

Fourier 変換の擬局所性について

東大 教養 内山 康一

佐藤の超函数において重要な層 $\mathcal{C}$ に対応する層を Distribution の場合に Fourier 変換を用いて構成することを目指す。すなわち, cosphere bundle $\pi: S^*\Omega \rightarrow \Omega$ に対して, $\mathcal{D}'(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \cong \pi_* \mathcal{M}(\Omega)^{**} \cong \Gamma(S^*\Omega, \mathcal{M})$ となる層 $\mathcal{M}$ を作る。応用上は $\mathcal{M}$ の section の台 (singular support S-S) が重要であり, Hörmander は直接これを (wave front set) 構成した。

記号を導入しておく。 $\tilde{\Sigma}$ を $\mathbb{R}_\xi^n$ における原点 O を頂点とする錐体とする。 $\Sigma = \tilde{\Sigma}/\mathbb{R}^+$ とおき $\mathbb{R}_\xi^n$ 中の単位球 S^{n-1} と同一視する。

次の関数空間を導入する。 (Hörmander [1],[2])

$$H_{loc}^{s,\infty}(\Omega \times \Sigma) = \{ u \in H_{loc}^s(\Omega) ; \forall (x_0, \xi_0) \in \Omega \times \Sigma \\ \exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ s. t.}$$

$$(1) \varphi(x_0) \neq 0$$

$$(2) \forall N, |\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N} ; \xi \text{ は } \xi_0 \text{ の近く} \}$$

*) $\mathcal{C}_0$ の記号は $\mathcal{D}'/\mathcal{E}$ 用に保留しておく。藤原 [3].

ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合. Σ は S^{n-1} の (開) 集合. (2) の ξ_0 の近くで成立するという意味は ξ_0 を内部に含む錐体が存在してそこで成立することである.

$H_{loc}^{s,\infty}(\Omega \times \Sigma)$ は $H^\infty(\Omega \times \Sigma)$ と略記もする.

$H_{loc}^{s,\infty}(\Omega \times S^{n-1}) = C^\infty(\Omega)$ は明らかであろう. (以下の補題から従う.)

定義中に現われた局所的条件を少しいいかえておこう.

補題 1. $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ に対して急減少評価

$$(*) \quad \forall N, \quad |\hat{u}(\xi)| \leq C_N / (1+|\xi|)^N$$

が ξ_0 の近傍 σ_{ξ_0} で成立しているとせよ. 任意の $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し, $\widehat{\alpha u}$ について評価 (*) が σ_{ξ_0} を少しちぢめた近傍 $\sigma'_{\xi_0} \subset \sigma_{\xi_0}$ で成立する.

$$(\text{証明}) \quad |\widehat{\alpha u}(\xi)| = |\alpha * \hat{u}(\xi)|$$

$$\leq \int_{\sigma'_{\xi_0}} |\alpha(\xi-\eta)| |\hat{u}(\eta)| d\eta + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \sigma_{\xi_0}} |\alpha(\xi-\eta)| |\hat{u}(\eta)| d\eta$$

$$|\alpha(\xi-\eta)| \leq C_M / (1+|\xi-\eta|)^M, \quad M=1, 2, \dots$$

$$\leq C_M (1+|\xi|)^M / (1+|\eta|)^M, \quad C_M (1+|\eta|)^M / (1+|\xi|)^M$$

および, $1+|\xi-\eta| \geq 1+\varepsilon|\xi|, \quad 1+\varepsilon|\eta|$ から従う.

$$\xi \in \sigma'_{\xi_0}, \quad \eta \in \sigma_{\xi_0}. \quad (\therefore)$$

補題2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Sigma \subset S^{n-1}$ をそれぞれ開集合とする. $u \in H_{loc}^{s,\infty}(\Omega \times \Sigma)$ とする. compact 集合 $K \subset \Omega$ と $\kappa \subset \Sigma$ に対して次のような $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在する.

