ は } z \text{ 方向の単位ベクトル}) \quad (4.4)$$

$$\Delta \mathcal{K} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \Delta \omega \right) \quad (4.5)$$

また、 $E_{dif}(k)$ は速度場の差 $\Delta \mathbf{u}$ のエネルギー・スペクトルである。 $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_p$ は、正値性、三角不等式をみたすと共に、周期境界条件を満たす速度場に対しては、

$$\|\Delta \mathbf{u}\|_E = 0 \quad (\text{or } \|\Delta \mathbf{u}\|_Q = 0 \text{ or } \|\Delta \mathbf{u}\|_p = 0)$$

ならば $\Delta \mathbf{u} = 0$.

となり、ノルムの条件をみたしている。定義から明らかのように、 $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_p$ はこの順に高波数成分からの寄与が大きい。ここではこれらのノルム $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_p$ をそれぞれエネルギー・ノルム、エントロピー・ノルム、ポリンストロフィー・ノルムと呼ぶことにする。

図5に $\Delta \mathbf{u}$ のエネルギー・ノルムの2乗、 $E_{dif} \equiv \|\Delta \mathbf{u}\|_E^2$ の時間変化を示す。 $t=0$ から $t=30$ の間に $\|\Delta \mathbf{u}\|_E^2$ は細かい上下

をくりかえしながらもほぼ指数的に増加し300倍以上の値になる。グラフから指数を詳しく決定することは困難だが、参考のために描いた直線は

$$E_{dif} \propto e^{2\lambda_{\varepsilon} t}, \quad \lambda_{\varepsilon} = 0.093 \quad (4.6)$$

である。なお、 $0 \leq t \leq 30$ の間 E_{dif} は $u^{(4)}$ のエネルギーの 10^5 分の1以下である。

同じ Δu の変化をインストロフイーノルムの2乗 $Q_{dif} \equiv \|\Delta u\|_Q^2$ で見たものが図6である。初期 ($t \leq 1$) の急激な増加のあと、 E_{dif} と同様に細かい上下をくりかえしながらほぼ指数的に増加する。この場合も指数を決定することは難しいが、 E_{dif} の増加 (4.6) と比較すると増加率は小さい。参考のために描いた直線は、

$$Q_{dif} \propto e^{2\lambda_Q t}, \quad \lambda_Q = 0.058 \quad (4.7)$$

である。

更に、同じ Δu の変化をパーインストロフイーノルムの2乗、 $P_{dif} \equiv \|\Delta u\|_P^2$ で見たものが図7である。初期の急激な増加は Q_{dif} の場合より激しいが、その後の増加の割合は小さい。グラフからは平均的な増加が指数的であるかどうかを判定するのは困難であるが、(4.6) 及び (4.7) と比較して、増加の程度は E_{dif} よりはいさく、 Q_{dif} 程度又はそれ以下のようなものである。

以上の結果が Δu の線型領域のものであることを確認する

ために、 Δu の初期条件を (乱数系列は変えずに) α 倍 ($\alpha = 10, 100$) して時間発散させ ($u^{(0)}$ は同一)、それぞれのノルムでの時間変化を比較した。514×514 モードの数値スキームを用いて $\alpha = 10, 100$ の二つの場合を比較したものが図8である。図8(a, b, c) は Δu の大きさの時間変化をそれぞれ E_{dif} , Q_{dif} , P_{dif} を用いて描いたものであるが、いずれの場合も $\alpha = 10$ と $\alpha = 100$ についての一致は良好であり、先に示した Δu についての結果が Δu の線型領域のもので非線型効果を含んでいないことを示している。

Δu の指数的增长率 (4.6), (4.7) は、 Δu の1つの初期条件についてのものであるが、(異なる乱数系列による)異なる初期条件 ($u^{(0)}$ は同一) 用いた場合に E_{dif} の時間発展の比較を行ったものが図9である。これら2つの $\|\Delta u\|_E$ は、初期条件が異なるにもかかわらず良く似た時間発展をたどり、指数的增长率 (4.6) は両者に共通である。この結果は Δu の平均的な指数増加倍率は、考えている時間範囲では、初期条件に依存しないことを示唆している。

Δu の実空間におけるふるまいを見るために、図10, 11に渦度 $\Delta \omega = e_z \cdot \nabla \times (\Delta u)$ の等高線を描いた。図10(a) は初期 ($t=0$) における $\Delta \omega$ の分布で影の部分は正の渦度を示している。参考のため同時刻における場 $u^{(0)}$ の渦度 $\omega^{(0)} = e_z \cdot (\nabla \times u^{(0)})$ を図

10(a)に示した。図11(a)は $t=3$ における $\Delta\omega$ の分布である。初期の $\Delta\omega$ の分布と比較して、小さなスケールの構造が顕著であり、温度 $\omega^{(1)}$ (但し $\omega=2.5 \times 10^6$)の分布 (図11(b))との相関が強く現われている。このことは $\Delta\omega$ は時間発展と共に、初期条件によらず、場 $\omega^{(1)}$ と密接に関連した構造を持つようになることを示唆している。

Δu のインストロフースペクトルの時間変化を図12に示した。初期($t=0$)には $Q(k) \propto k^{-1}$ であったスペクトルは、急速に高波数成分が増大し、 $t=3$ ではほぼ k^0 に近くなり、更に時間がたつと、インストロフー散逸波数 k_{dt} より大きな波数のインストロフーが減少するが、慣性小領域付近の波数ではやはり $Q(k) \propto k^0$ 程度のゆるやかな傾ましか示さない。なお、 E_{dt} の顕著な増大に対応して、低波数領域でのエネルギーの増加が見られる。

5. おわりに

前節までの主な結果は次のようにまとめられる。

- 1) Δu ($|\Delta u| \ll |u|$) の大きさの時間変化をエネルギーノルム $\|\cdot\|_E$ 、インストロフーノルム $\|\cdot\|_Q$ 、1/2インストロフーノルム $\|\cdot\|_P$ の3種類のノルムで現った場合、 $\|\Delta u\|_E$ が最も急速に増大し、時間変化もほ

ば指数的である。また $\|\Delta u\|_Q$ もほぼ指数的に増大するがその増大率は $\|\Delta u\|_E$ より小さい。 $\|\Delta u\|_P$ は若干の増大を示すが、時間的变化が指数的かどうかは明らかではなく、増大の程度も $\|\Delta u\|_Q$ と同程度又はそれ以下である。

- 2) 時間発展に際して Δu のスペクトルは急速に変化し、慣性小領域に対応する波数で $Q \text{ dci} \propto k^0$ に近い形をとり、以後この形はほぼ一定に保たれる。

エネルギーノルム $\|\Delta u\|_E$ は低波数領域からの寄与が大きく、エンストロフィーノルム $\|\Delta u\|_Q$ やパリンストロフィーノルム $\|\Delta u\|_P$ はより高い波数からの寄与が大きい。ここで行った計算では低波数領域が(増大の指数が大きいという意味で)最も強い初期条件依存性を持っている。低波数領域で $u^{(1)}$ は初期条件や境界条件に強く依存することを考えれば、先に求めた λ_E は普遍的な値ではなく場合によって異なる値であると思われる。

以上の結果は自由減衰する2次元乱流についてのものであることに注意しなければならない。先に述べたように、 Δu だけでなく $u^{(1)}$ の統計量も時間的に変化する。 $\|\Delta u\|_P$ の時間的増大率は $\|\Delta u\|_E$ より小さいが、 $u^{(1)}$ のエネルギーがほぼ一定に保たれているのに対し $u^{(1)}$ のパリンストロフィーは初期値の1割以下まで減少している。このため Δu の増大の性質が定常

2次元乱流(それが実現できるとして)と同じかどうかは連断できない。

はじめに述べたようにLillyの数値計算は増減率の指数 λ がエンストロフィー散逸率 η の $1/3$ 乗に数値的に近いことを示している。この結果は、エンストロフィーカスケード理論の方法で、 λ が η と λ で決まるとする次元解析 $\lambda \sim \eta^{1/3}$ と一致している。ここで報告した数値計算では $\eta^{1/3}$ はほぼ $0.27 \leq \eta^{1/3} \leq 0.70$ であることを指摘しておく。いずれにせよここで報告した計算だけでは指数 λ のスケーリング則を決定することはできない。また、 Δu のスペクトル形の振舞いもLillyが述べているものとはかなり異なるが、その意味は現在のところ明らかではない。定常乱流との比較やスケーリング則(特に非粘性極限における η の λ 依存性)と共に今後の課題である。

References

Basdevant, C., B.Legras, R.Sadourney and M.Beland (1981)

J. Atmos. Sci. 38, 2305.

Baumhefner, D.P., and P.R.Julian (1971) J. Atmos. Sci. 29, 285.

Charney, J.G. (1966) Bull. Amer. Meteor. Soc. 47, 200.

Eckmann, J.-P. and D.Ruelle (1985) Rev. Mod. Phys. 57, 617.

Kida, S. (1985) J. Phys. Soc. Japan 54, 2840.

