

微係数の零が稠密である函数について

鶴 見 和 之

いたる所微分不可能な連続函数の例が Weierstrass によつて与えられて以来, 種々の病的 (pathological) と云はれる函数が与えられたが, それらの多くを調べる事は容易ではない。本講では「微係数の零が稠密である函数」の性質を文献 [3], [4], [9], [11], [14] などによつて見ることにします。これらの方法は解析学における他の例を作るにも参考になると思はれる。

1. 準 備

本講において, 「函数」とは, 他に言及しないが, 実数 $\mathbb{R}$ 又はその部分集合上で定義された実数値函数とする。また, 集合及び関連事項については Hausdorff: Set Theory [14] によつたが, ここに必要な項目をまとめておきます。

1.1. 実数 $\mathbb{R}$ (又はこの部分集合 X) の閉部分集合族 F と開部分集合族 G を含む最小の σ -代数を Borel 集合族と云い, $\mathcal{B}$ と表し, その元を Borel 集合と云う。これは次の様に作られる: 可算個の開集合の和として表される集合を F_σ -集合と云い, この全体を F_σ と表す, また, 可算個の開集合の積として表される集合を G_δ -集合と云い, この全体を G_δ と表す。これらを 1 級の Borel 集合と云う。次に, 可算個の F_σ -集合の積集合を $F_{\sigma\delta}$ -集合と云い, この全体を $F_{\sigma\delta}$ と表す, また, 可算個の G_δ -集合の和集合を $G_{\sigma\delta}$ -集合と云い, この全体を $G_{\sigma\delta}$ と表す。これらを 2 級の Borel 集合と云う。以下同様に, 3 級, 4 級, ... が定義される。この時, $\mathcal{B} = \bigcup F_\alpha = \bigcup G_\alpha$ と表される。

1.2. f を $\mathbb{R}$ またはその部分集合上で定義された函数とする。任意の実数 a に対して、集合 $\{f > a\} := \{x \mid f(x) > a\}$, $\{f < a\}$ (又は $\{f \geq a\}$, $\{f \leq a\}$) が F_σ -集合 (又は G_σ -集合) であるとき、 f は α 級の Borel 函数 であると言う。

1.3. 連続函数列 $\{f_n\}$ の実列極限として表される函数 f を (高々) 1 級の Baire 函数 と言う。1 級の Baire 函数列 $\{f_n\}$ の実列極限として表される函数を 2 級の Baire 函数と言う、以下同様に α 級の Baire 函数が定義される。

1.4. (Lebesgue-Hausdorff の定理). α 級の任意の Borel 函数は α 級の Baire 函数であり、逆に、 α 級の任意の Baire 函数は α 級の Borel 函数である。

1.5. 函数 f の連続点の集合を C_f , 不連続点の集合を D_f と表す。 f が 閉区間 I 上の函数とする。 C_f が I の稠密な部分集合ならば、 f は I で 実性不連続 (pointwise discontinuous) と言う。(ここで、 f が 1 級の Baire 函数ならば、 C_f は G_σ -集合で、 D_f は F_σ -集合である。)

(Baire の定理). f が 閉区間 I で (高々) 1 級の Baire 函数であるための必要十分条件は、 I の任意の完全部分集合 P に対して $f|_P$ (f の P への制限) が P 上で実性不連続であることである。

1.6. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して、 $\mu(A)$ は A の Lebesgue 測度とする。

2. Pompeiu 函数

G を区間 $I := [a, b]$ で定義された函数とする。

(2.1). G が I 上の Pompeiu 函数であるとは, G が I で微分可能で, G' が I で有界で $Z := Z_{G'} := \{x \mid G'(x) = 0\}$ が I の稠密な境界集合であるときである。この函数族を P で表す。

(2.2). G が I 上の P_1 型函数であるとは, G が I で微分可能で G' が I で有界で, Z が I の稠密な集合であるときである。この函数族を P_1 で表す。

(2.3). G が I 上の P_2 型の函数であるとは, G が I で微分可能で, Z が I の稠密な境界集合であるときである。この函数族を P_2 で表す。

(2.4). G が I 上の広い意味での Pompeiu 函数であるとは, G が連続で, I の任意の点で有限又は無限の微係数を持ち, Z が I の稠密な境界集合であるときである。この函数族を PG で表す。

これらの函数族に対して, 次の関係が成り立つ: $P \subset P_2 \subset PG$, $P \subset P_1$.