(1) φ は K の近傍で恒等的に 1. ($\varphi \geq 0$).

(2) $\forall N, |\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N / (|\xi| + 1)^N, \xi \in \mathbb{R}^n$.

(証明) (I). $x_0 \in K$ を固定する. $u \in H^\infty(\Omega \times \Sigma)$ だから各 $\xi \in K$ に対し φ_ξ が存在して ξ の近傍 δ_ξ で $\widehat{\varphi_\xi u}$ が急減少である. $\bigcup_{\xi \in K} \delta_\xi \supset K$ で K は compact だから有限被覆 $\delta_1, \dots, \delta_N$ と $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して (1) $\varphi_i(x_0) \neq 0$, (2) $\widehat{\varphi_i u}$ は δ_i で急減少である. $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_N$ とせよ. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ で $\varphi(x_0) \neq 0$. 一方、少しちぢめた近傍 $\exists \delta'_1 \subset \subset \delta_1, \dots, \exists \delta'_N \subset \subset \delta_N$ があって $\bigcup \delta'_i \supset K$ としてよい. $\widehat{\varphi u} = \widehat{\varphi_1 \cdots \varphi_N u} = \widehat{(\varphi_2 \cdots \varphi_N) \varphi_1 u}$. 補題1からこれは δ'_1 で急減少. δ'_2 以下同様であるから K で急減少である.

(II) まず (I) の φ は $\varphi \geq 0$ としてよい. x_0 を動かせば各 $x \in K$ に対し、 φ_x と近傍 U_x が存在して、(1) $\varphi_x \in C_0^\infty(\Omega)$, φ_x は U_x で正. (2) $\widehat{\varphi_x u}$ は K で急減少. K も compact であるから、 $\bigcup_{x \in K} U_x \supset K$ から $\bigcup_{i=1}^N U_i \supset K$ と $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ をえらべる. $\varphi_i > 0$ in U_i だから $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_N$ とすれば $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi > 0$

in K かつ $\widehat{\varphi u}$ は K で急減少.

(III) $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ を K 上で $\varphi^{-1}(x)$ に等しいもの
とせよ. ψ と φ の積を改めて φ とすればこれが求めるもの
である. ($\therefore$)

定義 $M^s(\Omega \times \Sigma) = H_{loc}^s(\Omega) / H_{loc}^{s,\infty}(\Omega \times \Sigma) \cdot$

$H_{loc}^s(\Omega)$ の元 u の $M^s(\Omega \times \Sigma)$ における商を $[u], [u]_\Sigma$
などと記す. $X \subset \mathbb{R}_+^n$ 領域に対し, $X \times S^{n-1}$ (X の余
球接束) の基本近傍系として $\{\Omega \times \Sigma\}$ がとれる.

$\Omega \times \Sigma \mapsto M^s(\Omega \times \Sigma)$ は presheaf を作る.
同伴する $X \times S^{n-1}$ 上の層を $\mathcal{M}^s$ とする.

i.e. $\mathcal{M}^s = \varinjlim_{\Omega \times \Sigma} M^s(\Omega \times \Sigma).$

中間的なものとして Ω を固定して,

$$\mathcal{M}^s(\Omega) = \varinjlim_{\Sigma \subset S^{n-1}} M^s(\Omega \times \Sigma)$$

を考える. これは S^{n-1} 上の層である.

命題. sections の同型

$$\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega)) \cong H_{loc}^s(\Omega) / \mathcal{E}(\Omega).$$

が成立する.

(証明) (I)対応を構成する. $f_\Sigma: H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \rightarrow M^s(\Omega, \Sigma)$ は $H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \ni [u]$ に対して商 $[u]_\Sigma$ を対応させればよい. つまり, covering $\bigcup \Sigma_i = S^{n-1}$ に対して, $\{[u]_{\Sigma_i}\}$ は $M^s(\Omega)$ の section を定める.