木田重雄、山田道夫、大木谷耕司 (1986) 数理研講究録

(S.Kida, M.Yamada and K.Ohkitani (1987) submitted to F.D.R.)

Lilly, D.K. (1972) Geophys. Fluid Dyn. 4, 1.

Lorenz, E.N. (1963) Trans. New York Acad. Sci., Ser II 25, 409.

———— (1965) Tellus. 17, 321.

Schuster, H.G. (1984) "Deterministic Chaos". Physik Verlag.

Smagorinsky, J. (1969) Bull. Amer. Meteor. Soc. 50, 286.

2次元乱流のアトラクターの次元に関しては

Constantin, P. and C.Foias (1985) Comm. Pure and Appl. Math.

38, 1.

Burgers方程式を複数のノルムで扱ったものとして.

Nakazawa, H. (1987) Phys.Rev.35A 5137

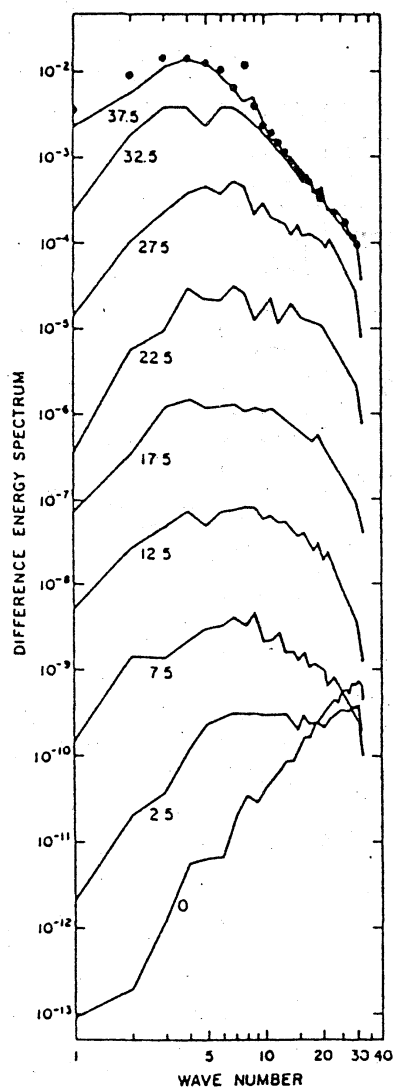


Fig. 1

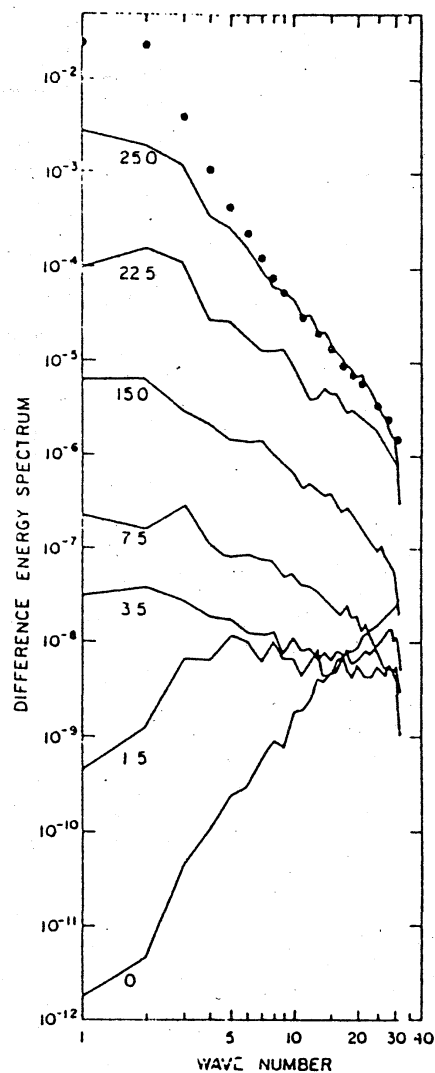


Fig. 2

FIGURE 1 Time averaged scalar energy spectrum for realization #1 of experiment #1, using uncorrelated wave number 8 forcing (unconnected points). Difference energy spectra at increasing dimensionless times, as indicated (continuous lines). The spectral values represent the energy associated with Fourier modes lying on squares in wave vector space.

FIGURE 2 Similar to Figure 1 but for experiment #2, using uncorrelated wave number 2 forcing.

図 1 Lilly による数値計算

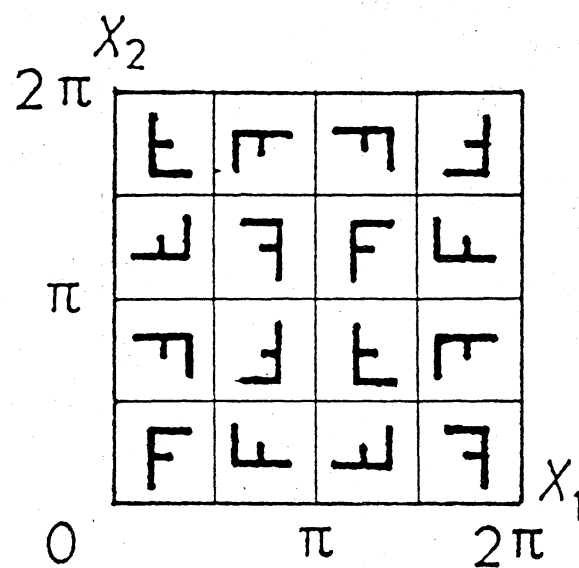


図2 速度場の対称性

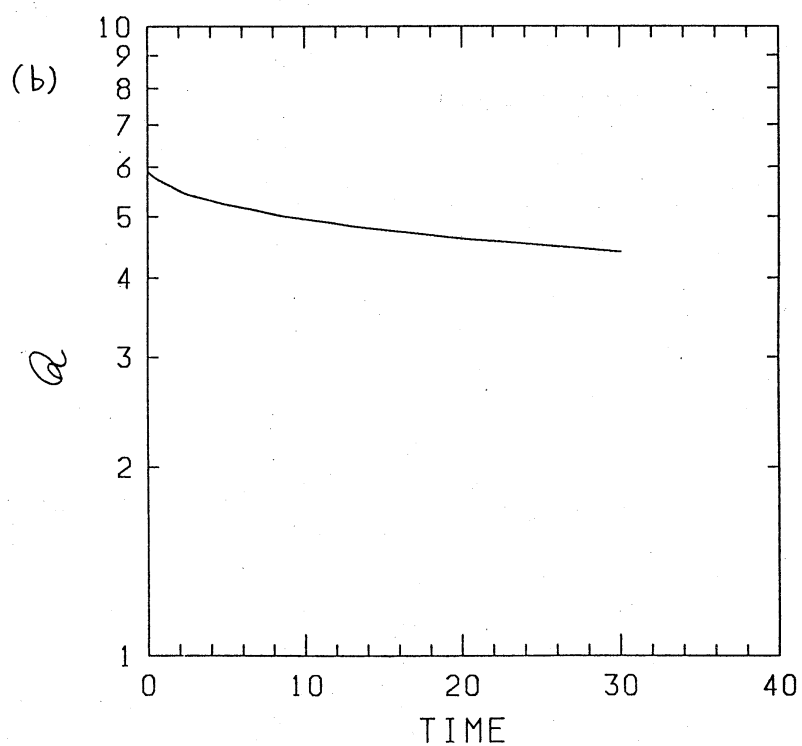
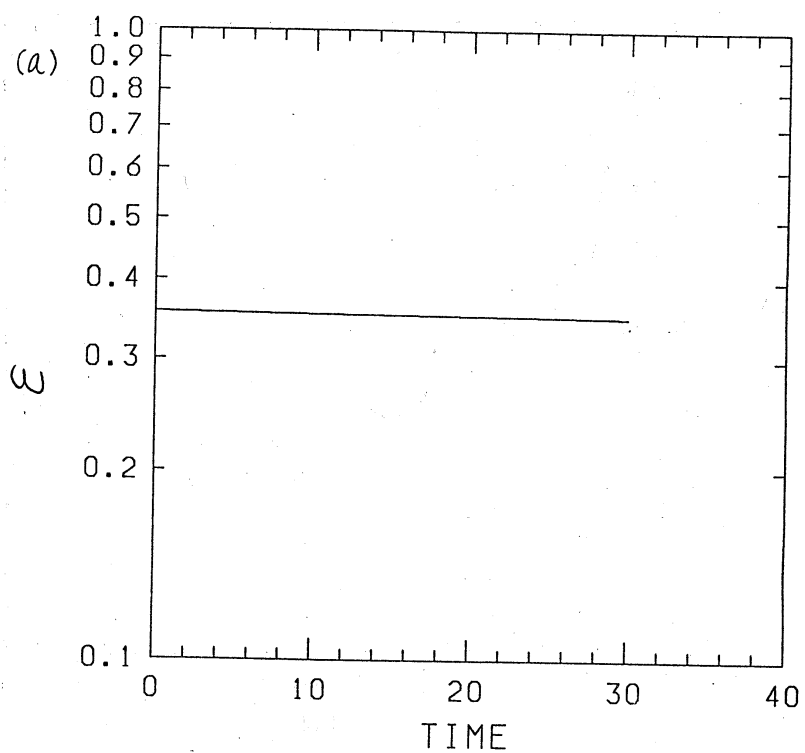


