

Tangent sequence of r.v.'s について
 - Hitzenko の martingale 不等式への応用 -

富山大理 菊池万里 (Masato Kikuchi)

Kwapień - Woyczyński (cf. [6]) によって導入された確率変数の tangent sequence の概念は、その後、主に P. Hitzenko によって martingale 不等式の研究に用いられている。([1] ~ [4])。その中で、tangent sequence を用いて martingale 不等式を独立増分の場合に帰着させる方法は、大変興味深くまた、有用(?)と思われるので、ここに紹介したい。

まず、tangent sequence の定義を与える。以下、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及び σ -field の増大列 $(\mathcal{F}_n)$ が与えられているものとし、便宜上 $\mathcal{F}_0$ は trivial σ -field とする。

定義 1 (Kwapień - Woyczyński)

$(\mathcal{F}_n)$ -adapted 2 つの確率変数列 $(X_n), (Y_n)$ が Tangent とは

$$(1) \quad \mathbb{P}(X_n \geq \lambda | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{P}(Y_n \geq \lambda | \mathcal{F}_{n-1}) \quad \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

となることである。また (X_n) と $(-X_n)$ が tangent のとき (X_n) は conditionally symmetric であるという。

確率変数 X の $\mathcal{G}$ に関する conditional distribution を $Q(X|\mathcal{G})$ と書くことにすれば (1) は次のようになる。

$$Q(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Q(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}$$

定義 2 (Kwapień-Woyczyński)

$(\mathcal{F}_n)$ -adapted な確率変数列 (Y_n) が condition (CI) とみなすとは。

$$\begin{cases} Q(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Q(Y_n|\mathcal{G}) \quad \text{for every } n \in \mathbb{N} \\ (Y_n) \text{ is } \mathcal{G}\text{-conditionally independent.} \end{cases}$$

となる $\mathcal{F}_0$ の sub- σ -field $\mathcal{G}$ が存在することである。

P. Hitzenko (1990 [37]) は、これら2つの概念をうまく使って、独立な確率変数列に対して Rosenthal が示した moment inequality を martingale の場合に拡張している。つまり

定理 1 (Hitzzenko)

すべての martingale $f = (f_n)$ と $2 \leq p < \infty$ に対し

$$(2) \quad \|f^*\|_{L^p} \leq \frac{kp}{\log p} \{ \|s(f)\|_{L^p} + \|d^*\|_{L^p} \}$$

が成立する。ただし $\log p = \max\{\ln p, 1\}$ で、 $\frac{kp}{\log p}$ は best possible.

定理 1 において、 $f^* = \sup_n |f_n|$, $d^* = \sup_n |d_n|$, $d_n = f_n - f_{n-1}$ 及び $s(f) = (\sum_{n=1}^{\infty} E[d_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}])^{1/2}$ である。以下、記号はすべてこれらに準ずるものとする。また、 $kp/\log p$ が best possible とは (2) で $kp/\log p$ の代りに C_p とおいたとき、 $C_p \geq kp/\log p$ とする $k > 0$ が存在するということである。

さて、(2) は、本質的には Rosenthal による (d_n) が独立の場合にはじめて示され、その後、Johnson-Schechtman-Zinn [5] による、正確な growth rate $kp/\log p$ が計算された。martingale 不等式との関連は、歴史的な背景も含めて Hitzzenko [3] に詳しい。尚 (2) と逆向きの不等式も、もち論成立するがその場合の constant の growth rate は、多数の著者によって知られていて、 $\sqrt{p}$ である。

以下に定理1の証明の概略を、tangent sequencesの応用を中心に、Hitzenkoに従って述べる: (2)の growth rate $KP/\log p$ が best possible であることについては、Johnson - Schechtman - Zinn によって (d_n) が独立の場合に) 既に示されているので、ここでは省略する。

証明の方針は次の通りである: martingale $f = (f_n)$ を 2つの martingale g, h の和に分解する. $f = g + h$, ここに g はその difference sequence が condition (CI) をみたすもの, h は、その difference sequence が conditionally symmetric とするものである. 次に、 g については Johnson - Schechtman - Zinn の結果 (i.e. independent case) に帰着させ、 h については、いわゆる "good λ 不等式" に帰着させる. 以上の方針のもとに、次の手順で証明を進める. ① g の処理 ② h の処理 ③ 分解の存在. まず、 g の処理から始める.

