

位相環の微分加群について

京大 教養 鈴木 敏

§ 1. 序

昨春秋、今年春の2回の学会に於ける講演の内容を群しく述べる。前者は、(5)、後者は、(6)として発表及至は発表予定である。前者は、離散賦値環の一回の微分に関する論文であり、後者は、位相環に関する高階微分の一般論的な内容をもつものである。順序として、後者を先に述べる。これを前者の準備として話すが、今の所高階微分の応用に関する問題は考えていないので、いささか龍頭蛇尾の感を持たれると思うが、それなら寧ろ、2つの独立な話題と見てもらった方が適切であろう。

先づ、Grothendieck (1), (2)の用語として次の説明をして置く。但し、環、Algebra と云うときには、常に可換で単位元をもつものに限ることにする。

環、加群の位相という時には、常に linear topology を考えることにする。ここに linear Topology と云うのは、(10)の近傍系の

基を、イデアルまたは、部分加群でとれる位相加群としての位相である。

(定義1) 位相環 A が preadmissible であるとは、 A に、ある開イデアル J が存在して任意の A の (0) の開近傍 V に対して、ある正の整数 n があり、 $J^n \subset V$ となることを言う。このとき、このような J のことを 定義イデアル と言う。

(定義2) A を位相環、 M を位相的 A -module とする。 M が formally projective A -module であるとは、次の場合を言う。任意の A の開イデアル $\mathfrak{o}$ 、discrete $A/\mathfrak{o}$ -module P, Q 、surjective A -homomorphism $u: P \rightarrow Q$ 及び連続な A -homomorphism $v: M \rightarrow Q$ が、与えられたとき、連続な A -homomorphism $w: M \rightarrow P$ で、

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ u \swarrow & & \searrow v \\ P & \xrightarrow{w} & Q \end{array}$$

なる可換図が成立する。

(定義3) R を位相環、 A を位相的 R -algebra とする。 A が、 R 上、formally smooth であるとは、次が成立することである。任意の discrete R -algebra E 、 E の nilpotent イデアル J 、 R -algebra homomorphism $u: A \rightarrow E/J$ が与えられたとき、 R -algebra homomorphism $v: A \rightarrow E$ が存在して、可換図

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\nu} & E \\
 & \searrow u & \swarrow \\
 & E/J &
 \end{array}$$

が成立する。(ここでも、 $J^2 = (0)$ と仮定 1 によりことは容易に判る。)

(定義 4) A を位相環、 M, N を位相的 A -module とする。
 $u: M \rightarrow N$ を連続な A -homomorphism とする。

(1) $u(M)$ が N の中で dense になるときに、 u は formally epimorphic であると言う。

(2) M の位相が N の位相の逆像であるときに、 u は formally monomorphic であると言う。

(3) u が formally epimorphic で formally monomorphic のとき、 u は formally bimorphic であると言う。

A を位相環、 M を位相的 A -module とするとき、

$S_A(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_A^n(M)$ で $S_A(M)$ の symmetric algebra を示す。一般性を持った $S_A(M)$ の位相は、(0) の開近傍の基が次の形のものとして与えられる。 $\{\mathcal{O} S_A(M) + U S_A(M)\}$ 。ただし、 $\mathcal{O}$ は、 A の (0) の近傍系をなすイデアル全体、 U は M の (0) の近傍系をなす、部分加群全体を動くものとする。 M の位相が、 A から導れる位相より粗いときは、上で $\mathcal{O} M \subset U$ なる couple $(\mathcal{O}, U)$ に限る。

R を位相環, A, B を R -algebra とするとき, 一般性をもつに: $A \otimes_R B$ の位相は, (0) の開近傍の基が, 次の形のものととして, 与えられる。 $\{a \otimes b + A \otimes \mathfrak{a}\}$ 。ただし, $\mathfrak{a}$ は A の (0) の近傍系をなすイデアル, $\mathfrak{b}$ は B の (0) の近傍系をなすイデアルを動くものとする。

§ 2. 位相環の高階微分加群

R を位相環, A を位相的 R -algebra とする。 $\Omega_{A/R}^{(g)}$ を A の R 上の, g 次の high order differentials の加群とする。つまり

$$0 \rightarrow I \rightarrow A \otimes_R A \xrightarrow{p} A \rightarrow 0, \quad p(a \otimes b) = ab,$$