図3 速度場 u''' の統計量の時間変化

(a) エネルギー (b) エンストロフィー (c) パーリントロフィー

106

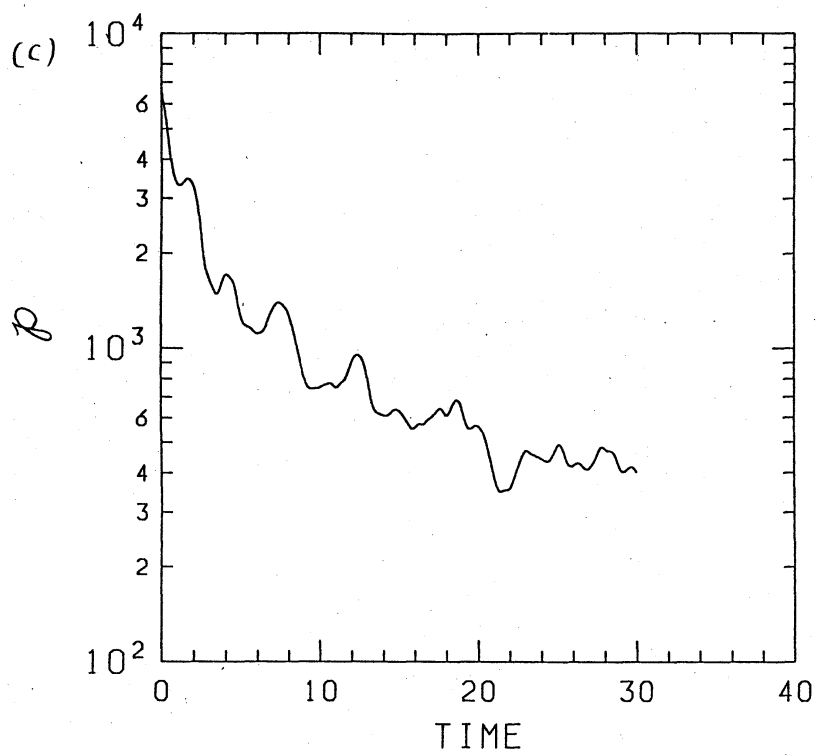


図3 つづき

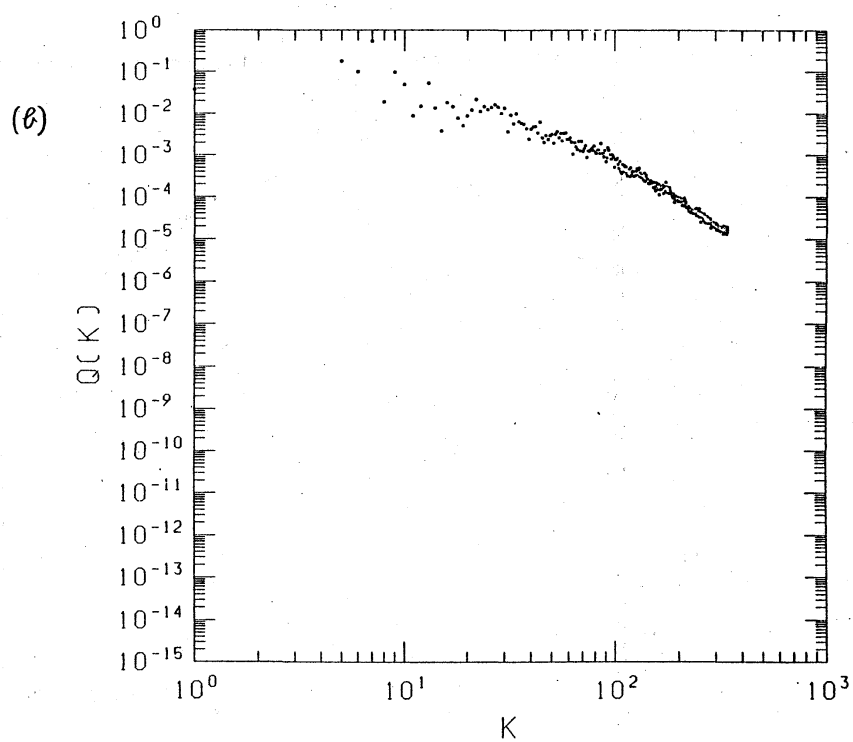
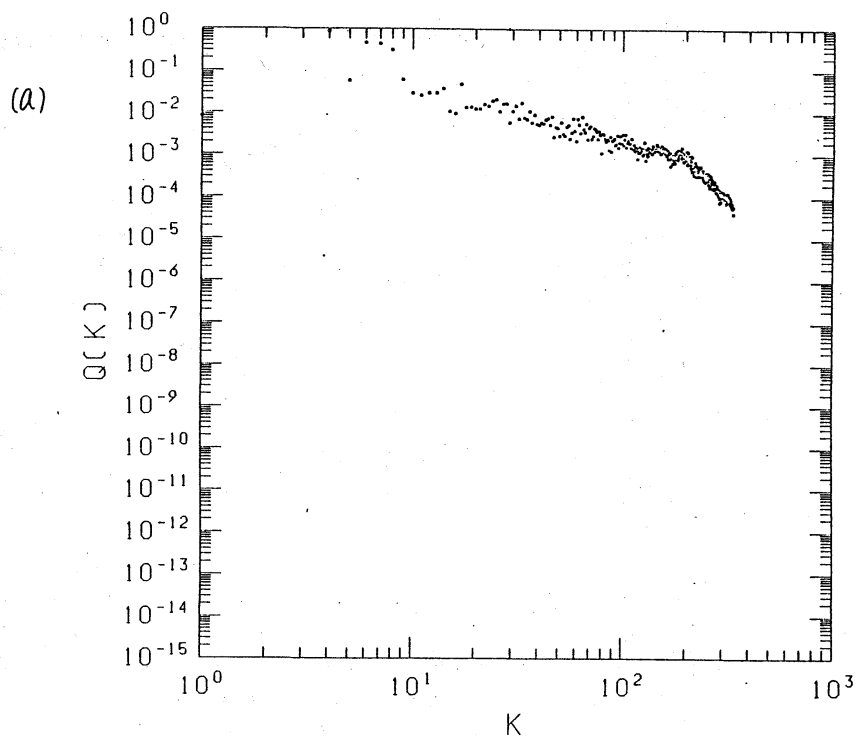
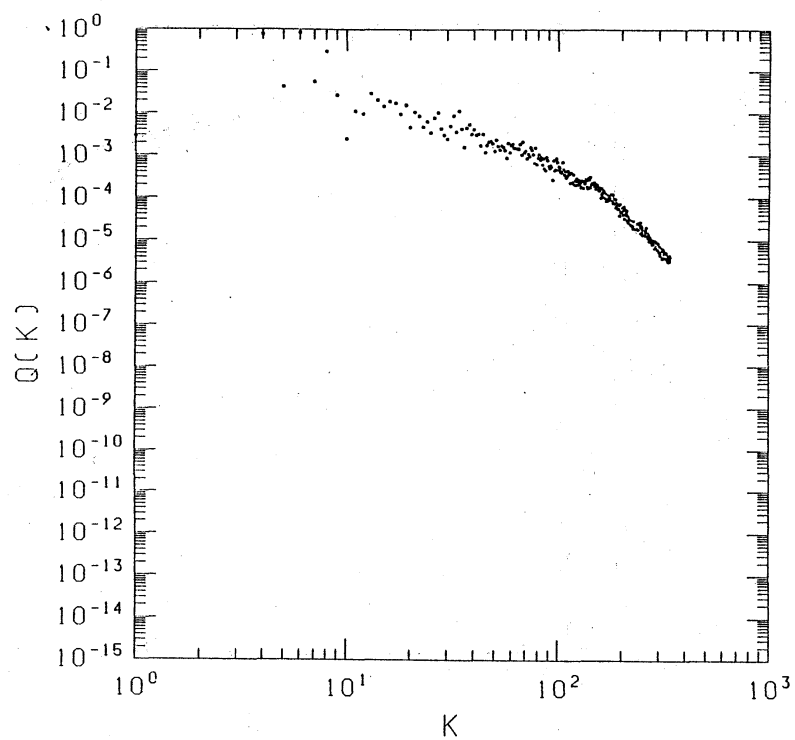


図4 速度場 u''' の エネルギー・スペクトル
 (a) $t=0$, (b) $t=3$, (c) $t=6$, (d) $t=9$

(c)



(d)