Pompeiu 函数の導函数を Pompeiu 導函数と云い, 他の型の函数の導函数についても同様である。

(([9], p.6))

定理 1. g を区間 $I = [a, b]$ 上で定義された広い意味での Pompeiu 函数とする。このとき, $Z = \{x \mid g'(x) = 0\}$ は I において, G_δ 型の Borel 集合である境界集合である。更に, $\mu(Z) < b - a$ である。

(証明) g' は 1 級の Baire 函数であるから, 実性不連続である。そして, Z は g' の連続点の集合 $C_{g'}$ を含み, G_δ 集合である境界集合である。

Denjoyの定理によつて, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha < \beta$) に対し, $P_{\alpha, \beta} := \{x \mid \alpha < g(x) < \beta\}$ は正の測度で, 空でない。この定理と g が境界集合である事によつて, Z の余集合は正の測度である, 故に, $\mu(Z) < b-a$ 。

定理2 ([9], p. 7) 次の条件を満す P_2 型の函数 G が存在する; 即ち, $Z = \{x \mid G'(x) = 0\}$ の測度は 0 である。

(この函数 G を作るには, 次の Choquet の定理が必要である。)

Choquet の定理: E を測度 0 の G_δ -型の Borel 集合とする。

このとき, 次の条件を満す単調増加で, 絶対連続である函数 F が存在する; 即ち, 任意の実数 x で一意に定まる有限又は無限の一直正なる導函数を持ち, $E = \{x \mid F'(x) = \infty\}$ である。

(ここで, F は絶対連続であるから, [12], p. 225, 定理 6.1 により, F は Lusin の条件 (N) を持つ。)

定理2の函数 G の作り方:

今, 集合 E を, G_δ -集合で, 測度 0 で, いたる所稠密であるとする。 F を Choquet の定理による函数とする。 F の逆函数を G とし, $Z := \{x \mid G'(x) = 0\}$ とする。 このとき, F は単調増加で, 連続であるから, F は任意の実数 x で, ただ1つの直に正である導函数を持ち, 従つて G は定義域の任意の実数 x で, ただ1つの有限な導函数を持ち, $F(E) = Z = \{x \mid G'(x) = 0\}$ が成り立つ。 E の測度は 0 で, F は Lusin の性質 (N) を持つから, Z の測度は, また, 0 である。 E はいたる所稠密で, F は位相写像であるから, Z は G の定義区間において, いたる所稠密である。

る所稠密である。従つて, G は定理2の条件をみたす。

定理3. ([9], p.8) $I=[a, b]$ の任意の部分区間上で単調でない I 上の P_2 型の函数が存在する。

定理4. ([9], p.8) f は区間 I 上の P_2 型の函数とする。このとき, この導函数 f' は I 上で Riemann 可積分でない。

(証明) 辻 [13], p.211, 定理 VI.37 により, 函数 f' が Riemann 可積分するための必要十分条件は f' の連続実 $C_{f'}$ の測度が I の測度に等しい (f が I でほとんど至る所連続であること) ことである, 即ち, $\mu(C_{f'}) = b-a$ なることである。ところが $P_2 \subset PG$ で, $C_{f'} \subset \mathcal{N}$ であるから, 定理1によつて, $\mu(C_{f'}) \leq \mu(\mathcal{N}) < b-a$. 従つて, f' は I 上で Riemann 可積分でない。

定理5 ([4], p.150). Lebesgue 可積分でない導函数を持つ P_2 型の函数が存在する。

(証明) 3段階に分けて示す。

(I) a, b ($a < b$) $\in \mathbb{R}$ とする。このとき, 次の様な Pompeiu 函数 f が存在する, 即ち, $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b)$.