逆 $\Gamma(S^{n-1}, M^s(\Omega)) \ni m \mapsto g(m) \in H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$ を構成しよう. m は十分細かい covering $\bigcup_{i=1}^N \Sigma_i \supset S^{n-1}$ に対して, $\{u_i \in H_{loc}^s(\Omega); u_i - u_j \in H^\infty(\Omega \times \Sigma_{ij})\}$ という組と同値である. ($\Sigma_{ij} = \Sigma_i \cap \Sigma_j$).

$\Sigma \supset K$ compact とする. K の近傍で 1 に等しい $\varphi_K \in C_0^\infty(\Omega)$ があって $\overline{\varphi_K(u_i - u_j)}$ は Σ'_{ij} で急減少.

$\{\Sigma_i\}$ に同伴する 1 の分解を $\beta_i(\xi)$ とする. (i.e. $\beta_i \in C^\infty$, $\text{supp } \beta_i(\xi) \cap \{|\xi| > 1\} \subset \Sigma_i$, $\sum \beta_i(\xi) \equiv 1$ ($|\xi| > 1$)).

いま compact $L \supset K$ ならば $u_L - u_K \in \mathcal{E}(K)$ を示そう. $\overline{(u_K - u_L)} = \sum \beta_i(\xi) \overline{(\varphi_K - \varphi_L) u_i(\xi)}$. β_i を 0 階の PDO とみれば $\varphi_K - \varphi_L \equiv 0$ in K から $u_K - u_L \in \mathcal{E}(K)$ が従う. u_K を定めるときの $\{u_i, \Sigma_i\}$ のえらび方, 1 の分解 β_i のえらび方による任意性は K の内部では $\mathcal{E}$ に吸収される. 従って $K \mapsto u_K$ によって $H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$ の元が定まることがわかる. この対応を g とする.

(II) 次に $\Gamma(S^{n-1}, M^s(\Omega)) \xrightleftharpoons[f]{g} H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$

において $f \circ g = \text{id.}$, $g \circ f = \text{id.}$ を示そう.

$$H_{\text{loc}}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \ni [u] \quad f_{\Sigma}[u] = [u]_{\Sigma} \in M^s(\Omega \times \Sigma).$$

$$g \circ f[u] \longleftrightarrow K \mapsto U_K = \mathcal{F}^{-1} \sum \beta_i \widehat{\varphi_K u} \\ = \varphi_K u. \quad \therefore u = U$$

代表元のとり方は $\mathcal{E}(\Omega)$ に吸収されて考えなくてよい. ゆ

えに $g \circ f = \text{id}$ in $H_{\text{loc}}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$.

逆に, $\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega)) \ni m \longleftrightarrow \{[u_i]_{\Sigma_i} \in M^s(\Omega \times \Sigma_i)\}$ に対して $f \circ g(m) = u$ とおく. $u - u_i \in H^{\infty}(\Omega \times \Sigma_i)$ を示せば十分である. つまり $\forall (x_0, \xi_0) \in \Omega \times \Sigma_{i_0}$ に対し,

$\varphi(x_0) \neq 0$ かつ $\widehat{\varphi(u - u_i)}$ が ξ_0 の近くで急減少となる $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ をみつければよい. 実は何でもよい. $\varphi(x_0) \neq 0$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ とする. $K = \text{supp } \varphi$ とする. φu を考

えるのには $u_K = \mathcal{F}^{-1} \sum \beta_j \widehat{\varphi_K u_j}$ でよい. 従って

$$\widehat{\varphi(u - u_{i_0})} = \widehat{\varphi} * \sum \beta_j \widehat{\varphi_K (u_j - u_{i_0})}$$

右辺 $\underbrace{\xi_0 \in \Sigma_{i_0}}_{\Sigma \dots \text{は}}$ の近くで急減少ゆえ補題1から全体が急減少. ゆえに $f \circ g = \text{id.}$ in $\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega))$.