命題 1.

$g = (g_n)$ は martingale で difference sequence $(e_n) = (g_n - g_{n-1})$ が condition (CI) (定義2) をみたすとする. このとき.

$$\|g^*\|_p \leq \frac{Kp}{\log p} \{ \|g\|_p + \|e^*\|_p \} \quad p \geq 2$$

が成立する. (K は γ によらずよい定数 > 0).

証明: Johnson - Schechtman - Zinn の結果とあらためて書くと
 (ξ_n) が独立, $E[|\xi_n|] < \infty$, $E[\xi_n] = 0$ とおけば

$$(3) \quad \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \right\|_{L^p} \leq \frac{Kp}{\log p} \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \right\|_{L^2} + \|\xi^*\|_{L^p} \right\}$$

ということである. さて, (e_n) は condition (CI) をみたすから,
ある sub- σ -field $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を取ると

$$\begin{cases} Q(e_n | \mathcal{F}_{n-1})(\cdot, B) = Q(e_n | \mathcal{G})(\cdot, B) \text{ a.s. for } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ (e_n) \text{ は } \mathcal{G}\text{-conditionally independent.} \end{cases}$$

とできる. (e_n) の $\mathcal{G}$ -cond. independencyess より, $N \in \mathbb{N}$ に對して

$$Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx) = \bigotimes_{n=1}^N Q(e_n | \mathcal{G})(\cdot, dx) \text{ a.s.}$$

つまり, projection $P_n(x_1, \dots, x_N) = x_n$ は $Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx)$ に
 關して独立で

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx) P_n(x) = \int_{\mathbb{R}} x Q(e_n | \mathcal{G})(\cdot, dx)$$

$$= E[e_n | \mathcal{G}] = E[e_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

従って, Johnson - Schechtman - Zinn の結果 (3) より

$$\begin{aligned}
 E \left[\left| \sum_{n=1}^N e_n \right|^p \middle| \mathcal{G} \right]^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx) \left| \sum_{n=1}^N p_n(x) \right|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \frac{Kp}{\log p} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx) \left| \sum_{n=1}^N p_n(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx) \sup_{1 \leq n \leq N} |p_n(x)|^p \right)^{1/p} \right\} \\
 &\leq \frac{Kp}{\log p} \left\{ E \left[\left| \sum_{n=1}^N e_n \right|^2 \middle| \mathcal{G} \right]^{1/2} + E[e^{*p} | \mathcal{G}]^{1/p} \right\} \quad (p \geq 2)
 \end{aligned}$$

となる. ここで, $E \left[\left| \sum_{n=1}^N e_n \right|^2 \middle| \mathcal{G} \right]^{1/2} = \sum_{n=1}^N E[e_n^2 | \mathcal{G}]^{1/2} = \Delta(\mathcal{G})$ ($\because (e_n)$ は $\mathcal{G}$ -cond. indep.) に注意して,

$$E \left[\left| \sum_{n=1}^N e_n \right|^p \middle| \mathcal{G} \right]^{1/p} \leq \frac{Kp}{\log p} \left\{ \Delta(\mathcal{G}) + E[e^{*p} | \mathcal{G}]^{1/p} \right\} \quad p \geq 2$$

となる. 両辺の L^p -norm を取って, $N \rightarrow \infty$ とすれば「求める結論を得る。」

次に R の処理にかかる. これは, Burkholder, Davis, Garza, Gundy らにより, 既に入変よく知られている, 分布不等式に帰着させる方法であり, 目新しいものではない. 従ってここでは, 本質的な部分に触れるだけにとどめ, 詳細は省略する.

命題 2

$R = (R_n)$ は martingale で, その difference sequence (d_n) は, conditionally symmetric (定義 1) であるとする. このとき,

$$\|f^*\|_{L^p} \leq \frac{kp}{\log p} \{ \|s(f)\|_{L^p} + \|d^*\|_{L^p} \} \quad p \geq e^2$$

が成立する. (k は p によらず)

補題 (Hilczenko)

$f = (f_n)$ は martingale で, 各 $n \geq 1$ に対し, $|d_n| = |f_n - f_{n-1}| \leq W_n$ なる $\mathcal{F}_{n-1}$ -measurable r.v.'s W_n が存在すると仮定する.