なる exact sequence を考えるとき, $\Omega_{A/R}^{(g)} \simeq I/I^{g+1}$ 。

一般に, M を A -module とするとき, $\text{Dercont}_R(A, M)$ で A から M への連続な R -derivations の作る加群とする。 M として

その位相が, A から導入された位相より, 粗いものばかりを考える。(例えば, A のある開イデアル $\mathfrak{a}$ で annihilate される discrete な A -module がそうである。) M をこのような modules の作るカテゴリーに変るとき, $\text{Dercont}_R(A, M)$ を represent するような, $\Omega_{A/R}^{(g)}$ の位相は, §1 で考えた, $A \otimes_R A$ の一般性をもつ位相から導かれるものである。(普通 M は任意の位相 A -modules を動いてよいように考えられて居るよ

うであるが、これは誤りである。)

この§では、主に、このような位相を考えた $\Omega_{A/k}^{(2)}$ に関して次が成立するかどうかを考える。

“ A が k 上に formally smooth であるとき、 $\Omega_{A/k}^{(2)}$ が formally projective であるか？ ”

$\Omega_{A/k}^{(1)}$ に関しては、この主張は常に正しい。これは、次の様に容易に証明される。

α, p, q, u, v を (定義 2) におけるものとする。ただし $v: \Omega_{A/k}'' \longrightarrow Q$ 、 $\bar{A} = A/\alpha$ とし、Nagata ringifications $D_{\bar{A}}(p), D_{\bar{A}}(q)$ を考えると、 u は、 $u': D_{\bar{A}}(p) \longrightarrow D_{\bar{A}}(q)$ と、 k -algebra homomorphism に自然に拡張されるが、 u' の kernel J は、 p を含み、従って nilpotent イデアルである。 v は、 $a \in A$ に対し、 $v'(a) = (\bar{a}, v \circ d_{A/k}^2 a)$ とし、連続な k -algebra homomorphism $v': A \longrightarrow D_{\bar{A}}(q)$ に拡張出来る。ただし、 $\bar{a}$ は a の mod. α class, $d_{A/k}^2$ は canonical derivation: $A \longrightarrow \Omega_{A/k}^{(2)}$ とする。したがって、formal smoothness より連続な k -algebra homomorphism $w': A \longrightarrow D_{\bar{A}}(p)$ で、

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 w' \swarrow & & \searrow v' \\
 D_{\bar{A}}(P) & \xrightarrow{u'} & D_{\bar{A}}(Q)
 \end{array}$$

が可換図になるように出来る。

$w'(a) = (\bar{a}, \bar{w}(a))$ とすると、 $P^2 = (0)$ より、容易に、 $\bar{w}$ が、 $A \rightarrow P$ の連続な derivation であることが判る。

$\bar{w} = w \circ d_{A/k}^1$ と分解する。但し $w: \Omega_{A/k}^{(1)} \rightarrow P$ は A -module homomorphism。 w が連続なること、可換図、

$$\begin{array}{ccc}
 & \Omega_{A/k}^{(1)} & \\
 w \swarrow & & \searrow v \\
 P & \xrightarrow{u} & Q
 \end{array}$$

の成立することは容易に判る。

$\Omega_{A/k}^{(q)}$ に関しても我々の主張が、 $q=1$ のときのように無条件に成立することが望ましいのであるが、今の所旨く証明出来ない。そして、(定理2)のように、位相に関して、制限された形で証明する。ただし、このままだでも可成り一般性を持ったものであり、応用上は余り差支えが無いであろう。我々の困難の起る原因の一つは、Grothendieck (2) における次の結果を仮定することにある。

(Proposition 1) k を位相環、 A を位相的 k -algebra とする。 I を A の ideal として、 $C = A/I$ とおく。 C が formally smooth k -algebra であると仮定する。若し、 A が formally

smooth k -algebra で, $\mathcal{P}$ -admissible であれば次が成立する。

canonical surjections $\mathcal{P}_n : S_{\mathcal{C}}^n(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{I}}^n(A)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) は formally finitistic である。

(証明は、自然なことの組合せであるが、位相的な議論が甚だめづらしい。)

他の一つの困難は、種々な場合に加群が、induced topology を持たないと、議論のし難い点である。

(Proposition 2) A を位相環、 M を位相的 A -module とする。このとき、 M が formally projective A -module であるための必要十分条件は、 $S_A(M)$ が、formally smooth A -algebra であることである。証明は、定義及び $S_A(M)$ の位相の取り方から、容易に従う。

discrete な位相の場合には、

(Lemma 1) M が projective A -module なら、 $S_A^n(M)$ は projective A -module である。

(証明) M の projectivity より、ある free A -module F , $\varphi : F \rightarrow M$, $\psi : M \rightarrow F$, $\psi \circ \varphi = \text{id}_M$ なる