定理 1. $\Gamma(\Omega \times S^{n-1}, \mathcal{M}^s) \cong H_{\text{loc}}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$.

(証明). $\Gamma(\Omega, \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Omega' \subset \Omega}} H_{\text{loc}}^s(\Omega')/\mathcal{E}(\Omega')) = H_{\text{loc}}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$

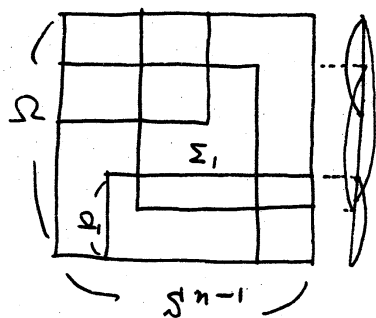
は $H^1(\Omega, \mathcal{E}) = 0$ から従う.

(I) 対応の構成. $H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \ni [u] \mapsto [u]_{\Omega' \times \Sigma} \in H_{loc}^s(\Omega')/H^\infty(\Omega' \times \Sigma)$ は制限と商によって定まる.

$\{[u]_{\Omega'_i \times \Sigma_i}; \bigcup \Omega'_i \times \Sigma_i \supset \Omega \times S^{n-1}\}$ は $\Omega \times S^{n-1}$ 上の $\mathcal{M}^s$ の section を定める. これを $f: H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \Gamma(\Omega \times S^{n-1}, \mathcal{M}^s)$ とする. 逆を定めよう.

$\Gamma(\Omega \times S^{n-1}, \mathcal{M}^s) \ni m$ はある loc. finite な open covering $\bigcup \Omega_i \times \Sigma_i = \Omega \times S^{n-1}$ と, $\{u_i \in H_{loc}^s(\Omega_i); u_i - u_j \in H_{loc}^s(\Omega_{ij} \times \Sigma_{ij})\}$ という組によって表現される. これをまずとり直そう. 有限添字集合 $S_x = \{j; \Omega_j \ni x\} \subset N = \{1, 2, \dots\}$ を定義すると,

$\{\bigcap_{S_x \ni j} \Omega_j, x \in \Omega\}$ は $\{\Omega_i\}$ の細分である. 添字 x は多すぎる. $S_1, S_2, \dots$ と番号づけられる. すなわち $\{\bigcap_{S_i \ni j} \Omega_j, i=1, 2, \dots\} = \{\Omega'_i; i=1, 2, \dots\}$ とする.



このとき各 i について

$$\bigcup_{S_i \ni l} \Sigma_l = S^{n-1}$$

である. S_i の中からひとつ $l(i) \in S_i$ を指定しておく.

$\Omega \times S^{n-1}$ の covering として,

$\{\Omega'_j \times \Sigma_{l(i)}; j=1, 2, \dots, i \in S_j\}$ がとれる.

$u_l, l \in S_j$ を Ω'_j に制限して $\{u_l \in H_{loc}^s(\Omega'_j)\}$ を考えれば $u_l - u_{l'} \in H^\infty(\Omega'_{jj'} \times \Sigma_{ll'})$, $l' \in S_{j'}$.

これは m の別の表現である。

まず $\{u_e \in H_{loc}^s(\Omega'_j)\}_{e \in S_j}$ で各 j ごとに命題の証明の方法に従ってはりあわせて $\{U_j \in H_{loc}^s(\Omega'_j)/\mathcal{E}(\Omega'_j)\}$ を得る。 U_j, U_k の Ω'_{jk} 上の差をくらべよう。 $\forall \varphi \in$

$C_0^\infty(\Omega'_{jk})$ に対し, $\text{supp } \varphi = K$ とおくと,

$$\varphi(U_j - U_k) = \varphi \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{e \in S_j} \beta_e(\xi) \widehat{\varphi_k u_e} - \sum_{e' \in S_k} \beta_{e'}(\xi) \widehat{\varphi_k u_{e'}} \right\}$$

