

Cauchy 問題の admissible data について

京大数理解析 西和田 公正

次のような Cauchy 問題を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} P(x, D) u = 0 \\ D_0^{j-1} u(0, x') = w_j(x') \quad \text{on } \Omega, \quad j=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

ここで $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $D = (D_0, D') = (D_0, D_1, \dots, D_n)$, $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ とあり, Ω は $\{x_0 = 0\}$ の開集合とする。 m 階線型微分作用素 $P(x, D)$ の係数は非特異値 Ω の $\mathbb{R}^{n+1}$ の近傍で実解析的であるとす。

C^∞ data $W = (w_1, \dots, w_m) \in C^\infty(\Omega)^m$ に対し (1) が Ω のある近傍で C^∞ 解をもつときに W を admissible data と呼ぶことにする。

もし λ の C^∞ data が admissible な λ は ξ_0 の方程式 $P_m(0, x', \xi_0, \xi') = 0$, $(x', \xi') \in T^*(\Omega) \setminus 0$ は実根のみをもつことが必要であることはよく知られている。(Lax [3], Mizohata [4], Levi condition の必要性も知られている。[5], [1])

ここで C^∞ data W とその analytic wave front set からの指定された場所 λ に関するものが admissible であるとき

P はどのような条件をみたすべきかを論じる。

I を $T^*(\Omega) \setminus 0$ の錐状部分集合とし、すなわちの $W = (w_j) \in C^\infty(\Omega)^m$ で $WF_A(w_j) \subset I$ をみたすものが admissible data であるとき Cauchy 問題 (1) は $\mathcal{E}_I$ -well-posed であると言うことにする。(解の一意性は Holmgren の定理より従う。また初期値に対する解の連続性もある意味でなりたつことがわかる。)

定理 Cauchy 問題 (1) が $\mathcal{E}_I$ -well posed ならばある I の錐状近傍 J が存在して $P_m(0, x', \xi_0, \xi') = 0, (x', \xi') \in J$ は ξ_0 について実根のみをもつ。

この結果は well-posed であるための必要条件であるが、この種の問題の十分条件については河合 [2] に示されている。([2] で構成された基本解は distribution となることが判るので、もし data が C^∞ であれば 解も C^∞ となる。)

定理の証明の方針は基本的には Lax-Mizohata の定理の場合と同様である。本稿ではまずそれを述べたあとに、二、三の例とそれから派生する新たな問題について述べる。

最後に境界値問題の admissible data の定義と若干の結果について述べる。

§1 証明の方針

$(s, \theta) \in T^*(\Omega) \setminus 0$ とし, $I = (s, R^*\theta)$ の時に証明すれば十分である. Ω の複素近傍を $\rightarrow$ とし $\tilde{\Omega}$ とする. また

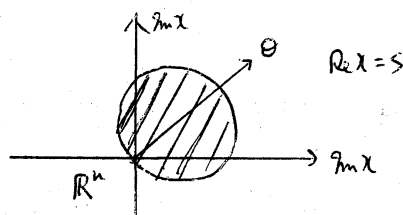
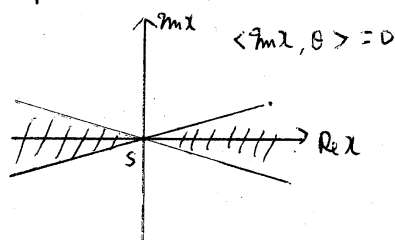
$$\psi_{s, \theta}(x') = \langle x', \theta \rangle + i \sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2, \quad x' \in \mathbb{C}^n$$

とかく, この函数をもちいて

$$\Omega(s, \theta) = \tilde{\Omega} \cap \{x' ; \Re \psi_{s, \theta}(x') > 0\}$$

と定義する.

注意1 $\Omega(s, \theta)$ は s 以外の Ω の点を内点として含んでおり, $\Re x = s$ のところでは $\mathbb{R}^n$ と2次の接触をしている.