A -homomorphisms がある。これは、grade を保つ。

$$S_A(M) \xrightarrow{S_A(\varphi)} S_A(F) \xrightarrow{S_A(\varphi)} S_A(N)$$

と拡張される。但し、 $S_A(\varphi) \circ S_A(\varphi) = \text{id}_{S_A(M)}$ である。
従って我々の主張は、 $S_A(F)$ が多項式環であることから従う。

従って、

(Proposition 3) A を位相が discrete な環、 M を A -module とする。このとき次の3つの主張は互に同値である。

- (1) $S_A(M)$ は formally smooth A -algebra である。
- (2) M が projective A -module である。
- (3) $S_A^n(M)$ は projective A -modules である ($n=0,1,2, \dots$)。

(Lemma 2) A を環、 M を A -module とする。 α を A の ideal とする。 $\bar{A} = A/\alpha$ 、 $\bar{M} = M/\alpha M$ とおく。このとき、 $S_{\bar{A}}(\bar{M}) \cong S_A(M)/\alpha S_A(M)$ が成立する。

従って

(Proposition 4) A を位相環、 M を A -module で A から導かれた位相を持つものとする。このとき、次は同値で

ある。

(1) $S_A(M)$ は formally smooth A -algebra である。

(2) M は formally projective A -algebra である。

(3) $S_A^n(M)$ は formally projective A -module である

($n = 0, 1, 2, \dots$)。

次は定義から容易に従う。

(Lemma 3) A を位相環、 M, N を位相的 A -modules で、 $\varphi: M \rightarrow N$ を連続な A -homomorphism とする。このとき φ が, formally monomorphic である必要十分条件は、

(1) φ は M から N の部分加群 $\varphi(M)$ への open map であり、

(2) $\ker(\varphi)$ は M の任意の (0) の開近傍に含まれる。

(Lemma 4) A を位相環、 $\varphi: M \rightarrow N$ を formally isomorphic な A -modules の homomorphism とする。このとき次が成立する。

(1) M が formally projective な A -module である必要十分条件は、 N がそうであることである。

(2) 若し φ が surjective で、 M が induced topology を持つなら、 N も induced topology を持つ。

Grothendieck (2) の (20, 4, 5) の拡張として次が得られる。

(Proposition 5) R を位相環、 A を位相的 R -algebra とする。 $\Omega_{A/R}^{(g)}$ の (canonical な) 位相は A -module として A から induce される位相より粗い。若し A の開イデアルの $g+1$ 乗が常に開イデアルであれば、両位相は一致する。

(証明) 最初の主張は明らか。この § の初めの記号を用いて、仮定により、次を証明すればよい。“任意の A の開イデアル I に対して、 $(\Omega^{g+1} \otimes A + A \otimes \Omega^{g+1}) \cap I \subset I + I^{g+1}$ ”。ところで、 g に関する帰納法で、“ $z_i \in \Omega$ ($i=1, 2, \dots, g+1$), $w \in A$ に対して、 $z_1 \cdots z_{g+1} \otimes w = w \otimes z_1 \cdots z_{g+1} \in I + I^{g+1}$ ” が証明出来る。いま、 $\Omega^{g+1} \otimes A + A \otimes \Omega^{g+1} = \{ \sum a_i \otimes w_i + \sum w'_j \otimes a'_j \mid a_i, a'_j \in \Omega, w_i, w'_j \in A, \sum a_i w_i + \sum w'_j a'_j = 0 \}$ である。この元は、 $\sum a_i \otimes w_i + \sum w'_j \otimes a'_j = \sum a_i \otimes 1 \cdot (1 \otimes w_i - w_i \otimes 1) + \sum a'_j \otimes 1 \cdot (1 \otimes w'_j - w'_j \otimes 1) + \sum (w'_j \otimes a'_j - a'_j \otimes w'_j)$ と表わされるが、上の注意よりこれが、 $I + I^{g+1}$ にふくまれることが判る。

次は例えば局所環と、その完備化の間に成り立つ関係である。

(定理 1) R を位相環、 A, A' を位相的 R -algebras $\varphi: A \rightarrow A'$ を formally isomorphic な R -homomorphism とする