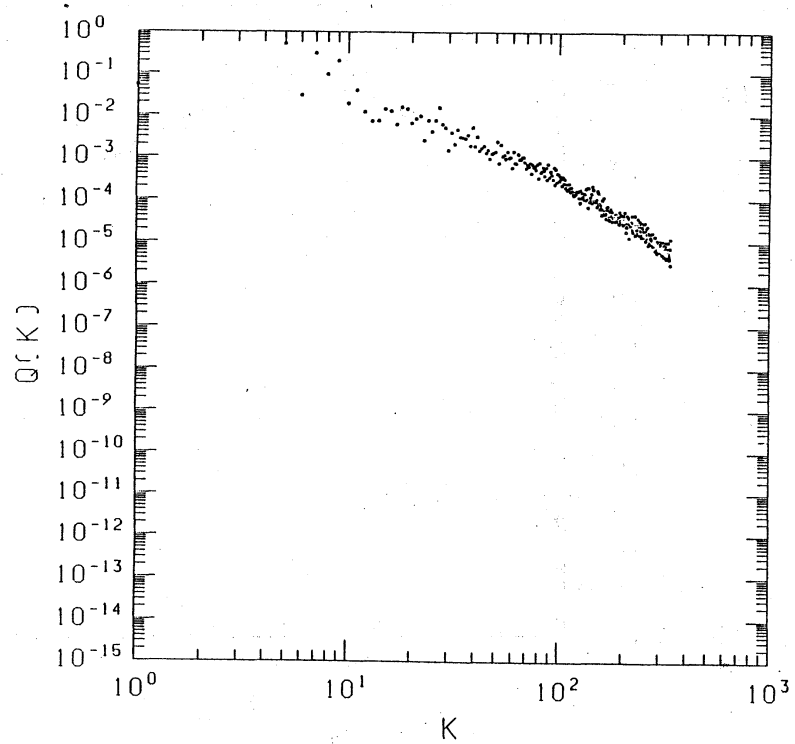


図4 つづき

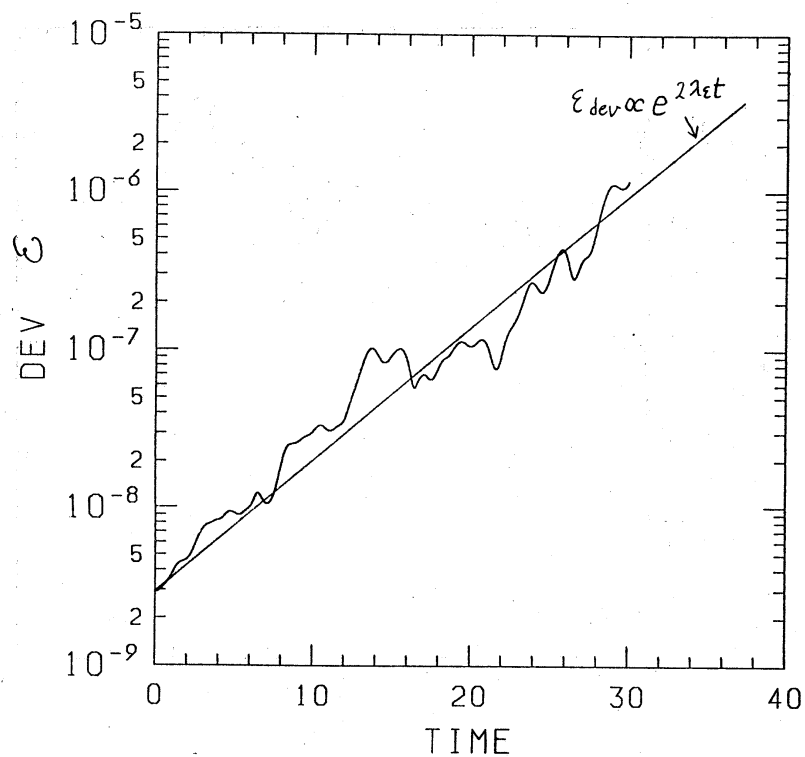


図5 $\varepsilon_{\text{dev}} \equiv \|\Delta u\|_E^2$ の時間変化, $\lambda_\varepsilon = 0.093$