が $\text{mod } C_0^\infty(\Omega'_{jk})$ で成立する。

$\varphi_k(u_e - u_{e'})$ は $\Sigma_{ee'}$ の内部で急減少であることに注意すれば $\varphi(U_j - U_k) \in C_0^\infty(\Omega'_{jk})$ がわかる。(右辺で coverings $\{\Sigma_e, e \in S_j\}, \{\Sigma_{e'}, e' \in S_k\}$ の共通細分を考えよ) これで $g: \Gamma(S^{m-1} \times \Omega, \mathcal{M}^s) \rightarrow H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$ が定まった。

(II) $f \circ g = \text{id}, g \circ f = \text{id}$ を示そう。

$g \circ f = \text{id}$ は容易である (命題の証明)。 $f \circ g = \text{id}$ については以下の通り。 $\Gamma(\Omega \times S^{m-1}, \mathcal{M}^s) \ni m \leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \{u_i \in H_{loc}^s(\Omega_i) \text{ s.t. } u_i - u_j \in H^\infty(\Omega_{ij} \times \Sigma_{ij})\} \\ & \leftrightarrow \{u_e \in H_{loc}^s(\Omega'_j) \text{ s.t. } u_e - u_{e'} \in H^\infty(\Omega'_{jj'} \times \Sigma_{ee'})\} \\ & \xrightarrow{f} \{U_j \in H_{loc}^s(\Omega'_j)/\mathcal{E}(\Omega'_j)\} = U \in H_{loc}^s(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega). \end{aligned}$$

従って $[U]_{\Omega_i \times \Sigma_i} - u_i \in H^\infty(\Omega_i \times \Sigma_i)$

$$\Leftrightarrow [U]_{\Omega'_j \times \Sigma_e} - u_e \in H^\infty(\Omega'_j \times \Sigma_e)$$

をみればよい。 $U = \{U_j\}$ より, $[U_j]_{\Omega'_j \times \Sigma_e} - u_e \in H^\infty(\Omega'_j \times \Sigma_e)$

に同値でこれは命題ですんでいる。 ($\therefore$)

定理 2. 層 $\mathcal{M}^s$ は柔軟 (soft) である。

(証明) $K \subset \Omega \times S^{n-1}$ を閉集合とする。 任意に

$m \in \Gamma(K, \mathcal{M}^s)$ を考える。これは loc. finite open covering $K \subset \bigcup_i (\Omega_i \times \Sigma_i)$ が存在して $u_i \in H_{loc}^s(\Omega_i)$, $u_i - u_j \in H^\infty(\Omega_{ij} \times \Sigma_{ij})$ となる組 $\{u_i\}$ によって表現される。

(I) $\forall i, \Omega_i = U$ となっている場合。

K の $S^{n-1} \wedge$ の射影を κ とする。 $\kappa \subset \bigcup \Sigma_i$.

ここで $\beta_i \in C^\infty(R_\xi^n)$ をえらんで, $\text{supp } \beta_i$ は $|\xi|$ が十分大きいとき Σ_i に属し, かつ $\sum \beta_i(\xi) = 1$ が κ の近傍で成立せられる。

$\tilde{u} = \mathcal{F}^{-1}(\sum \beta_i(\xi) \widehat{\varphi_{\pi_K} u_i})$ とおく。 π_K は K の $U \wedge$ の射影。 $f(\tilde{u})$ は

はじめの m の拡張である。なぜなら,

$f(\tilde{u}) \leftrightarrow \{[\tilde{u}]_{U \times \Sigma_i}\}$ だから, $\forall (x, \xi) \in K$ に対し

$\exists U_x, [\tilde{u}]_{U_x \times \Sigma_\xi} - u_i \in H^\infty(U_x \times \Sigma_\xi)$ をみればよく,