このとき, 分布不等式

$$\mathbb{P}(f^* > \beta\lambda, s(f) \vee W^* \leq \delta\lambda) \leq 2\varepsilon(\alpha) \mathbb{P}(f^* > \lambda), \quad \delta > 0, \beta > 1 + \delta, \lambda > 0$$

が成立する. ただし, $\alpha = (\beta - 1 - \delta)/\delta$, $\varepsilon(\alpha) = \exp(-\frac{\alpha}{2} \log(1 + \frac{\alpha}{2}))$.

この分布不等式から, (少々細かい計算が必要であるが) 通常の方法により, $p \geq e^2$ に対し,

$$(4) \quad \|f^*\|_{L^p} \leq \frac{kp}{\log p} \|s(f) \vee W^*\|_{L^p} \leq \frac{kp}{\log p} \{ \|s(f)\|_{L^p} + \|W^*\|_{L^p} \}$$

となる. これを用いて, 命題 2 は次のように示される.

命題 2 の証明: (d_n) が conditionally symmetric であるから, 任意の bounded Borel function $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$(5) \quad E[\Phi(d_n, d_{n-1}^*) | \mathcal{F}_{n-1}] = E[\Phi(-d_n, d_{n-1}^*) | \mathcal{F}_{n-1}] \quad a.s$$

である. 従って

$$d_n' = d_n I_{\{|d_n| \leq 2d_{n-1}^*\}} \quad , \quad d_n'' = d_n I_{\{|d_n| > 2d_{n-1}^*\}}$$

とおくと, $(d_n'), (d_n'')$ は martingale difference seq. である. (Davis の分解). また, $|d_n| + 2d_{n-1}^* \leq 2|d_n| \leq 2d_n^*$ on $\{|d_n| > 2d_{n-1}^*\}$ だから, $|d_n''| \leq 2(d_n^* - d_{n-1}^*)$. 故に

$$(6) \quad \|(h'')^*\|_{L^p} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |d_n''| \right\|_{L^p} \leq 2 \|d^*\|_{L^p}$$

他方, $W_n = 2d_{n-1}^*$ とし, h' に上の補題 (5) を用いると

$$\begin{aligned} (7) \quad \|(h')^*\|_{L^p} &\leq \frac{kp}{\log p} \left\{ \|\Delta(h')\|_{L^p} + 2\|d^*\|_{L^p} \right\} \\ &\leq \frac{kp}{\log p} \left\{ \|\Delta(h)\|_{L^p} + \|d^*\|_{L^p} \right\} \quad (p \geq e^2) \end{aligned}$$

(ただし, k は行ごとに異なる.) (6), (7) より容易に命題 2 を得る.

かくの如く, 命題 1 または 2 の条件をみたす martingale g, h については, 目的の不等式が得られた. 従って, あとは任意の martingale $f = (f_n)$ が, このようた g と h の和に分解できる

ことを示せばよい。以下に、その方法を述べるが、ここが
Hilczenko の論文の essential な部分 といえそうである。

命題 3

$p_n: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ は n -th projection, $\mathcal{B}_n = \sigma(p_1, \dots, p_n)$,
 $\mathcal{B} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, とし, $\bar{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^N$, $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$, $\bar{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{B}_n$
 $n=1, 2, \dots$ とおく. 任意の $(\mathcal{F}_n)$ -adapted sequence (d_n) に対し

$$\bar{P}(H) = \int_{\bar{\Omega}} P(d\omega) \int_{\mathbb{R}^N} \bigotimes_{n=1}^{\infty} Q(X_n | \mathcal{F}_{n-1})(\omega, d\alpha) I_H(\omega, \alpha) \quad (H \in \bar{\mathcal{F}})$$

$$\bar{d}_n(\omega, \alpha) = d_n(\omega), \quad \bar{e}_n(\omega, \alpha) = p_n(\alpha)$$

とおくとき、次が成立:

- i) $(\bar{d}_n)$ と $(\bar{e}_n)$ は $(\bar{P}$ と $(\bar{\mathcal{F}}_n)$ に関して) tangent.
- ii) $(\bar{e}_n)$ は $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \{\phi, \mathbb{R}^N\}$ に関して condition (CI) を満たす
- iii) (d_n) と $(\bar{d}_n)$, 及び $(E[\Phi(d_n) | \mathcal{F}_{n-1}])$ と $(\bar{E}[\Phi(\bar{d}_n) | \bar{\mathcal{F}}_{n-1}])$ の有限次元分布は等しい. ただし, Φ は bounded Borel function, $\bar{E}[\cdot | \bar{\mathcal{F}}]$ は $\bar{\mathcal{P}}$ に関する conditional expectation である.
- iv) $\bar{d}_n$ と $\bar{e}_n$ は $\bar{\mathcal{F}}_{n-1}$ -conditionally indep. ($n=1, 2, \dots$) である.

この補題の証明は簡単なので略す.

定理1の証明: $p \geq e^2$ としてよい. 与えられた martingale $f = (f_n)$ の difference sequence (d_n) に対し, 命題3の条件をみたす $(\bar{d}_n), (\bar{e}_n)$ をある確率空間 $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ 上にとり

$$\bar{f}_n = \sum_{k=1}^n \bar{d}_k, \quad \bar{g}_n = \sum_{k=1}^n \bar{e}_k, \quad \bar{h}_n = \sum_{k=1}^n (\bar{d}_k - \bar{e}_k)$$

とおく. $(\bar{d}_n)$ と $(\bar{e}_n)$ は tangent だから

$$\bar{\mathbb{E}}[\bar{e}_n | \bar{\mathcal{F}}_{n-1}] = \bar{\mathbb{E}}[\bar{d}_n | \bar{\mathcal{F}}_{n-1}] =_{\bar{d}} \mathbb{E}[d_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

i.e. $(\bar{d}_n), (\bar{e}_n)$ は共に martingale difference である. また

$$\begin{aligned} \Delta_N(\bar{g}) &\equiv \left(\sum_{k=1}^N \bar{\mathbb{E}}[\bar{e}_k^2 | \bar{\mathcal{F}}_{k-1}] \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^N \bar{\mathbb{E}}[\bar{d}_k^2 | \bar{\mathcal{F}}_{k-1}] \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\bar{d}}{=} \left(\sum_{k=1}^N \mathbb{E}[d_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \right)^{1/2} \equiv \Delta_N(f) \end{aligned}$$

両辺の L^p -norm をとって $N \rightarrow \infty$ とすると $\|\Delta(\bar{g})\|_{L^p} = \|\Delta(f)\|_{L^p}$.

次に, $(\bar{d}_n)$ と $(\bar{e}_n)$ が tangent だから

$$\bar{\mathbb{P}}(\bar{e}^* > \lambda) \leq 2 \bar{\mathbb{P}}(\bar{d}^* > \lambda) = 2 \mathbb{P}(d^* > \lambda) \quad \lambda > 0$$

となる. 最初の不等号は, 2つの tangent sequences の間に常に成立するもので証明は容易である. (Hilczenko [1] or [2])

$$\Delta(\bar{h}) = (\Delta(\bar{f})^2 + \Delta(\bar{g})^2)^{\frac{1}{2}} \leq \Delta(\bar{f}) + \Delta(\bar{g})$$

であることより従う。(8)と(9)を合すると容易に定理1が得られる。

□

参 考 文 献

- [1] P. Hitczenko, Comparision of moments for tangent sequences of random variables, Prob. Th. Rel. Fields 78 (1988), 223-230.
- [2] _____, Best constants in the decoupling inequality for non-negative random variables, Stat. Probab. Lett. 9 (1990), 327-329.
- [3] _____, Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality, Ann. Probab. 18 (1990), 1656-1668.
- [4] _____, Upper bounds for the L_p -norm of martingales, Prob. Th. Rel. fields 86 (1990), 225-238.
- [5] W.B. Johnson, G. Schechtman, and J. Zinn, Best constants in moment inwqualities for linear combination of independent and exchangeable random variables, Ann. Probab. 13 (2985), 234-253.
- [6] S. Kwapien and W.A. Woyczynski, Tangent sequences of random variables: Basic inequalities and their applications. Proc. Conf. on Almost Everywhere Convergence in Probab. and ergodic Theory, Academic, New - York, (1989), 237-265.