(証明, 略.)

(II). 区間 $I=[a, b]$ で定義された函数 f に対して, f の $[a, b]$ における全変動を $T_f(a, b)$ (T と略記する) と表す。 $a < b, \varepsilon > 0$ に対して次の様な $[a, b]$ 上で定義された Pompeiu 函数 f が存在する, 即ち, $\max\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\} < \varepsilon$ で $T_f(a, b) > 1$.

(証明) (I)により次の様な $[a, b]$ 上の Pompeiu 函数 f_1 がとれる, 即ち $f_1(a) = f_1(b) = f_1'(a) = f_1'(b) = 0$. $M := \max \{ |f_1(x)| \mid a \leq x \leq b \}$, $T_1 := T_{f_1}(a, b)$, $f_2(x) := \frac{\varepsilon}{2M} f_1(x)$ とおく. N を $N > \frac{2M}{\varepsilon T_1}$ なる自然数とし, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ を区間 $[a, b]$ の N 等分点とする. L_R を $[a, b]$ から小区間 $[x_{R-1}, x_R]$ ($R=1, 2, \dots, N$) への 1 次函数とし, $g_R(x) := f_2(L_R(x))$ とおく. このとき, g_R は $[x_{R-1}, x_R]$ 上の Pompeiu 函数で $g_R(x_{R-1}) = g_R(x_R) = g_R'(x_{R-1}) = g_R'(x_R) = 0$, また, $\max \{ |g_R(x)| \mid x_{R-1} \leq x \leq x_R \} = \max \{ |f_2(x)| \mid a \leq x \leq b \} < \varepsilon$. 従って $T_{g_R}(x_{R-1}, x_R) = \frac{\varepsilon}{2M} T_1$ 次, $f(x) := \begin{cases} 0 & : x = a \\ g_R(x) & : x_{R-1} < x \leq x_R \end{cases}$

とおくと, f は $[a, b]$ 上で定義された Pompeiu 函数で, $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, $\max \{ |f(x)| \mid a \leq x \leq b \} < \varepsilon$ で $T_f(a, b) = \sum_{R=1}^N T_{g_R}(a, b) = \frac{N T_1 \varepsilon}{2M} > 1$.

(定理 5 の証明) $a=0, b=1$ とする. $1 = x_1 > x_2 > x_3 > \dots \rightarrow 0$ なる数列をとり, 任意の n に対して, f_n を次の様な $[x_{n+1}, x_n]$ 上の Pompeiu 函数と取り, 即ち, $f_n(x_{n+1}) = f_n(x_n) = f_n'(x_{n+1}) = f_n'(x_n) = 0$ で $|f_n(x)| < x^2$ ($[x_{n+1}, x_n]$ で), 従って $T_{f_n}(x_{n+1}, x_n) > 1$.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ f_n(x) & : x_{n+1} < x \leq x_n \end{cases}$$

とおくと, f は $[0, 1]$ 上の P_2 型の函数である. 従って, f は有界変分ではない, 従って, f' は Lebesgue 可積分ではない.

3. Pompeiu 函数の作り方.

Pompeiu 函数の作り方は種々あると思はれるが, ここでは Pompeiu [11], Marcus [9] による方法を見ることにします.

$\{A_n | n=1, 2, \dots\}$ を正の数列で $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ は収斂するものとする.

$\{a_n | n=1, 2, \dots\}$ を区間 $I=[a, b]$ において稠密な数列とする. このとき級数

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - a_n)^{\frac{1}{3}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

を考える. ここで, $(x - a_n)^{\frac{1}{3}}$ は単調増加であるから, $F(x)$ も単調増加である. 今 $t = F(x)$ とおき $\tilde{a} = F(a)$, $\tilde{b} = F(b)$ とおくと, $t = F(x)$ の逆函数 $x = G(t)$ ($\tilde{a} \leq t \leq \tilde{b}$) がとれる.