$\exists \Sigma_\xi, U_x$ としては φ_{π_K} が恒等的に 1 である範囲にとればよい。

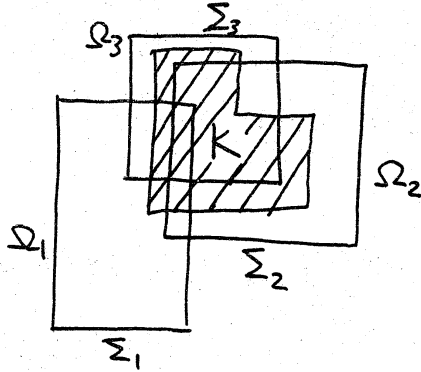
$\varphi \in C_0^\infty(U_x)$ に対し, $\widehat{\varphi(\tilde{u} - u_i)} =$

$$\widehat{\varphi(\tilde{u} - \varphi_{\pi_K} u_i)} = \widehat{\varphi * \sum_j \beta_j \varphi_{\pi_K} (u_j - u_i)} + \widehat{\varphi * (1 - \sum \beta_j) \varphi_{\pi_K} u_i}$$

これは Σ_3 で急減少. (ここで $(x, \xi) \in U \times \Sigma_i$).

(II) 一般の場合.

定理1の証明と同様に covering をとり直す. 従って



$$\Gamma(K, M^s) \ni u$$

$$\longleftrightarrow \{u_e \in H_{loc}^s(\Omega_j') ; j \ni e\}$$

かつ

$$u_e - u_{e'} \in H^\infty(\Omega_{jj'}' \times \Sigma_{ee'})$$

$$K \subset \bigcup_{\substack{j \in S_j \\ e \in S_j}} \Omega_j' \times \Sigma_e \}$$

としてよい. πK の近傍で有効な $\{\Omega_j'\}$ に属する1の分解を $\alpha_j(x)$, $\bigcup_{e \in S_j} \{K \cap (\Omega_j' \times \Sigma_e)\}$ の S^{n-1} の射影の近傍で有効な1の分解を $\{\beta_{je}\}_e$ とする. $\text{supp } \alpha_j$ の近傍で1である $\psi_j \in C^\infty(\Omega_j')$ をとり,

$$u = \sum_j \alpha_j \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{e \in S_j} \beta_{je}(\xi) \widehat{\psi_j u_e}(\xi) \right)$$

とおく. まず $u \in H_{loc}^{s, j}(\Omega)$.

次に $\forall (x_0, \xi_0) \in K$ に対し, $(x_0, \xi_0) \in \Omega_j' \times \Sigma_e$.

Σ_{α_j} が1に等しい所の内部に台をもつ $\varphi \in C^\infty(\Omega_j')$, $\varphi(x_0) \neq 0$ をとる. $\widehat{\varphi(u - u_e)} = \sum_{j \text{ (有限)}} \widehat{\varphi \alpha_j} * \left(\sum_{e \in S_j} \beta_{je} \widehat{\psi_j u_e} \right)$

— $\widehat{\psi_j u_e}$ ξ_0 の近傍に限ってみれば

$$= \sum_j \widehat{\varphi \alpha_j} * \sum \beta_{je} \widehat{\psi_j (u_{e'} - u_e)} \quad \text{これはここで急減少. (}\therefore\text{)}$$

$\mathcal{D}'/a$ について. $\mathcal{D}'(\Omega) \subset a(\Omega)$ の特長づけを Fourier 変換の増大度によって行っても, その λ 方向での局所化と合成に困難があって, このような方法だけでおし通せるかどうか不明である. (藤原 [3] の試みがあった.)

- [1] Hörmander : C.P.A.M. 1971. 671-704 p.
- [2] " Acta Math. 1971. とくに 119~133 p.
- [3] 藤原. 1972 超函数シンポジウム. 6月, および
1972, 6月 東大. 小松セミナー