

The symbol calculus of pseudo-differential operators and the Gauss-Bonnet-Chern Theorem

姫工大・理 岩崎 千里 (Chisato Iwasaki)

§1. Gauss-Bonnet-Chern の定理と熱方程式の基本解.

Riemann manifold M ($\dim M = n$) に対する Gauss-Bonnet-Chern の定理 (以下, (G-B-C) と書く) を, 熱方程式の基本解の擬微分作用素としての表象計算により, 証明することが, 本稿の目的である。結果を一言でいうと, 基本解の表象の主部に相当するところから, (G-B-C) が導かれる。ここでは M の境界がない場合について, 説明するが, 境界のある場合も著者の [7] の方法をつかえば, 同様に示す事ができる。

さて, Gauss-Bonnet の定理は $n=2$ として

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K dM,$$

ただし, $\chi(M)$ は Euler 標数, K は Gauss 曲率である。これは, Chern [1] により, $n \geq 3$ の場合に次のように拡張さ

れた。

$$(G-B-C) \quad \chi(M) = \int_M E(x) dM,$$

$E(x) dM$ は Euler n -form, 具体的に書けば次の通りである。

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^k k! 2^k} \sum_{\pi, \sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \pi R^{\pi(1)\pi(2)}_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \\ \quad \cdots R^{\pi(n-1)\pi(n)}_{\sigma(n-1)\sigma(n)} & (n=2k), \\ 0 & (n=2k+1) \end{cases}$$

さて, この $\chi(M)$ と M 上の熱方程式の関係は以下の様になる. p -form の smooth section の全体 $\wedge^p(M)$ に対して, $\Delta = d\delta + \delta d$ を各 $\wedge^p(M)$ 上で考えたものを Δ_p と書く. $E_p(t)$ をその Cauchy 問題の基本解とする. 即ち,

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \Delta_p \right) E_p(t) = 0 & \text{in } (0, T) \times M, \\ E_p(0) = I & \text{in } M. \end{cases}$$

$E_p(t)$ の kernel を $e_p(t, x, y)$ とすると

$$\chi(M) = \int_M \sum_{p=0}^n (-1)^p \{ \text{tr } e_p(t, x, x) \} dM$$

がなりたつ。(境界のある場合は, 境界条件をつけた混合問題の基本解とする.) $\sum_{p=0}^n (-1)^p t^p e_p(t, x, x) = \text{str } e(t, x, x)$ とおく. 従って, $\text{str } e(t, x, x)$ の $t \downarrow 0$ での挙動が得られると (G-B-C) が示されることになる.

熱方程式の基本解をつかて, (G-B-C) を示す方法について, 今までの結果を以下に述べる.

Mackean-Singer [8] は $e_p(t, x, x)$ の $t \downarrow 0$ での漸近展開を得ることにより, $n=2$ の場合に

$$\text{str } e(t, x, x) = E(x)$$

を示した. Patodi [10] は境界のない場合に, 一般の n についてこれを示している. それは非常に巧妙な方法であったが, Cycon-Froese-Kirsch-Simon [2] は Patodi の上記論文で使った方法を Th.2 で述べるような代数的な使いやすい形にして, やはり (G-B-C) の境界のない場合の証明をしている. 解析的証明は, 上記以外にも, Gilkey [3], [4] の invariant theory をつかったもの, 及び確率論の手法では, Malliavin-Calculus 及び Th.2 を使った Ikeda-Watanabe [5], Shigekawa-Ueki-Watanabe [11] 等がある.

§ 2. Δ の表示.

g を M の Riemann metric とする. M の local patch U

上²、local orthonormal frame $\{X_1, \dots, X_n\}$ をとる。その dual を $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ とする。このとき共変微分をつか、

$$d = \sum_{i=1}^n \nabla_{X_i} e(\omega^i), \quad \delta = \sum_{i=1}^n \nabla_{X_i} \iota(X_i) \quad (\text{村上[9]})$$

と書ける。

記号 $e(\omega^i) \omega = \omega^i \wedge \omega$

$$(\iota(X_i) \omega)(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = \omega(X_i, Y_1, \dots, Y_{p-1})$$

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{\ell=1}^n c_{ij}^{\ell} X_{\ell}$$