と、 φ は formally bimorphic な A -module homomorphism

$$\lambda: \Omega_{A|k}^{(q)} \longrightarrow \Omega_{A|k}^{(q)} \text{ を導く。}$$

証明は、定義及び自然なことの組合せで出来る。

(定理 2) k を位相環, A を formally smooth な k -algebra とする。 A が preadmissible, A の任意の開イデアルの $q+1$ 乗は、開イデアルであるとする。この時 $\Omega_{A|k}^{(q)}$ は formally projective A -module となる。

(証明) A が preadmissible なることから、 $B = 1 \otimes_k A$ が preadmissible なることは容易に従う。また $A \otimes_k A$ が、formally smooth A -algebra であることも容易に判る。従って (Proposition 1) に於ける、 k, A, I として、 A, B, I を取れば、

$$\varphi_n: S_A^n(I/I^2) \longrightarrow \text{gr}_I^n(B) \text{ が formally bimorphic であることが判る。}$$

そこで、今述べたことから、 $I/I^{n+1}, I^n/I^{n+1}$

($n = 0, 1, \dots, q$) が induced topology を持ち、 I^n/I^{n+1} が formally projective A -module であることが判る。discrete topology のときには、exact sequence

$$0 \longrightarrow I^q/I^{q+1} \longrightarrow I/I^{q+1} \longrightarrow I/I^q \longrightarrow 0$$

を用いれば、 I/I^{q+1} の formally projectivity は帰納法で示される訳であるが、我々の場合には、この各項が induced topology を持つことから、これを少し modify して証明する訳である。

一般に、位相環 A の上の induced topology を持つ位相的 A -

module M が formally projective であるのは、任意の A の開イデアル α に対して、 $M/\alpha M$ が、projective A/α -module であることを注意して置く。

そこで、 α を A の開イデアルとするとき、

$$0 \rightarrow I^l/\alpha I^l + I^{l+1} \rightarrow I/\alpha I + I^{l+1} \rightarrow I/\alpha I + I^l \rightarrow 0$$

が exact であることが示されればよい訳であるが、すぐには従はばい。ぬ、 I^l/I^{l+1} が開集合であり、 I^l/I^{l+1} が、 I/I^{l+1} の subspace であることから、 A の開イデアル α で、 $\alpha \subset I$ かつ、 $\alpha I \cap I^l \subset \alpha I^l + I^{l+1}$ なるものがある。このとき、exact sequence,

$$0 \rightarrow I^l + \alpha I / I^{l+1} + \alpha I \rightarrow I / I^{l+1} + \alpha I \rightarrow I / I^l + \alpha I \rightarrow 0$$

が成立するが、 I/I^l の formal projectivity より、これは A/α -modules の split exact sequence である。従って、modulo α においても exactness が保たれる。つまり、exact sequence

$$0 \rightarrow I^l + \alpha I / I^{l+1} + \alpha I \rightarrow I / I^{l+1} + \alpha I \rightarrow I / I^l + \alpha I \rightarrow 0$$

を得る。オス項は、 $I^l / (I^{l+1} + \alpha I^l + \alpha I) \cap I^l = I^l / I^{l+1} + \alpha I^l + (\alpha I \cap I^l) = I^l / I^{l+1} + \alpha I^l$ であり、所要の exact sequence が得られたことになる。

§3. 完備離散賦値環の微分加群

この節では、位相環の簡単な場合として、完備離散賦値環

の微分加群の構造を調べ、この様な環の derivations に関する N. Heerema, J. Neggers の結果その他についての考察を行う。

先ず、次の事柄は良く知られている。(例えば, Grothendieck (2)).

(Proposition 6) k を位相環, R を local ring, m をその maximal ideal, R は k -algebra であるとする。

(1) 次の exact sequence が成立する。ただし, d は, canonical derivation $d_{R|k}^{(1)}$ から導かれる写像である。

$$m/m^2 \xrightarrow{d} (R/m) \otimes_R \Omega_{R|k}^{(1)} \longrightarrow \Omega_{(R/m)|k}^{(1)} \longrightarrow 0$$

(2) k が体で, R/m が k 上に separable extension であれば,

$$0 \rightarrow m/m^2 \xrightarrow{d} (R/m) \otimes_R \Omega_{R/k}^{(1)} \longrightarrow \Omega_{(R/m)|k}^{(1)} \longrightarrow 0$$

は exact である。

(3) k が離散賦値環で, u を k の素元とする。 R/m が $k/u k$ 上に separable であれば,

$$0 \rightarrow m/m^2 + uR \rightarrow (R/m) \otimes_R \Omega_{R/k}^{(1)} \longrightarrow \Omega_{(R/m)/k}^{(1)} \longrightarrow 0$$

は exact である.