次に

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

とおく. このとき, (2) の収斂する実数 x において

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\frac{(x+y - a_n)^{\frac{1}{3}} - (x - a_n)^{\frac{1}{3}}}{y}}_{(*)} \quad (2)'$$

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{(x+y - a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+y - a_n)^{\frac{1}{3}}(x - a_n)^{\frac{1}{3}} + (x - a_n)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}} \left\{ \left(\frac{x+y - a_n}{x - a_n} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x+y - a_n}{x - a_n} \right)^{\frac{1}{3}} + 1 \right\}} \end{aligned}$$

$\alpha_n = \left(\frac{x+y - a_n}{x - a_n} \right)^{\frac{1}{3}}$ とおくと, 上の式の $\{ \}$ 内 $= \alpha^2 + \alpha + 1$ と表される.

ここで, x は (2) の収斂点であるから, 十分小なる $\eta > 0$ をとると, $y \in (-\eta, \eta)$ に対して,

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \quad \text{より}$$

$$(*) = \frac{1}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}} (\alpha_n^2 + \alpha_n + 1)} \leq \frac{4}{3} \frac{1}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \frac{F(x+y)-F(x)}{y} \leq \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{2/3}}$$

よって, (2)' の級数は一様収斂で $F(x)$ は (2) が収斂する実 x において導関数 $f(x)$ を持つ。

次に, (2) が発散する点 ξ をとると, 十分大なる正の数 M に対して, 正の整数 m がとれて

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^m \frac{A_n}{(\xi-a_n)^{2/3}} > M$$

とできる。これより

$$\frac{F(\xi+y)-F(\xi)}{y} > M$$

($y \rightarrow 0$ として), この左辺は無限大となる。

次に, $t = F(x)$ の逆関数 $x = G(t)$ の導関数を $x' = g(t)$ とし, $t_m = F(a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), $\tau = F(\xi)$ とおくと, $g(t_m) = 0$, $g(\tau) = 0$ となるが, この様な τ の存在は導関数 (1 級の Baire 函数) の実性不連続性による。

ここで, $g(t)$ の有界性を示す。級数 (2) において

$$|x - a_n| \leq |b - a| \quad \therefore |x - a_n|^{2/3} \leq |b - a|^{2/3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{\sum A_n}{(b - a)^{2/3}}.$$

故に, $f(x)$ の下限は $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sum A_n}{(b - a)^{2/3}}$ であり, $g(t)$ は有界である。

また, Lebesgue の定理により, 集合 $\{x \mid F'(x) = \infty\}$ の測度は 0 である。

これらの函数の詳細な議論については [1], [2], [5], [6], [11], [12] 参照のこと。

文 献

- [1]. R. Baire : leçons sur les fonctions discontinues, Gauthier-Villars (1930)
- [2]. E. Borel : leçons sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars (1950).
- [3]. A.M. Bruckner : Differentiation of Real Functions, lecture Notes in Math. 659. Springer-Verlag. (1978).
- [4]. ——— : On derivatives with a dense set of zeros, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 10 (1965). 149—153.
- [5]. A. Denjoy : Sur les fonctions dérivées sommables, Bull. Soc. Math. France, 43 (1915) 161—248.
- [6]. ——— : Sur une propriété des fonctions dérivées, Enseignement Math. 18 (1916) 320—328.
- [7]. K.M. Garg : Theory of Differentiation, John Wiley & Sons, Inc. (1978)
- [8]. K. Kuratowski : Topology I. Academic Press, (1966)
- [9]. S. Marcus : Sur les dérivées dont les zéros forment un ensemble frontière partout dense, Rend. Circ. Mat. Palermo 2, 12 (1963) 5—40.
- [10]. I. Natanson : Theory of functions of a real variable, Ungar N. Y. (1961).
- [11]. D. Pompeiu : Sur les fonctions dérivées, Math. Ann. 63 (1906) 326—332.
- [12] S. Saks : Theory of the Integral, Monografie Mat. 7. Warszawa-Lwow (1937).
- [13]. 辻正次 : 実変数函数論, 清水書 (昭和25年).
- [14]. F. Hausdorff : Set Theory, Chelsea Publ. Company (1962).