を使、 Δ を書く。

$$\text{Th.1.} \quad \Delta = - \left\{ \sum_{j=1}^n \nabla_{X_j} \nabla_{X_j} - \sum_{i,j=1}^n c_{ii}^{\bar{j}} \nabla_{X_j} + \sum_{i,j=1}^n e(\omega^i) \iota(X_j) R(X_i, X_j) \right\}$$

Curvature transformation の係数を

$$R(X_j, X_k) X_{\ell} = \sum_{m=1}^n R_{\ell j k}^m X_m, \quad \text{と } L,$$

$e(\omega^{\ell}) = a_{\ell}^*$, $\iota(X_m) = a_m$ を使うと Th.1 より Δ の表象は次の様になる。

$$\underline{\text{Th. 1'}} \quad \sigma(\Delta) = - \left\{ \sum_{j=1}^n (q_j I - G_j)^2 - \sum_{i,j,m,l=1}^n R_{l,i,j}^m a_i^* a_j a_l^* a_m \right\} + r_1,$$

$$\text{但し,} \quad r_1 = \sum_{|k|=1}^n \sum_{j=1}^n (-i) \partial_{\bar{z}} q_j \partial_z q_j I + \sum_{i,j=1}^n c_{i,i}^j (q_j I - G_j),$$

$$\sigma(X_j) = q_j, \quad G_j = \sum_{m,l=1}^n c_{j,l}^m a_l^* a_m.$$

a_i^*, a_j については次の Proposition が基本的である。

$$\underline{\text{Prop. 1.}} \quad \begin{cases} a_i a_j + a_j a_i = 0 \\ a_i^* a_j^* + a_j^* a_i^* = 0 \\ a_i a_j^* + a_j^* a_i = \delta_{ij} \end{cases}.$$

§3. Berezin-Patodi formula.

先に述べた Lycon-Froese-Kirsch-Simon [2] にある定理を述べる。

V を次元 n の内積のある vector space, $\wedge^p(V)$ をその anti-symmetric p tensor とする。さらに $\wedge^*(V) = \bigoplus_{p=0}^n \wedge^p(V)$ とする。

$\{e_1, \dots, e_n\}$ を V の orthonormal base とし, a_i^* を $\wedge^*(V)$ の次の様な変換

$$a_i^* v = e_i \wedge v \quad \text{とし,}$$

a_i を a_i^* の adjoint とする。

$I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$ に対し $a_I = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}$, さらに $(a_I)^* = a_I^*$ と書くと,

Th. 2 (Berezin - Patodi formula).

$A \in L(\wedge^*(V))$ は $A = \sum_{I, J} \alpha_{IJ} a_I^* a_J$ と唯一つあらわ

せ,

$$\sum_{p=0}^n \text{tr} [(-1)^p A_p] = (-1)^n \alpha_{\{1, \dots, n\} \{1, \dots, n\}}$$

がある. 但し $A_p = A|_{\wedge^p(V)}$.

§4. R^n での基本解の構成.

(1). A, B は vector space (有限次元) 上の線形変換とする.

Def. 1. $C_0(B; A) = B$, $C_{j+1}(B; A) = [C_j(B; A), A]$ ($j \geq 0$),

$$H_j(t, B; A) = \int_0^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-sA} B e^{sA} ds \quad (j \geq 1).$$

Prop. 2. $f(t) = e^{-tA} B e^{tA}$ とすると, 任意の $J \in \mathbb{N}$ に

対し

$$f(t) = \sum_{j=0}^{J-1} \frac{C_j(B; A) t^j}{j!} + H_J(t, C_J(B; A); A).$$

Cor. $[e^{-tA}, B] e^{tA} = H_1(t, [B, A]; A)$

$$= \sum_{j=1}^{J-1} \frac{c_j(B; A) t^j}{j!} + H_J(t, c_J(B; A); A)$$

(2) $r_2(x, \xi)$ を各成分が $S_{1,0}^2(\mathbb{R}^n)$ に入る行列と見て, 斉次次数に分ける.

(*) $r_2 = p_2 I + p_1 + p_0$

とする. 但し $p_2 \in S_{1,0}^2(\mathbb{R}^n)$ は関数, p_j ($j=0, 1$) は各成分が $S_{1,0}^j(\mathbb{R}^n)$ に属するものとする. e^{-tr_2} について次がなりたつ.