2. $\tilde{\Omega}$ が stein ならば $\Omega(s, \theta)$ も stein である. いま $f(z)$ を一変数 $z \in \mathbb{C}$ の函数で $|z| < 1$ で正則, $|z| \leq 1$ で C^∞ , $|z| = 1$ を自然境界にもつようなものとする. するとあるから $f(e^{i\psi_{s, \theta}(x')})$ は $\Re \psi_{s, \theta} > 0$ で正則で $\Re \psi_{s, \theta} = 0$ を自然境界とする函数である. しかも $\mathbb{R}^n$ への境界値は C^∞ 函数である.

この $\Omega(s, \theta)$ をもついて admissible data の部分空間を次のように定義する.

$$A(s, \theta) = \{W = (w_j) \in C^\infty(\Omega)^m \mid \exists \tilde{w}_j \in \mathcal{O}(\Omega(s, \theta)) \text{ s.t. } w_j(z) =$$

$$\tilde{w}_j(x + i0 \cdot 0) \in C^\infty(\Omega) \}$$

とおく。筆者[6]の結果より $W = (w_j) \in A(s, \theta)$ に対して $WFA(w_j) \subset I$ がなりたつ。ゆえに仮定より W は admissible data である。次に $A(s, \theta)$ の位相を考える。 K_1 は Ω の compact set, K_2 は $\Omega(s, \theta)$ の compact set, Γ は

$$\{ \langle \gamma_m x', \theta \rangle > s_1 |\gamma_m x'| + s_2 |\gamma_m x'|^2 \} \cap (\tilde{\Omega} \text{ の compact set })$$

なる集合とする。但し $s_1 > 0$, $s_2 > 1$ の範囲で s_1, s_2 を動かす。このときセミノルム系 $A(s, \theta) \ni W \longrightarrow$

$$|W|_{k, k_1, k_2, \Gamma} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{|M|=k} \sup_{K_1} |D^M w_j| + \sup_{K_2 \cup \Gamma} |\tilde{w}_j| \right)$$

により $A(s, \theta)$ は Fréchet 空間となる。閉写像定理などをつか、2 次のことを証明できる (cf. [4])。

補題1 s の $\mathbb{R}^{n+1}$ の近傍 D が存在して、任意の $W \in A(s, \theta)$ に対して $Pu = 0$, $\gamma(u) = W$ on $D \cap \Omega$ なる $u \in C^m(\bar{D})$ が一意的に定まる。ここで $\gamma(u) = (u(0, x'), D_0 u(0, x'), \dots, D_0^{m-1} u(0, x'))$ である。更に $A(s, \theta) \ni W \longrightarrow u \in C^m(\bar{D})$ は連続であり、任意の $k \ll D$ に対して $\exists C, k, k_1, k_2, \Gamma$ が定まり

$$(E) \quad \sum_{|M|=m} \sup_K |D^M u| \leq C |W|_{k, k_1, k_2, \Gamma}$$

が成立つ。

さ2上の K とし $K = \{x \mid x_0 \geq 0, |x_0| + |x' - s| < a\}$
 $(C D, a > 0)$ とおくことにする。すると補題1により k_1, k_2, Γ が定まるわけであるが、次のことはあろうか? あるう。

$\left\{ \begin{array}{l} (S, \theta) \text{ の } T^*(\Omega) \text{ の } \overset{\text{ある}}{\text{近傍}} \cup \text{ が存在し} \\ q_m \psi_{S, \theta}(x) \geq 0 \text{ on } K_1, K_2, \text{ and } \Gamma, \forall (S, \theta) \in \cup. \end{array} \right.$
 ここでこのような $\cup$ の一点 (S, θ) で $P_m(0, S, \xi_0, \hat{\xi}) = 0$
 が $q_m \xi_0 < 0$ なる根をも、たとて矛盾を導くことに考える。
 以後座標変換により $(S, \theta) = (0, e_n)$ と仮定し、 $\psi_{S, \theta} = \psi$
 とおくことにする。

§2 証明の方針 (続き)