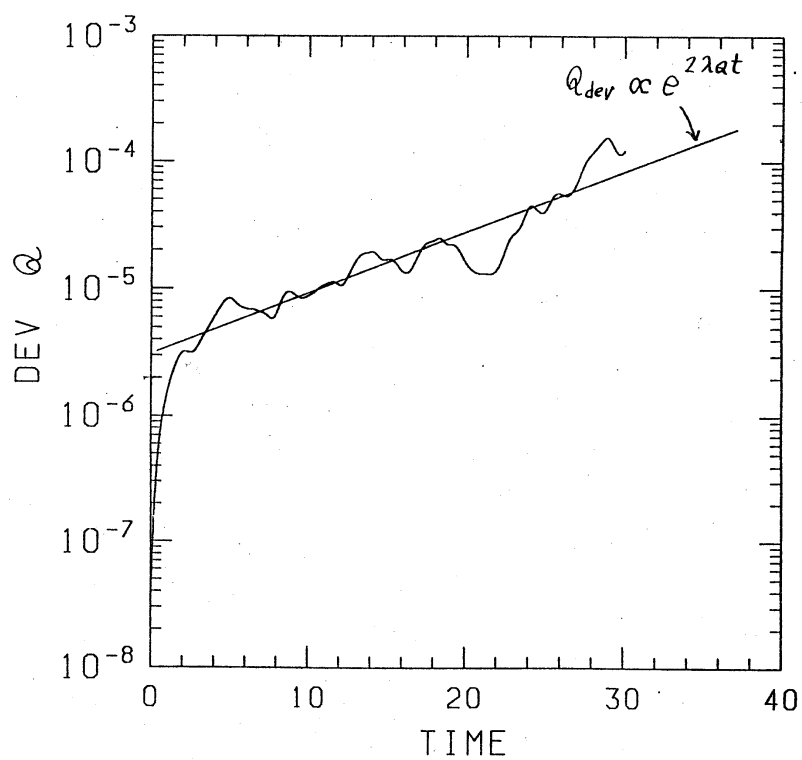


図6 $Q_{\text{dev}} \equiv \|\Delta u\|_Q^2$ の時間変化, $\lambda_Q = 0.058$

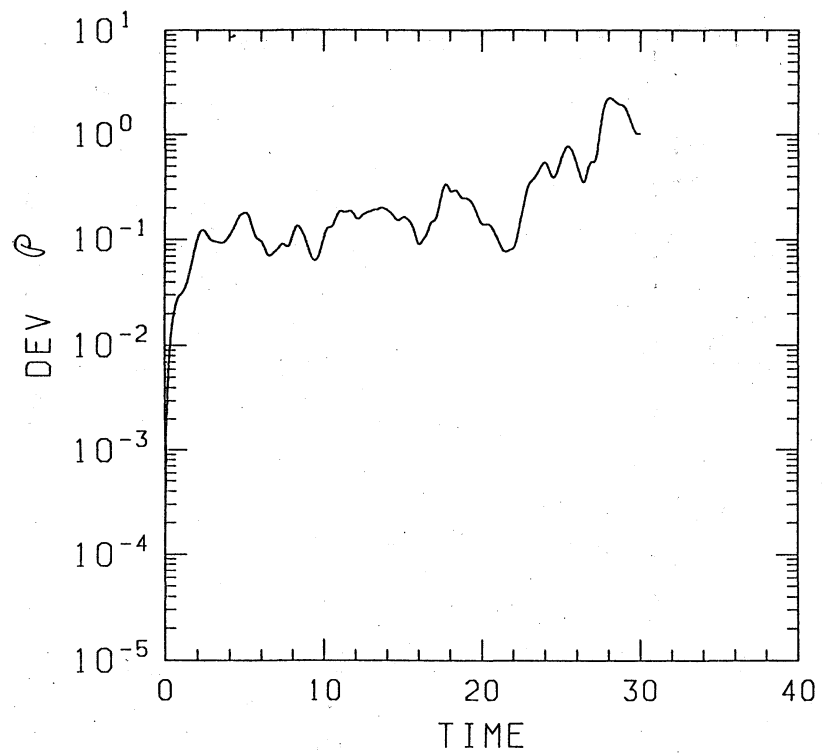


図7 $P_{dev} \equiv |\Delta u|^2$ の時間変化

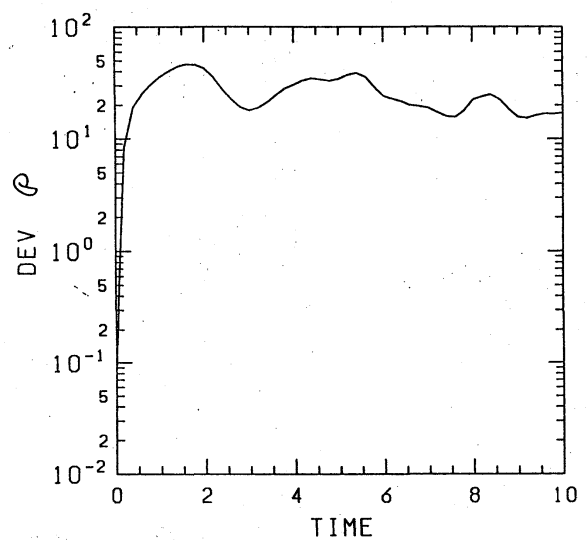
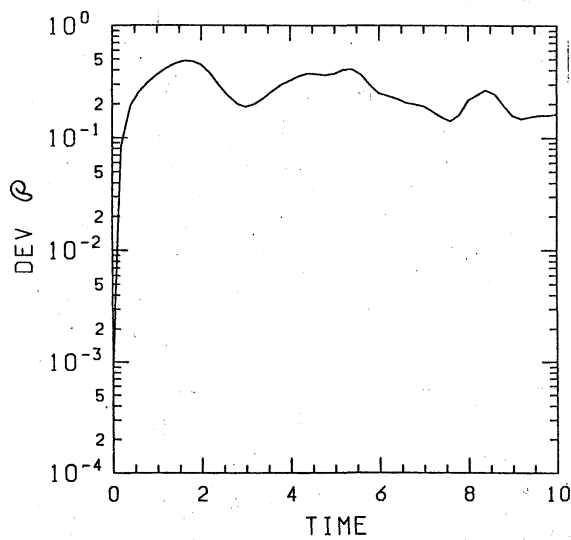
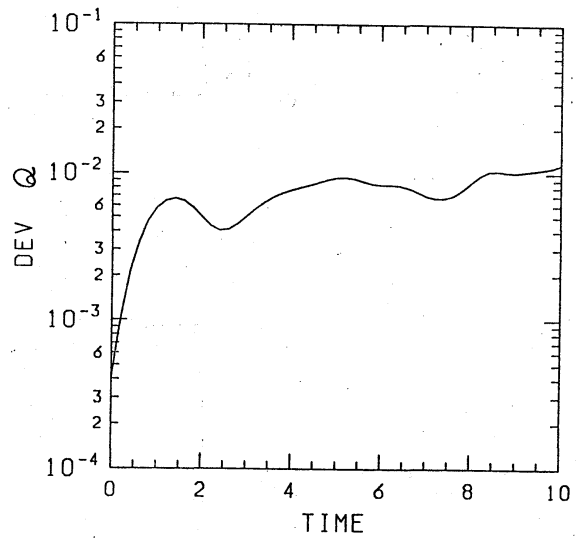
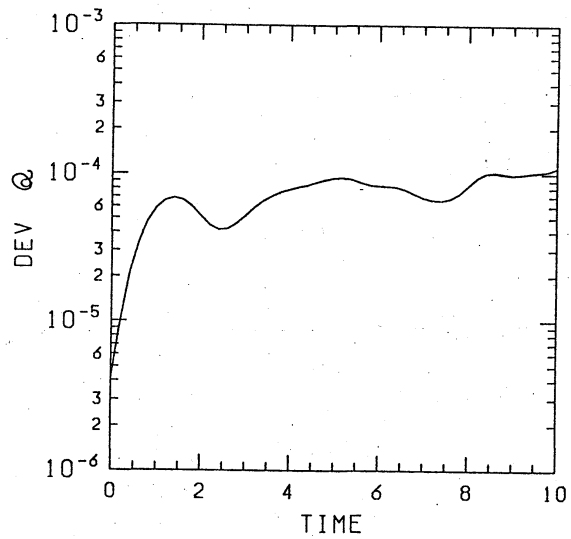
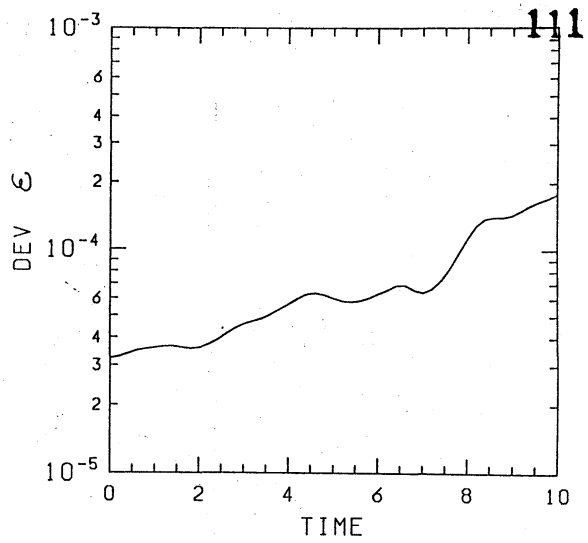
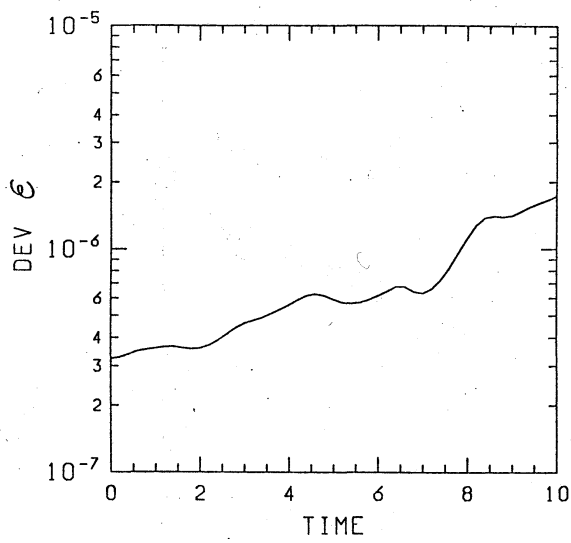
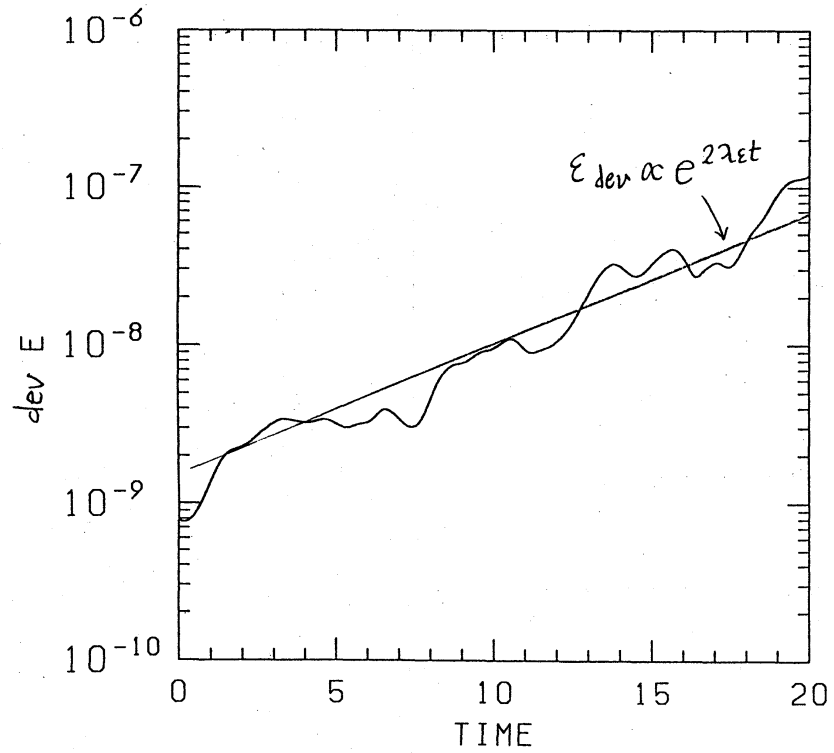
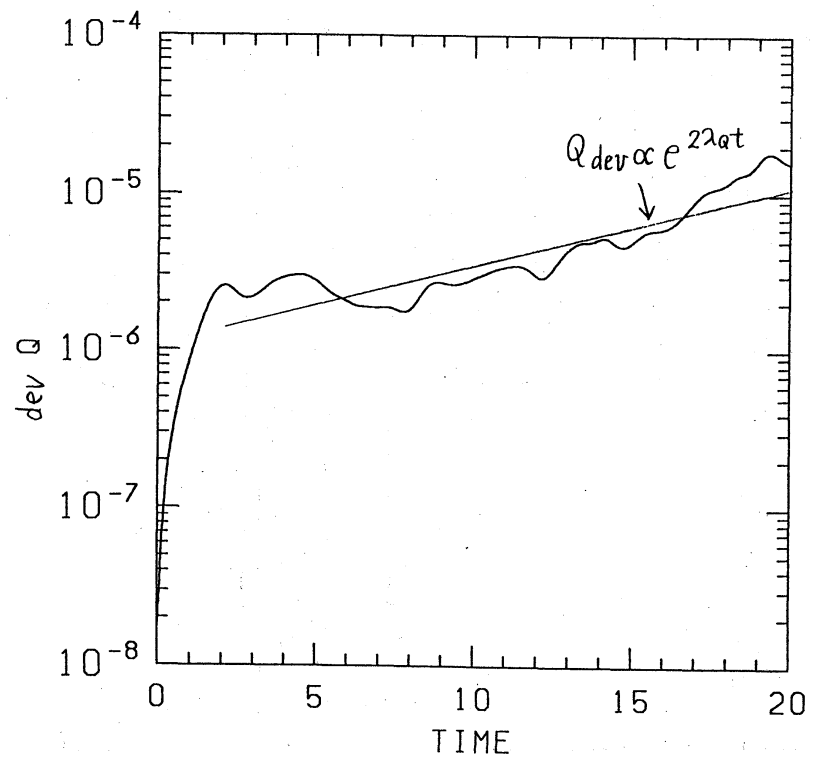