Prop. 3. (i) 任意の α, β に対して正数 $C_{\alpha, \beta}, \lambda_{\alpha, \beta}$ が存在して

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tr_2})\| \leq C_{\alpha, \beta} e^{-tp_2 + C\langle \xi \rangle |t|} (|t| K \langle \xi \rangle^2 + 1)^{\lambda_{\alpha, \beta}} \sqrt{|t|}^{|\alpha|},$$

(ii) ξ に関する多項式で $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$ に入るものを成分にもつ行列 q に対し

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (H_k(t, q; r) e^{-tr_2})\| \leq C_{\alpha, \beta} e^{-tp_2 + C\langle \xi \rangle |t|}$$

$$\times (|t| K \langle \xi \rangle^2 + 1)^{\lambda_{\alpha, \beta}} \sqrt{|t|}^{2k + |\alpha| - m} \quad (t > 0).$$

本稿では $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$ の代りに, $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$ の subclass として次の K^m を導入し, Tsutsumi [12] においておこなった放物型方程式の基本解の構成の手順を, $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$ の代りに K^m で以下

に説明するようにおこなう.

$$a_j^* a_k = A_{j,k}, \quad A = (A_{j,k}) \in L$$

Def. 2. $K^m = \{ p(x, \xi; A); B(R^n) \text{ を係数とする } \xi, A \text{ について高々 } m \text{ 次の多項式} \}$.

Prop. 1 より 次の Prop. 4 が導かれる.

Prop. 4. (i) $p \in K^m$ ならば $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p \in K^{m-|\alpha|}$.

(ii) $p_j \in K^{m_j} (j=1, 2)$ ならば $[p_1, p_2] \in K^{m_1+m_2-1}$,
 $c_j(p_1; p_2) \in K^{m_1+j(m_2-1)} (\forall j)$.

P_u は symbol $p(x, \xi; A)$ をもつ擬微分作用素とする.
 作用素の積の展開定理は $S_{1,0}^m(R^n)$ の場合と同様に次の形になる.

Prop. 5. (i) $\sigma(P \cdot Q) = p \circ q$ と書くと ($p \in K^{m_1}, q \in K^{m_2}$)

$$p \circ q = \sum_{j=0}^{N-1} s_j(p, q) + r_N(p, q),$$

但し
$$s_j(p, q) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)} q_{(\alpha)} \quad \text{とあり,}$$

$$s_j(p, q) \in K^{m_1+m_2-j}, \quad r_N \in K^{m_1+m_2-N}$$

(ii) $\sigma([P_1, P_2]) \in K^{m_1+m_2-1} \quad (p_j \in K^{m_j} \quad j=1, 2).$

以下 $H_k(t; B) = H_k(t, B; r_2)$, $C_k(B) = C_k(B; r_2)$ と略記する.

Def. 3. $m \in \mathbb{R}$ に対し,

$$K_m = \{ K^j \text{ を係数とする } t \text{ の } d \text{ 次多項式' } j-2d \leq m \}.$$

$R_\lambda = \{ q(t, \xi) \in B(S_{1,0}^m) \text{ を係数とする行列} :$

$$\| \partial_t^k q_{(\beta)}^{(\alpha)}(t, x, \xi) \| \leq [c_{\alpha, \beta} e^{-tr_2} e^{tM\langle \xi \rangle} (t\langle \xi \rangle^2 + 1)^{l_{\alpha, \beta}} \\ \times \sqrt{t}^{|\alpha| - l - 2k} \}$$

このとき

Prop. 6. (i) $\partial_t^k \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q \in K_{m+2k-|\alpha|}$ if $q \in K_m$,

$$\partial_t^k \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q \in R_{m+2k-|\alpha|} \text{ if } q \in R_m.$$

(ii) $q_1 q_2 \in R_{\lambda+m}$ if $q_1 \in K_m$, $q_2 \in R_\lambda$.

(iii) $e^{-tr_2} \in R_0$.

(iv) $H_k(t, q) e^{-tr_2} \in R_{m-2k}$ if q は $S_{1,0}^m$ を成分とする行列].

Lemma 1. $u_0 = e^{-tr_2}$ とすると, 任意の $J \in \mathbb{N}$ に対し,

$$u_{0(\beta)}^{(\alpha)} = f_{0, \alpha, \beta} u_0 \pmod{R_{-|\alpha| - J}},$$

但し $f_{0, \alpha, \beta} \in K_{-|\alpha|}$.