座標変換 $y = e^S x = (e^{s_0} x_0, \dots, e^{s_n} x_n)$, $s_j > 0$, $(e \geq 1)$ を考
 える。 $P_e(y, D_y) = P(e^{-S} y, e^S D_y)$ とおく。(cf. Gvrii-Petrov
 [1]) $u(y), w(y)$ が x の函数としては補題1の条件を
 みたしており、さらに $P_e u(y) = 0$, $\gamma(u) = W$ が成り立
 つとき

$$(E_e) \quad \sup_{K_e} |u(y)| \leq C e^{(m-1)s_0 + k|s'|} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{W \in K} \sup_{K_{1e}} |D^W w_j| + \sup_{K_2 \cup \Gamma_e} |\tilde{w}_j| \right)$$

が導かれる。ここで K_e etc. は y 空間の集合で、 K etc. の座
 標変換による像である。

$S_0 = S_m = 2\nu$, $S_1 = \dots = S_{n-1} = \nu$ とおくことにする (ν の

値はあとで定まる。) よ、2

$$P_p(y, D) = \rho^{2m\nu} (P_m(0; D_0, 0 \dots D_n) + O(\rho^{-\nu}))$$

$$P_m(0, D_0, 0 \dots D_n) = \text{const.} \prod_{i=1}^N (D_0 - \mu_i D_n)^{r_i}$$

こゝで μ_i ($i=1, \dots, N$) は相異なる根で、それらの重複度は r_i とする。

$$g_m \mu_1 \leq g_m \mu_2 \leq \dots \leq g_m \mu_N \quad (r_i \geq r_j \text{ if } g_m \mu_i = g_m \mu_j)$$

と並べられたいとする。仮定より $g_m \mu_1 < 0$ とある。

ρ に関する漸近解

$$V_p(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=-r_i+1}^{\infty} e^{-i\rho \varphi_p^{(i)}(y)} v_j^{(i)}(y) \rho^{-j}$$

を次の順序で構成する。

1. phase function

$$\varphi_p^{(i)}(y) = (\mu_i y_0 + y_n) + i y_1^2 + \dots + i y_{n-1}^2 + i \rho^{-2\nu} (\mu_i y_0 + y_n)^2$$

$$\begin{aligned} \text{即ち} \quad \varphi_p^{(i)}(0, y') & (\equiv \varphi_p(0, y')) = y_n + i y_1^2 + \dots + i y_{n-1}^2 + i \rho^{-2\nu} y_n^2 \\ & = \rho^{2\nu} \psi(x') \end{aligned}$$

とあるから $g_m \varphi_p^{(i)}(0, y') \geq 0$ on $K_{1\rho}, K_{2\rho}$ and I_ρ

2. transport equation

$$e^{-i\rho \varphi_p^{(i)}(y)} P_p(y, D) e^{i\rho \varphi_p^{(i)}(y)}$$

$$= \rho^{2m\nu} (\text{const.} (D_0 - \mu_i D_n)^{r_i} \rho^{m-r_i} + O(\rho^{m-r_i-1}) + O(\rho^{-\nu+m}))$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} \rho^{2m\nu} L_p^{(i)}(y, D)$$

即ち $m - r_i > -\nu + m$ i.e. $\nu > r_i$ ($i=1, 2, \dots, N$)

なる条件をおくと $L_p^{(2)}$ の最高次 (p に因する) の項は

$(D_0 - M_2 D_n) v^{(2)}$ とする。ゆえに方程式

$$L_p^{(2)}(y, D) \sum_{j=-r_2+1}^{\infty} v_j^{(2)}(y) p^{-j} = 0$$

から Cauchy - Kowalevsky の定理により $v_j^{(2)}$ を逐次決めてゆくことが出来る。この際初期値

$$D_0^{p-1} v_j^{(2)}(0, y'), \quad 1 \leq p \leq r_2, \quad j \geq -r_2+1, \quad 1 \leq l \leq N$$