図8 異なる大きさの攪乱 $\|\alpha \Delta u\|$ の発達 (左: $\alpha=10$, 右: $\alpha=100$)



$$\lambda_{\epsilon} = 0.093$$



$$\lambda_Q = 0.058$$

図9 異なる擾乱の時間発展

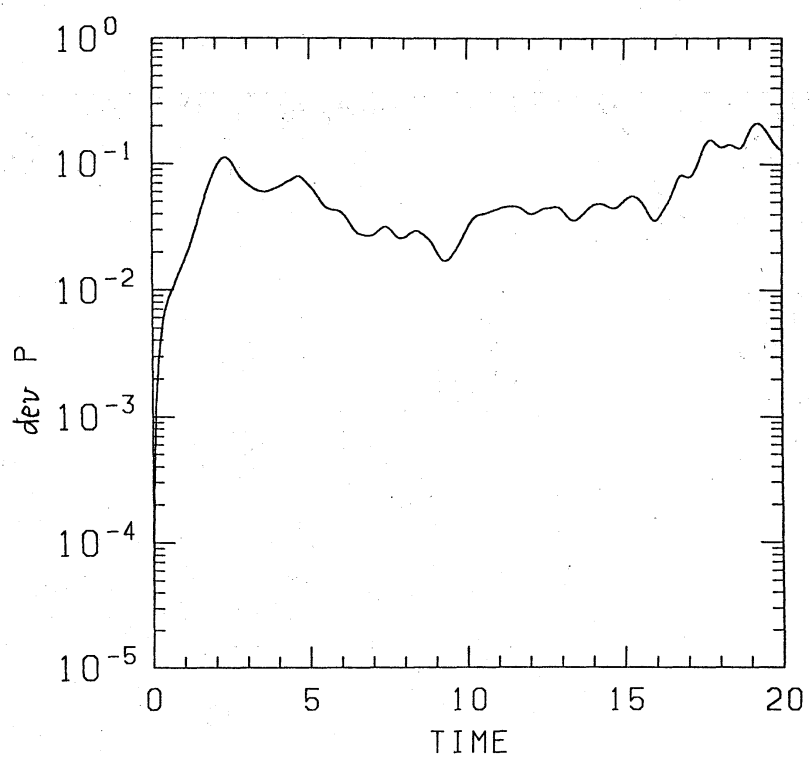


図9 つづき

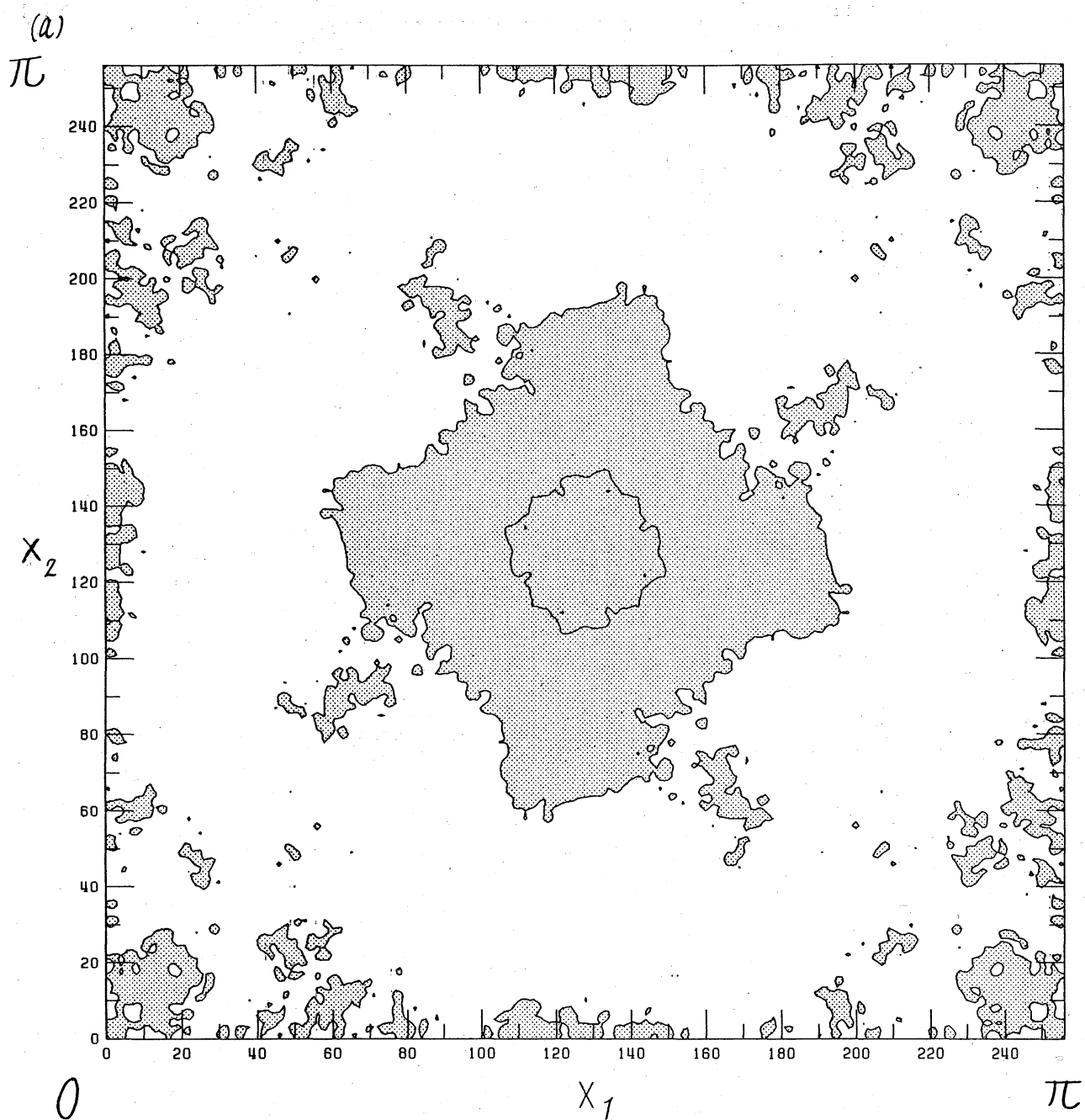


図10 等渦度線の分布 ($t=0$)
 (a) $\Delta\omega$, (b) ω''

(b)