(Lemma 5) R を環, m を R の ideal, M を R -module とする. ある正の整数 l に関して, $m^l M = (0)$ であるとする. このとき, 次の 3 条件は同値である.

(1) M は free R -module である.

(2) M/mM は free R/m -module で $\text{Tor}_1^R(M, R/m) = 0$ である.

(3) M/mM は free R/m -module で canonical homomorphism: $\text{gr}_m^0(M) \otimes_{(R/m)} \text{gr}_m(R) \rightarrow \text{gr}_m(M)$ が bijective である.

さらに, この条件が成立するとき, $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の元の組で, その modulo mM での classes が, M/mM の R/m 上の free base であるとするれば, $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の free base である.

(略証) $L = \sum_{\lambda \in \Lambda} R X_\lambda$ を free module として, exact sequence:

$0 \rightarrow S \rightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$, $\varphi(X_\lambda) = u_\lambda$, を考える. これより,

$$\rightarrow \text{Tor}_1^R(M, R/m) \rightarrow S/mS \rightarrow L/mL \rightarrow M/mM \rightarrow 0$$

なる exact sequence, あるいは, 可換図

$$\begin{array}{ccc}
 L/mL \otimes_{(R/m)} m^n/m^{n+1} & \longrightarrow & m^n L/m^{n+1} L \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M/mM \otimes_{(R/m)} m^n/m^{n+1} & \longrightarrow & m^n M/m^{n+1} M
 \end{array}$$

等が考えられる。これらより容易に証明を得る。

いま, P を素数として, p を素元とする完備離散賦値環とすれば, P は素環上に formally smooth で, 従って $\Omega_P^{(1)}$ は formally projective であるが, P は局所環であるから, $\Omega_P^{(1)}/p^n \Omega_P^{(1)}$ は free P/pP -module である ($n=1, 2, \dots$)。 P の元の組 $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を, その modulo pP での classes $\{\bar{a}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が P/pP の $(P/pP)^P$ 上の p -independent base であるように取れば, $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の微分が $\Omega_{P/pP}^{(1)}$ の free base となり, Proposition 6 の (2) および Lemma 5 より, 各 $n=1, 2, \dots$ に対して, $\Omega_P^{(1)}/p^n \Omega_P^{(1)}$ は $\{d_P^{(1)}(a_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ 達の modulo $p^n \Omega_P^{(1)}$ classes を free base とする。従って, $\Omega_P^{(1)}$ は, その完備化 $\hat{\Omega}_P^{(1)}$ が, $\{d_P^{(1)}(a_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を free base とする, free P -module の完備化と, 同型であるような加群である。 $\hat{\Omega}_P^{(1)} =$

$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i d_P^{(1)}(a_{\lambda_i}) \mid \alpha_i \in P, \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0, \lambda_i \in \Lambda \right\}$ と表わされることを注意する。

いま、 R を *ramified* な剰余体の標数が p の完備離散賦値環とし、 P をその係数環とする。そのとき、ある Eisenstein 多項式 $f(x)$ が存在して、 $R \simeq P[X]/(f(x))$ で、 X の modulo $(f(x))$ class を u とすれば、 u は R の素元となる。 $\Omega_R^{(1)}$ は、 $(R \otimes_P \Omega_P^{(1)} \oplus R dx) / R((d_P f)(u) + f'(u) dx)$ と表わされる。ただし、 dx は R 上の自由な元と考え、 $(d_P f)(u)$ は、 $f(x)$ の係数の各々を、 $d_P^{(1)}$ による値で置き換え、 x を u で置き換えて得る $R \otimes_P \Omega_P^{(1)}$ の元とする。従って次を得る。 P に対して、上述の様に $\{a_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を取り、

(*) $(d_P f)(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (1 \otimes d_P^{(1)}(a_{\lambda_i})), \lambda_i \in \Lambda, \beta_i \in R,$ と表わす。