の値をうまく決めることにより次のことがいえる。

補題 2 $P_p V_p \sim 0$ のある漸近解 $V_p(y) = \sum_{l=1}^N \sum_{j=-r_2+1}^{\infty} e^{ip\varphi_l(y)} v_j^{(l)}(y) p^{-j}$ が存在し 初期条件

$$(2) \quad \gamma(V_p(y)) \sim (c_1, pc_2, \dots, p^{m-1}c_m) e^{ip\varphi_p(0, y')}$$

を満たす。定数 c_j をうまくとることにより

$$v_{-r_2+1}^{(1)}(y_0, 0) \neq 0, \quad v_{-r_2+1}^{(l)} \equiv 0 \quad l > 1$$

とできる。

一方 (2) の初期データは通常の y' の正則関数と考えたこともできる。このとき Cauchy - Kowalevsky の定理により

$$P_p(y, D) V(y, p) = 0$$

$$\gamma(V(y, p)) = (c_1, pc_2, \dots, p^{m-1}c_m) e^{ip\varphi_p(0, y')}$$

なる $V(y, p)$ が存在する。もとの x 座標になおして考えれば容易にわかるように $V(y, p)$ は p による 0 の複素近傍で正則である。

補題 3 ある 0 の複素近傍 ω と、 ω で定義された正則函

数 $v^{(l)}(y, p)$ ($1 \leq l \leq N$) と $U(y, p)$ が存在し以下の条件を満たす,

$$\begin{aligned} V(y, p) &= \sum_{l=1}^N e^{ip\varphi_l^{(e)}(y)} v^{(l)}(y, p) + U(y, p) \quad \text{in } \omega \\ v^{(l)}(y, p) &\sim \sum_{j=-re+1}^{\infty} v_j^{(l)}(y) p^{-j} \quad \text{in } \omega \\ \sup_{\omega} |U(y, p)| &\leq c e^{-\varepsilon p} \quad (c, \varepsilon > 0) \end{aligned}$$

この補題が証明されればあとは容易である。実際 $V(y, p)$ を評価 (E_p) に代入してやる。右辺はあくから p の多項式 order を増大する。一方左辺は V の $(y_0, 0)$ ($y_0 > 0$, 小) の値をみればわかるように少なくとも $e^{-(\gamma_m \mu_1) y_0} p^{r-1}$ の order を増大する。この矛盾は $P_m(0, \hat{s}, s_0, \hat{\theta})$ が $\gamma_m s_0 < 0$ なる根をもつと仮定したからであった。同様にして (s, θ) のある近傍では $\gamma_m s_0 > 0$ なる根をもたないこともわかる。

§3 二. 三の例について

いくつかの具体例において data の admissibility を考えてみる。

<例1> $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + x \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\Omega = \{t=0\}$
 (w_1, w_2) が admissible とすると w_j は $x > 0$ で real analytic, $x \leq 0$ で C^∞ である。(C^∞ は大前提)
 一方 w_j が $x \geq -\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) で real analytic, $x \leq -\varepsilon$ で

C^∞ とする (w_1, w_2) は admissible である。

また定理より、ある $(w_1, w_2) \in C^\infty(\Omega)^2$ かつ w_j : real analytic

if $\lambda \neq 0$ なる non-admissible data が存在する。

<例2> $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\Omega = \{t=0\}$

(w_1, w_2) : admissible ならば

$$WFA(w_j) \subset \{(x, \xi) \mid \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 \geq 0\}.$$

一方 $WFA(w_j) \subset \{(x, \xi) \mid \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 > 0\}$ ならば