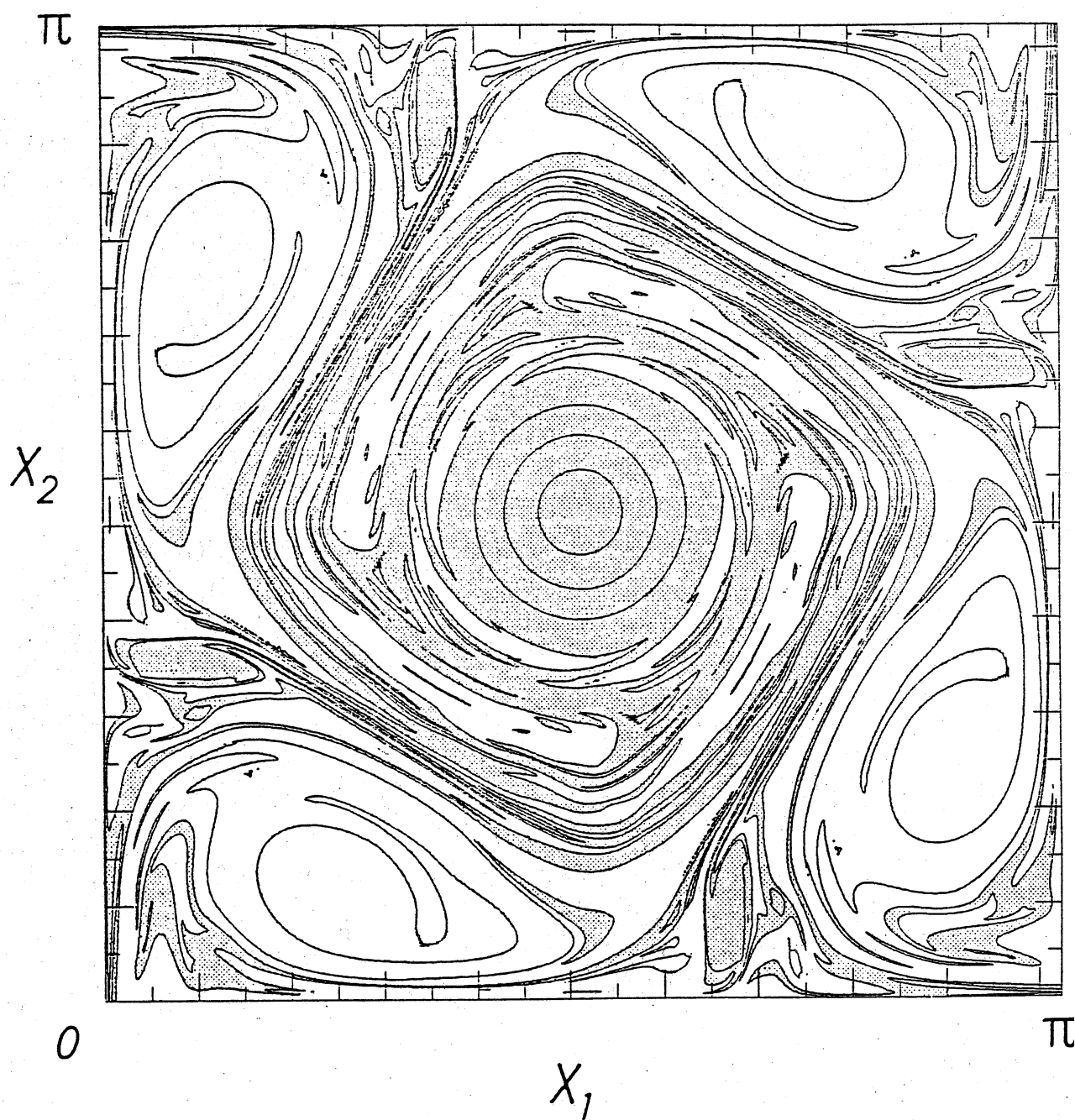


図 10 つづき

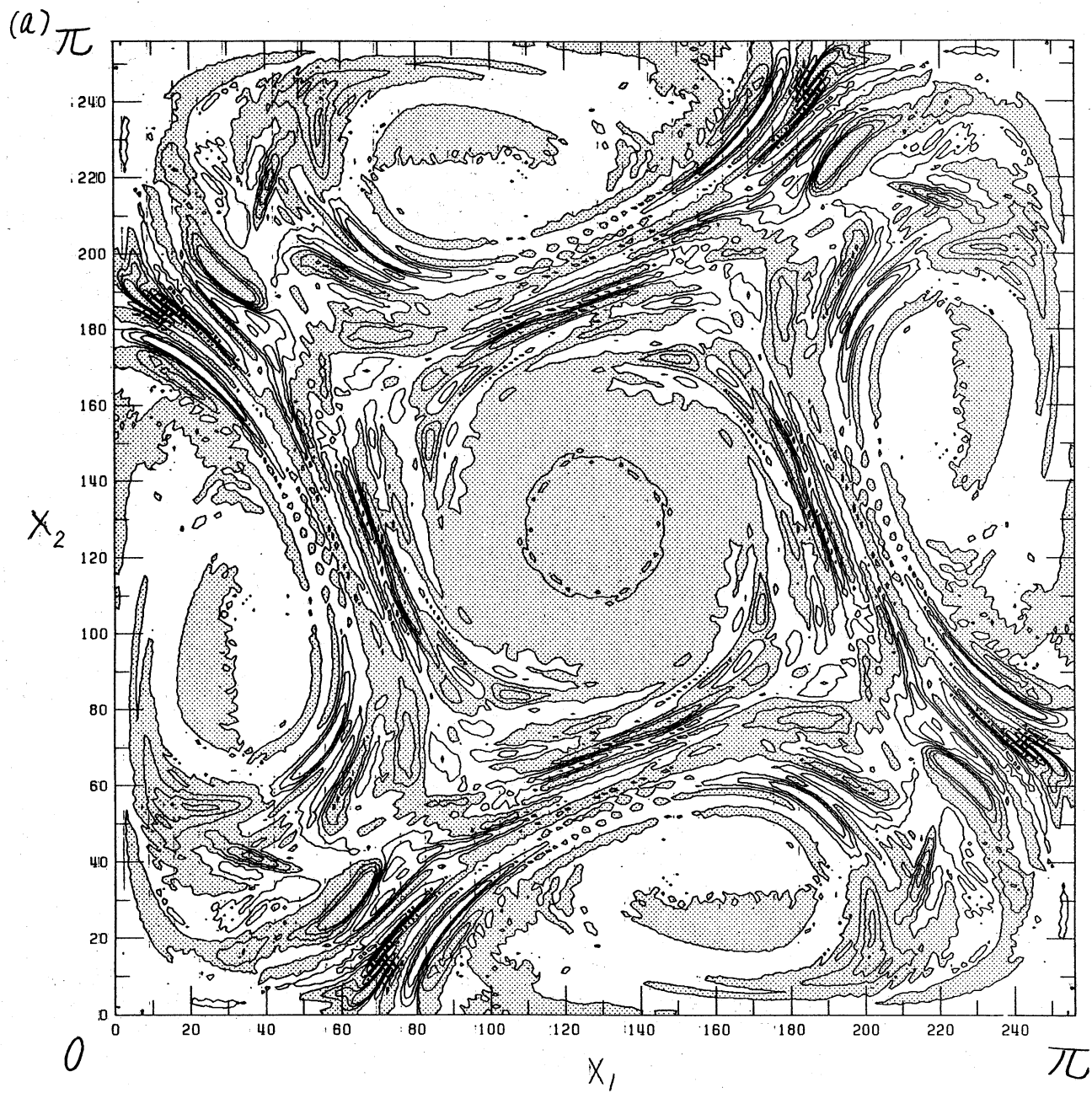


図 11 等渦度線の分布 ($t=3$)
(a) $\Delta\omega$, (b) $\omega^{(1)}$

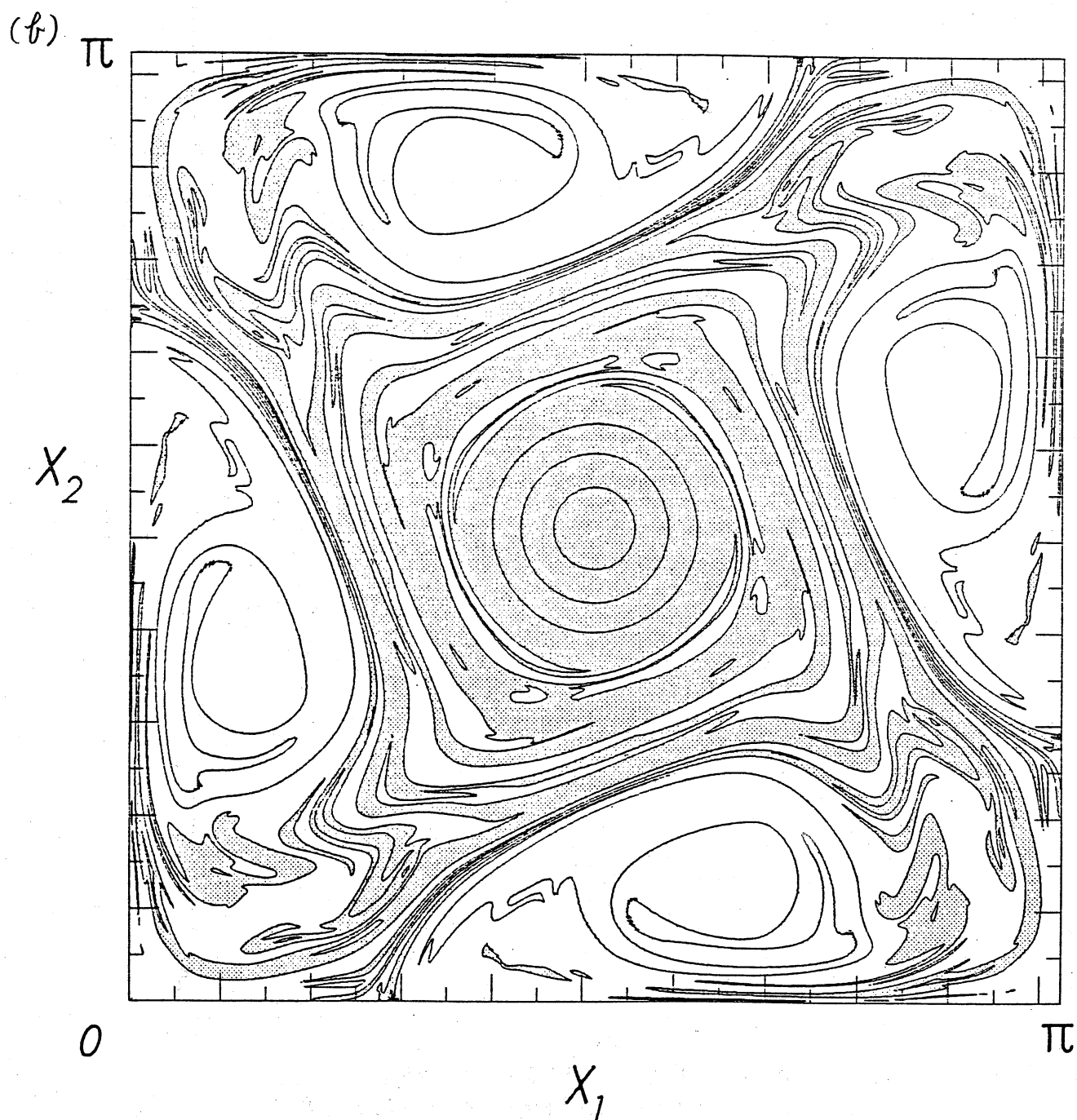


図 11 つづき