(Proposition 7) $Der^{(1)}(R, R) \simeq Hom_R(\Omega_R^{(1)}, R)$ は、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} R_{\lambda} \times R$ ($R_{\lambda} = R$) の subset と考えられ、
 $Der^{(1)}(R, R) \simeq \{(C_{\lambda}; t)_{\lambda \in \Lambda} \mid C_{\lambda} \in R, t \in R, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i C_{\lambda_i} + f'(u)t = 0\}$

と表現される。ただし、 $\partial \in Der^{(1)}(R, R)$ は、 $\partial a_{\lambda} = C_{\lambda}$, $\partial u = t$ のとき、 $(C_{\lambda}; t)_{\lambda \in \Lambda}$ で表わされる。

また明らかに

(Proposition 8) $\text{Der}^{(1)}(R/m, R/m) \simeq \text{Hom}_{(R/m)}(\Omega_{(R/m)}^{(1)}, R/m)$
 $\simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} (R/m)_\lambda \quad ((R/m)_\lambda = R/m) \quad \text{と表わされる。}$

更に, Proposition 6, (3) を用いて,

(Proposition 9) $(R/m) \otimes_R \Omega_R^{(1)}$ は $\{1 \otimes d_R^{(1)}(\alpha_\lambda), 1 \otimes d_R^{(1)}(u)\}_{i \in \Lambda}$ を base とする R/m -vector space.

従って,

$\text{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} (R/m)_\lambda \times R/m$
 と表わされる。

先の Eisenstein 多項式により導かれる関係(*)より, 次の数を定義する。これは元々(4)で J. Neggers により導かれたものと同値である。

(定義 5) $\Delta_{R/P}(u) = \min v(\beta_i) - v(f'(u))$

ここに, v は R の賦値, $v(\beta_i) = \infty$ も許すこととする。

R から R への derivation ∂ が, R/m から R/m への derivation を導くとき, つまり $\partial(m) \subset m$

なるとき、derivation ∂ は inducing であると言う。
 このようにして導かれた R/m から R/m への derivation $\bar{\partial}$ を induced であると言うことにする。 $g: R \rightarrow R/m$,
 $r: \Omega_R^{(1)} \rightarrow \Omega_{(R/m)}^{(1)}$ を canonical な maps とすれば、
 可換図

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d_R^{(1)}} & \Omega_R^{(1)} \\ \downarrow g & & \downarrow r \\ R/m & \xrightarrow{d_{(R/m)}^{(1)}} & \Omega_{(R/m)}^{(1)} \end{array}$$

が成立する。上で $\partial = f \circ d_R^{(1)}$, $\bar{\partial} = \bar{f} \circ d_{(R/m)}^{(1)}$ と書く。た
 だし、 $f: \Omega_R^{(1)} \rightarrow R$ は R -homomorphism, $\bar{f}: \Omega_{(R/m)}^{(1)} \rightarrow R/m$
 は R/m -homomorphism である。このとき、
 可換図

$$\begin{array}{ccc} \Omega_R^{(1)} & \xrightarrow{f} & R \\ \downarrow r & & \downarrow g \\ \Omega_{(R/m)}^{(1)} & \xrightarrow{\bar{f}} & R/m \end{array}$$

が成立する。 g, r は 次の maps を導く。

$$F: \text{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R) \longrightarrow \text{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m)$$

$$G: \text{Hom}_{(R/m)}(\Omega_{(R/m)}^{(1)}, R/m) \longrightarrow \text{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m)。$$

これらのことから明らかに、

(Proposition 10) R から R への derivation $\partial = f \circ d_R^{(1)}$ が inducing である条件は、 $F(f) \in \text{Image}(G)$ なることであり、 R/m から R/m への derivation $\bar{\partial} = \bar{f} \circ d_{(R/m)}^{(1)}$ が induced である条件は、 $G(\bar{f}) \in \text{Image}(F)$ なることである。

(定理3) R を unequal characteristic な完備離散賦値環とし、 m をその極大イデアルとするとき、次の2条件は同値である。

(1) $\text{Der}(R, R)$ の derivations はすべて inducing である。

(2) $\text{Der}(R/m, R/m)$ の derivations はすべて induced である。

(証明) Proposition 10より、次を証明することに帰着される。“ $\text{Image}(F) = \text{Image}(G)$ でなければ、 $\text{Image}(F)$ と $\text{Image}(G)$ の間に包含関係はない。” 実際、 $\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ のときは、 $\text{Image}(F) = \text{Image}(G)$ となり $\Delta_{R/P}(u) \leq 0$ のときには、後の事情が起ることを示す。 $\text{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m)$ は Proposition 9 により $\prod_{\lambda \in \Lambda} (R/m)_\lambda \times R/m$, $((R/m)_\lambda = R/m)$ と同一視されるが、Proposition 8 により

$$\text{Image}(G) = \{(\bar{C}_\lambda; 0)_{\lambda \in \Lambda} \mid \bar{C}_\lambda \in R/m\}.$$