(w_1, w_2) は admissible である。

また $WFA(w_j) \subset \{(x, \xi) \mid \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0\}$ ならば

non-admissible data が存在する。

<例3> $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$, $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\Omega = \{t=0\}$

$$E_y(\theta) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \forall (x, y) \in \Omega, \forall \beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\exists M_\beta = M_{\beta, x, y}, \exists C = C_{x, y} \text{ (}\beta\text{ independent) s.t.}$$

$$M_\beta, C : \text{locally bounded in } (x, y),$$

$$\{ |D_x^\alpha D_y^\beta f(x, y)| \leq M_\beta C^{|\alpha|} |\alpha|! \}$$

とある。 $E_y(\theta)^2$ が admissible data の全体であることが

わかる。これはつまりこの data の両者の WFA が

全く同じ位置にあるにも拘わらず、一方は admissible であり

方は non-admissible な例をつくられた。

$\psi(z)$ は $|z| < 1$ で正則、 $|z| \leq 1$ で C^∞ 、 $|z| = 1$ が自然境界と

あるような $z \in \mathbb{C}$ の函数とする。

$$W = (w_1, w_2) = (\psi(e^{iy-y^2}), 0)$$

$$W' = (w'_1, w'_2) = (\psi(e^{iy-y^2})\psi(e^{iy-y^2-x^2}), 0)$$

と置く。 $w_1 \in E_y(\theta)$ より W は admissible である。一方 $w'_1(x, 0) = \psi(1)\psi(e^{-x^2})$ は $x=0$ で解析的でない ($\psi(1) \neq 0$ としよ)。ゆえに $w'_1 \notin E_y(\theta)$ であり W' は non-admissible data である。また $WFA(w_1) = WFA(w'_1) = \{(x, 0; 0, \eta) : \eta \neq 0\}$ となりたつ。

以上の例からわかるように、実根から虚根へうつる境目の処に data の WFA がわか、この場合は非常に複雑な状況になり、この WFA の位置づけは (non-) admissibility は決定できない。diffraction と関連した興味ある問題だと云えよう。

§4 境界値問題の admissible data

上の例では挙げなかったが $I \subset T^*(\Omega)$ 上で幾つかの実根と虚根が同時に存在する場合に、 I に WFA をもつ data の admissibility は単にデータの各成分の函数としての性質だけに帰着せず、各成分の相互関係が問題になり、このように問題を設定する。

$$(1)_p \quad \begin{cases} P(x, D) u = 0 \\ D_0^{j-1} u(0, x') = w_j(x') \quad \text{on } \Omega, \quad 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

殆んどの notation は前と同じだが p は $\leq m$ なる整数とする。data が admissible ということを定義したいのだが一意性がなりたたないため、単に解けるというだけでは不十分である。そこで解き方を一つ指定し、それに関して admissible かどうかについて考える。

$$\Psi(x', D') = (\psi_{ij}(x', D'))_{\substack{p+1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq p}}$$

を Ω 上の擬微分作用素を成分とする行列とする。

境界値問題 $(1)_p$ において $W = (w_j)_{1 \leq j \leq p} \in C^\infty(\Omega)^p$ が Ψ -admissible とは、 $(W, {}^t(\Psi(x', D')^t W))$ が $(1)_m$ の admissible data (i.e. $(1)_m$ が $(\Omega$ の近傍) $\cap \{x_0 > 0\}$ で C^∞ 解をもつ) であることとする。

Ψ の係数の解析性などについて若干の条件を課したため、次のことが証明できる。

すなわち $W = (w_j) \in C^\infty(\Omega)^p$ 且 $WF_A(w_j) \subset I$ をみたすものが Ψ -admissible であるならば、或る I の錐状近傍 J が存在して ξ_0 の方程式 $P_m(0, x', \xi_0, \xi') = 0$, $(x', \xi') \in J$ は p_ξ 以上 $g_m \xi_0 \geq 0$ なる根をもつ。(更に Ψ の主表象とこれらの根がある代数的関係が結ばれていることもわかる。)

References

- [1] Ivrii, V. Ya and Y. M. Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problems for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys 29(1974), 1-70.
- [2] Kawai, T., Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I)-The case with real principal symbols-, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 7(1971), 363-397.
- [3] Lax, P. D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24(1957), 627-647.
- [4] Mizohata, S., Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. 1(1961), 63- 104.
- [5] Mizohata, S. and Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples. II, Japan J. Math. 40(1971), 63-104.
- [6] Nishiwada, K., On local characterization of wave front sets in terms of boundary values of holomorphic functions, to appear.