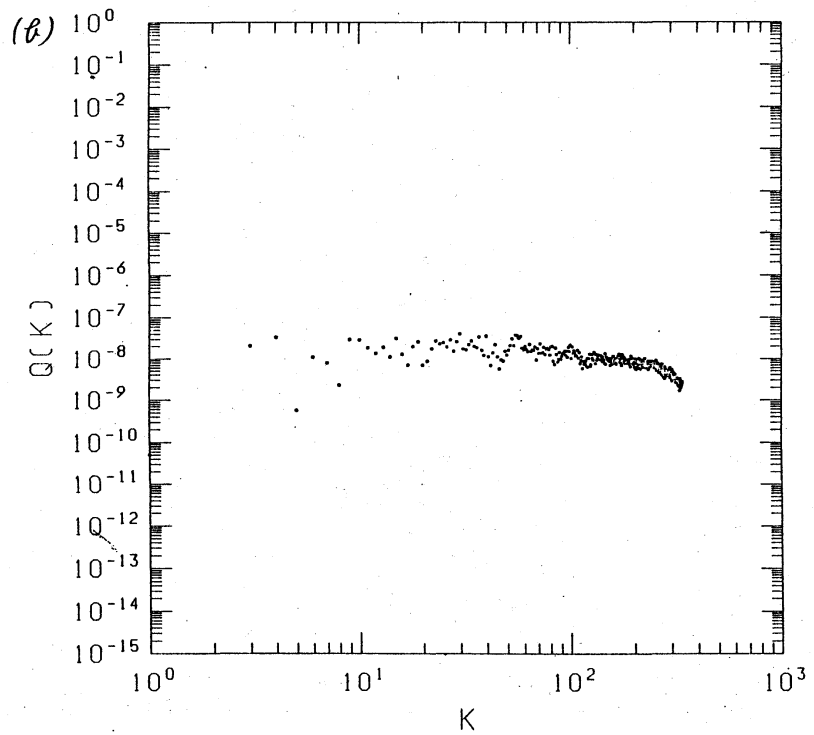
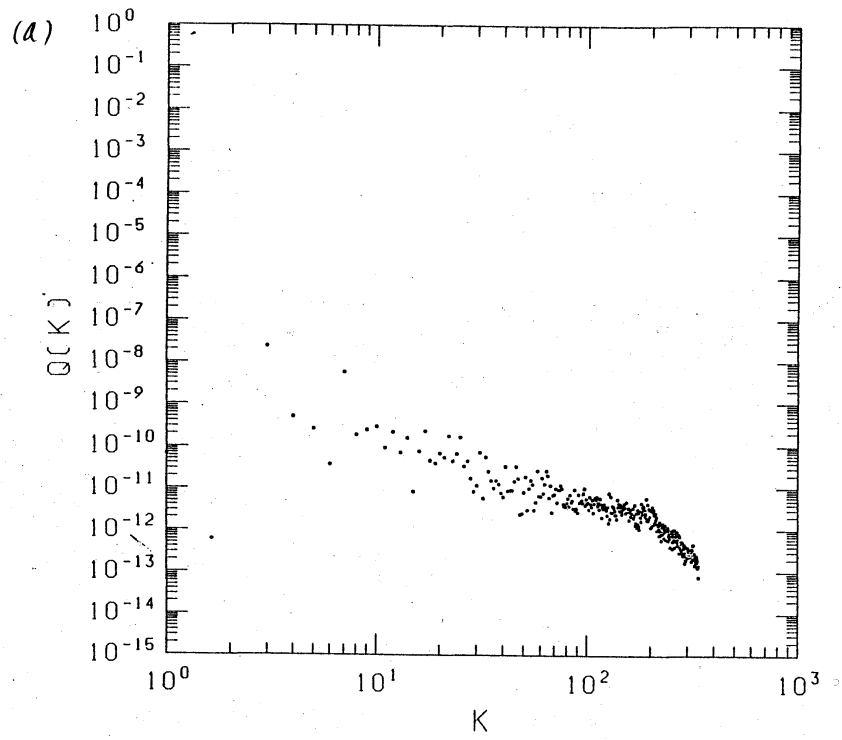


図12 Δu の エントロピー・スペクトル
 (a) $t=0$, (b) $t=3$, (c) $t=6$, (d) $t=9$

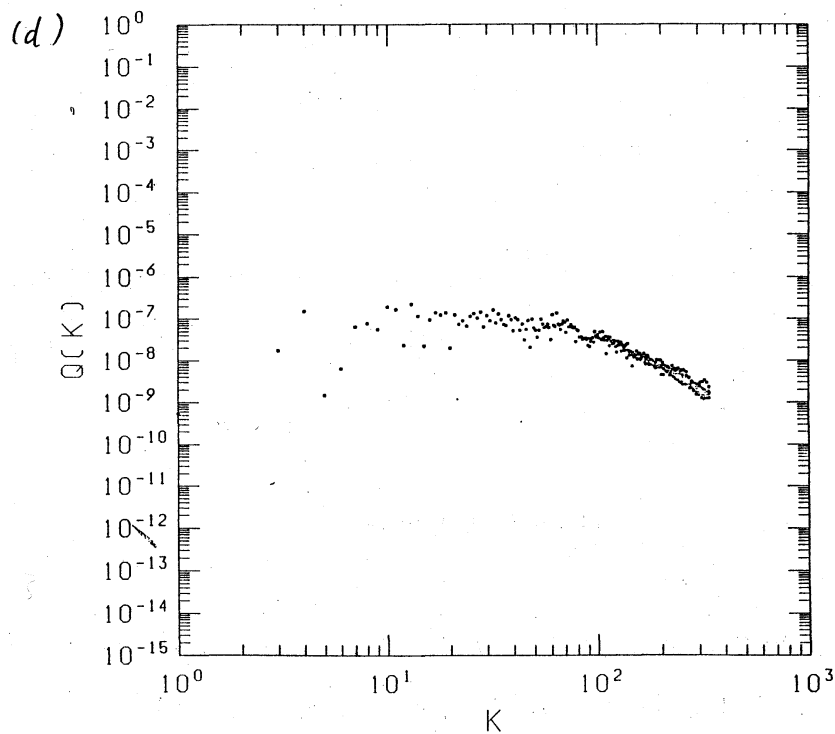
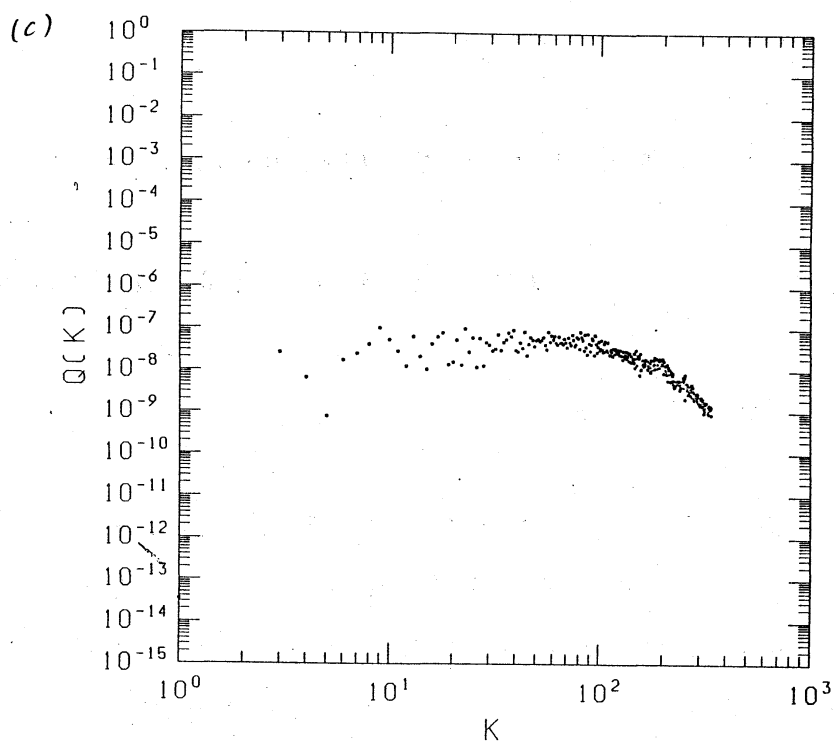


図12 つづき