また, Proposition 7 により

$$\text{Image}(F) = \{(\bar{C}_\lambda; \bar{t})_{\lambda \in \Lambda} \mid \bar{C}_\lambda, \bar{t} \text{ は } \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i C_{\lambda_i} + f'(u)t = 0 \text{ を満す } R \text{ の元の mod. } m \text{ classes}\}.$$

$\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ なら $C_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に任意の R の値を与えても, $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i C_{\lambda_i} + f'(u)t = 0$ を満す t の値が得られるが, この時 $t \in m$ となる。つまり $\bar{t} = 0$ 。したがって $\text{Image}(F) = \text{Image}(G)$ 。 $\Delta_{R/P}(u) \leq 0$ のとき, $t = 1$ において, この式を満す C_λ の存在が示されるから, $\text{Image}(F) \not\subset \text{Image}(G)$ 。また $\bar{i}$ を, $v(\beta_{\bar{i}}) = \min_{1 \leq i < \infty} v(\beta_i)$ なる整数とし, $\lambda \neq \lambda(\bar{i})$ なら, $C_\lambda \equiv 0 \pmod{m}$, また $C_{\lambda_{\bar{i}}} \equiv 1 \pmod{m}$ とおけば, 上の式は解けない。従って $\text{Image}(F) \not\subset \text{Image}(G)$ 。よって定理は証明された。

(系) 定理3の同値な叙述の成立する必要十分条件は

$\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ なることである。したがって, $\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ なる性質は係数環 P , 素元 u の取り方には無関係である。

$\Delta_{R/P}(u)$ に関して更に, 次のことが成立するが, 証明

は省略する。

(Proposition 11) (1) $\Delta_{R/P}(u) \leq 0$ なら、 $\Delta_{R/P}(u)$ の値は素元 u の取り方には無関係である。(2) $\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ なら、ある素元 w が、存在して、 $\Delta_{R/P}(w) = 1$ となる。

いずれの場合も P を取り変えれば、 $\Delta_{R/P}(u)$ の値が変り得ることは、実例で示される。 $\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ なる特殊な場合として、 R が不分岐な時があるが、更に一般に、

(定理4) R を完備不分岐局所環、 m をその極大イデアルとすれば、 $\text{Der}(R/m, R/m)$ の derivations はすべて induced である。

(証明) R は素環上に formally smooth、したがって、 $\Omega_R^{(1)}$ が formally projective であるから、 $\Omega_R^{(1)} \rightarrow R/m$ の homomorphism が、順次 $\Omega_R^{(1)} \rightarrow R/m^2, \dots, \Omega_R^{(1)} \rightarrow R/m^n, \dots$ と持ち上げられて、その極限として、 $\Omega_R^{(1)} \rightarrow R$ の homomorphism を得る。

さらに、次の定理が成立するが、証明は、省略する。

(定理5) R を定理4で述べられた条件を満足する完備離散賦値環とし、 P を係数環とするとき、 $\Omega_{R/P}^{(1)}$ は、 P の取り方に無関係である。実際これは、 $\Omega_R^{(1)}$ の完備化における *torsion elements* の全体の作る *submodule* と同型である。

参 考 文 献

- (1) A. Grothendieck, "Éléments de géometrie algébrique I", Inst. Hantes Études Sci. Publ. Math. 4 (1960).
- (2) A. Grothendieck, "Éléments de géometrie algébrique IV", Inst. Hantes Études Sci. Publ. Math. 20 (1964).
- (3) N. Heerema, "Derivations on p -adic fields", Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 346-351.
- (4) J. Neggers, "Derivations on p -adic fields", Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 496-504.
- (5) S. Suzuki, "Differential modules and derivations of complete discrete valuation rings", J. Math. Kyoto U., Vol. 9, no. 3 (1969), 425-437.

(6) S. Suzuki, "Modules of high order differentials of topological rings", J. Math. Kyoto U., Vol. 10, no. 2 (1970),
印刷中。