Cor. $v = f e^{-tr_2}$ ($f \in K_m$) とすると, 任意の $J \in \mathbb{N}$ に対し,

$$v_{(\beta)}^{(\alpha)} = f_{\alpha, \beta} u_0 \pmod{R_{m-|\alpha| - J}},$$

但し $f_{\alpha, \beta} \in K_{m-|\alpha|}$.

Proof of Lemma 1. $|k|=1$ とすると

$$\begin{aligned} u_0(\alpha) &= -H_1(t, r_2(\alpha)) u_0 \\ &= - \left\{ \sum_{j=1}^J \frac{c_{j1}(r_2(\alpha)) t^j}{j!} + H_{J+1}'(t, c_J(r_2(\alpha))) \right\} u_0. \end{aligned}$$

以下 $|a|+|b|$ に対する帰納法を使う.

Lemma 2. 任意の $f \in K_m$, $v_0 \in K_{m-2}$, $J \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned} v_J &\in K_{m-2} \text{ と } u_J = v_J u_0 \text{ が} \\ g_J &\in K_{m-J} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + r_2 \right) u_J = (f + g) u_0 & (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ u_J|_{t=0} = v_0, & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

を満たす様にとれる.

Proof.
$$\begin{cases} \frac{dv_J}{dt} + [r_2, v_J] = f, & (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ v_J|_{t=0} = v_0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

の近似解を

$$\begin{cases} \frac{dv_J}{dt} = f & (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ v_J|_{t=0} = v_0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

から出発して逐次とけばよい.

(3) 基本解の構成.

Th. 3. $r = r_2 + r_1 + r_0$, $(r_j \in K^j)$ かつ r_2 は $(*)$ の形であつて $p_2 > C_0 |\xi|^2$ ($C_0 > 0$) とする. このとき任意の N に対し,

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + r \right) \circ e_N \equiv 0 & \text{mod } R_{-N+1} \\ e_N|_{t=0} = I \end{cases}$$

の解 e_N が $e_N = \sum_{j=1}^N u_j$, $u_j = v_j u_0$ ($v_j \in K_{-j}$) と求められる.

Proof. N を任意に取る. $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ まで $u_j = v_j u_0$ ($v_j \in K_{-j}$) とし求めるたとする.

$u_j^{(\alpha)} \equiv v_{j,0,\alpha} u_0 \text{ mod } R_N$ とあるから

$$\sum_{\substack{j+m+l=k \\ 0 \leq j < m}} S_m(r_{2-l}, u_j) \equiv \sum_{\substack{j+l+l=k \\ 0 \leq j < m}} \frac{1}{l!} r_{2-l}^{(\alpha)} v_{j,0,\alpha} u_0 \text{ mod } R_{-N+1}.$$

$g_k = \sum_{\substack{j+l+l=k \\ 0 \leq j < m}} \frac{1}{l!} r_{2-l}^{(\alpha)} v_{j,0,\alpha}$ とおくと, $g_k \in K_{2-k}$ とあり, u_k

を次の様に求める.

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + r_2\right) u = -g_k u_0 & (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の近似解を Lemma 2 において $J = N - k + 1$ とえらんで, それを $u_k = v_k u_0$ とする. $v_k \in K_{-k}$ である. このとき u_k は

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + r_2\right) u_k \equiv -g_k u_0 \pmod{R_{-N+1}}, \\ u_k|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

を満たす. 従って, $\sum_{j=0}^N u_j = e_N$ は

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + r\right) e_N \equiv 0 \pmod{R_{-N+1}} \\ e_N|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

を満たす.

R_{-N+1} の表象は r が strongly elliptic であるから. 任意の $K \geq 0$ に対し

$$\|q_{(p)}^{(\alpha)}\| \leq C_{K, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^K \sqrt{t}^{N-1-K}$$

の評価をもつから, 基本解の表象 $e(t, x, \xi) \in B(S_{1,0}^0)$ を積分の方程式を解いて求めると, N が任意であるので, その kernel は

$$\sqrt{\det g} \, e(t, x, x) = \tilde{e}_N(t, x, x) + O(t^{-n/2 + N/2})$$

とわかる。但し

$$\tilde{c}_N(t, x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} c_N(t, x, \xi) d\xi.$$

§ 5. (G-B-C) の証明

$$r_2 = - \sum_{j=1}^n (q_j I - G_j)^2 + R \in K^2, \quad p_2 = - \sum_{j=1}^n q_j^2 \geq c_0 |\xi|^2,$$

但し $R = \sum_{i,j,m,s=1}^n R_{s,i,j}^m a_i^* a_j a_s^* a_m$

であるから、§ 4 の結果より $\tilde{u}_j(t, x, x)$ を求めると十分である。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(t, x, \xi) d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \right)^n \sqrt{\det q} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{j=1}^n (i\eta_j - \sqrt{t} G_j)^2 - R t} d\eta \right\} \end{aligned}$$

$v \in K_{-j}$ ならば $v(t, x, \frac{\eta}{\sqrt{t}}, R) = O(\sqrt{t}^j) v(1, x, \eta, \sqrt{t} R)$

であるから

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} v(t, x, \xi, R) u_0(t, x, \xi) d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \right)^n \sqrt{\det q} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{v}(t, x, \frac{\eta}{\sqrt{t}}, R) e^{\sum_{j=1}^n (i\eta_j - \sqrt{t} G_j)^2 - R t} d\eta \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \right)^n \sqrt{\det q} O(\sqrt{t}^j) \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{v}(1, x, \eta, \sqrt{t} R) e^{\sum_{j=1}^n (i\eta_j - \sqrt{t} G_j)^2 - R t} d\eta \right\} \end{aligned}$$

但し $\tilde{v} \in K_{-j}$.

従, 3. Th. 2 より

$$\begin{aligned} \text{str } \tilde{u}_0(t, x, x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \sqrt{\det q} \{1 + O(\sqrt{t})\} \text{str } (e^{-Rt}) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right)^n \sqrt{\det q} (-1)^m \text{str} \left(\frac{R^m}{m!} \right) + O(\sqrt{t}) & n=2m, \\ 0(\sqrt{t}) & n=2m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{str } \tilde{u}_j(t, x, x) = O(\sqrt{t}^j) \quad (j \geq 1).$$

→ $\text{str } e(t, x, x)$ は t に依存しないから,

$$\text{str } e(t, x, x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right)^n (-1)^m \text{str} \left(\frac{R^m}{m!} \right) & n=2m, \\ 0 & n=2m+1, \end{cases}$$

を得る. よ, R^m の $a_{\{1, \dots, n\}}^*, a_{\{1, \dots, n\}}$ の係数を求めることにより $\text{str } e(t, x, x) = E(x)$ が証明できる.

References

- [1] S.Chern: A simple instrinsic proof of the Gauss Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. Ann.of Math.45(1944),747-752.
- [2] H.L.Cycon,R.G.Froese,W.Kirsch and B.Simon: Schrodinger operators. Texts and Monographics in Physics,1987, Springer.
- [3] P.B.Gilkey: The boundary integrand in the formula for the signature and Euler charactertistic of a Riemannian manifold with boundary. Adv.in Math.,15(1975),334-360.
- [4] P.B.Gilkey: Invariance Theory,The Heat Equation,and the Atiyah-Singer Index Theorem.1984,Publish or Perish,Inc..
- [5] N.Ikeda and S.Watanabe: Stochastic differential equations and diffusion process.Kodansha/North-Holland,Tokyo/Amsterdam,1981,Secnd Ed.1989.
- [6] C.Iwasaki: The fundamental solution for pseudo-differential operators of parabolic type. Osaka J.Math.14(1977),569-592.
- [7]C.Iwasaki: Parabolic intial-boundary value problems and the asymptotic expansion of the fundamental solutions. 「偏微分方程式の解の構造の研究」 (数理解析研究所講究録 766) (1991), 83-103, (in Japanese).
- [8] H.P.Mackean and I.M.Singer: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J.Differential Geometry 1(1967),43-69.
- [9] S.Murakami: Manifolds.1969,Kouritsussuppan, (in Japanese).
- [10] V.K.Patodi: Curvature and the eigenforms of the Laplace operator. J.Differential Geometry 5(1971), 233-249.
- [11] I.Shigekawa,N.Ueki and S.Watanabe: A probabilitic proof of the Gauss-Bonnet-Chern Theorem for manifolds with boundary. Osaka J. Math. 26(1989),897-930
- [12] C.Tsutsumi: The Fundamenatl Solution for a Degenerate Parabolic Pseudo-Differential Operator. Proc.Japan Acad. 50(1974),11-15.