

共分散行列に関するいくつかの検定の 仮説の下での漸近分布について

熊本大 叔養 長尾寿夫

§ 1. 序

p 次元正規分布の共分散行列 Σ に関する次の仮説検定問題を
と取り扱う。(i) 仮説 $H_1: \Sigma = \Sigma_0$ 対立仮説 $K_1: \Sigma \neq \Sigma_0$ (ii) $H_2:$
 $\Sigma = \sigma^2 I$ $K_2: \Sigma \neq \sigma^2 I$ (iii) $H_3: \Sigma = \Sigma_0$ $K_3: \Sigma \neq \Sigma_0$ (iv)
 $H_4: \Sigma_1 = \dots = \Sigma_k$ $K_4: \Sigma_i \neq \Sigma_j$ ($i \neq j$). これに対する尤度比
検定 λ としたとき, 対立仮説の下では $-2\log\lambda$ は, (i) (ii) に
対しては Sugiyama [5] (iii), (iv) は Nagao [4], [3] によって
漸近展開が求められている. その第一項は正規分布であり
仮説の下では, その分散は 0 となる. そこでその分散に不偏
推定量を代入することによって (i) ~ (iv) に対する一つの検定
が考えられる. ここではこれらの仮説の下での漸近展開を求
めることである.

§ 2. 検定統計量

$X_1, X_2, \dots, X_N$ を p 次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ からの random

sample とする。このとき (i) に対して

$$(2.1) \quad T_1 = \frac{n}{2} \text{tr} (S \Sigma_0^{-1} / n - I)^2,$$

ここで $S = \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x})(x_\alpha - \bar{x})'$, $n = N - 1$.

(ii) に対しては

$$(2.2) \quad T_2 = \frac{p^2 n}{2} \text{tr} \left\{ \frac{S}{\text{tr} S} - p^{-1} I \right\}^2$$

この検定は、別の観点より John [2], Sugiura [6] によって, locally best invariant であることが示されている。

(iii) に対しては

$$(2.3) \quad T_3 = \frac{n}{2} \text{tr} (S S_D^{-1} - I)^2,$$

ここで

$$(2.4) \quad S_D = \begin{pmatrix} S_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{gg} \end{pmatrix}$$

すなわち $g=2$ のとき $T_3 = n \text{tr} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1}$ となり Pillai 統計量と等しい。

(iv) に対しては

$$(2.5) \quad T_4 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^K n_\alpha \text{tr} \left\{ \frac{S_\alpha}{n_\alpha} \left(\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^K S_\alpha \right)^{-1} - I \right\}^2,$$

ここで $S_\alpha = \sum_{i=1}^{N_\alpha} (x_{\alpha i} - \bar{x}_\alpha)(x_{\alpha i} - \bar{x}_\alpha)'$, $n_\alpha = N_\alpha - 1$, $n = \sum_{\alpha=1}^K n_\alpha$.

§ 3. 準備

この (ii) ~ (iv) の仮説の下での漸近分布を求めよのためにいくつかの補題をのべる。まず

$$\mathcal{O} = \{A (p \times p) : A \text{ 実対称行列}\}$$

$$(3.1) \quad \mathcal{B} = \{B (p \times p) : B \text{ 実正値対称行列}\}$$

$$e^{\mathcal{O}} = \{e^A : A \in \mathcal{O}\}$$

とおく。

ここに次の関数 f を考える, $f: A (\in \mathcal{O}) \longrightarrow e^A$

を定義し

$$(3.2) \quad e^A = I + A + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

補題 1.

関数 f は 1 対 1 でかつ $\mathcal{B} = e^{\mathcal{O}}$.

上のことより実正値対称行列に対して対数が定義される。

ここで S を Wishart 分布 $W(I, n)$ としたとき, $Y = \sqrt{\frac{n}{2}} \log S/n$ の分布を考える。まず Jacobian は, Jac [1] を応用して

$$(3.3) \quad \left| \frac{\partial S}{\partial Y} \right| = (2\pi)^{p(p+1)/4} \det \left[\sqrt{\frac{2}{n}} Y \right] \prod_{i < j}^p \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j},$$

さらに $f(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ と $\lambda_i = \sqrt{\frac{2}{n}} \lambda_i(Y)$.

ここで、漸近展開に関心があるから (3.3) の後半を忽略すると

$$(3.4) \quad \prod_{i,j} \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} = 1 + \frac{1}{2}(p-1)\sqrt{\frac{2}{n}} \text{tr} Y + \frac{1}{12n} \{ (3p^2 - 6p + 2)(\text{tr} Y)^2 + p \text{tr} Y^2 \} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

ここで $|e^A| = e^{\text{tr} A}$ であることを使うと、 Y の“漸近”分布は、

$$(3.5) \quad C^* \cdot \text{etr} \left[\frac{1}{2}(n-p+1)\sqrt{\frac{2}{n}} Y - \frac{n}{2} e^{\sqrt{\frac{2}{n}} Y} \right] \left[1 + \frac{1}{2}(p-1)\sqrt{\frac{2}{n}} \text{tr} Y + \frac{1}{12n} \{ (3p^2 - 6p + 2)(\text{tr} Y)^2 + p \text{tr} Y^2 \} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right],$$

さらに

$$(3.6) \quad C^* = \left\{ \prod_{d=1}^p \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-d)\right] \right\}^{-1} \left(\frac{n}{2}\right)^{p(2n-p-1)/4} R^{-p(p-1)/4}.$$

補題 3.2.

$p(p+1)/2 \times 1$ ベクトル $(y_{11}, y_{22}, \dots, y_{pp}, g_{12}, \dots, g_{p-1,p})'$ は、 p 行 p 列共分散行列 $\Sigma^* = (\sigma_{ij}^*)$ に従って正規分布とす。 $(i,j) = a$, $(k,e) = b$, $(m,n) = c$, $(g,r) = d$, $(s,t) = e$, $(u,v) = f$ とすると

$$(3.7) \quad E y_a y_b y_c y_d = \sigma_{a,b} \sigma_{c,d} + \sigma_{a,c} \sigma_{b,d} + \sigma_{a,d} \sigma_{b,c},$$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad E_j a_j b_j c_j d_j e_j f_j &= \sigma_{a,b} (\sigma_{c,d} \sigma_{e,f} + \sigma_{c,e} \sigma_{d,f} + \sigma_{c,f} \sigma_{d,e}) \\
 &\quad + \sigma_{a,c} (\sigma_{b,d} \sigma_{e,f} + \sigma_{b,e} \sigma_{d,f} + \sigma_{b,f} \sigma_{d,e}) + \sigma_{a,d} (\sigma_{b,c} \sigma_{e,f} + \sigma_{b,e} \sigma_{c,f} \\
 &\quad + \sigma_{b,f} \sigma_{c,e}) + \sigma_{a,e} (\sigma_{b,c} \sigma_{d,f} + \sigma_{b,d} \sigma_{c,f} + \sigma_{b,f} \sigma_{c,d}) \\
 &\quad + \sigma_{a,f} (\sigma_{b,c} \sigma_{d,e} + \sigma_{b,d} \sigma_{c,e} + \sigma_{b,e} \sigma_{c,d}).
 \end{aligned}$$

補題 3.3.

A, C を $p \times p$ 行列, B, D を $q \times q$ 行列とする。行列のクロネッカー積に対して, 次のとおり。

$$(3.9) \quad (A+C) \otimes B = A \otimes B + C \otimes B,$$

$$(3.10) \quad (A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD,$$

$$(3.11) \quad |A \otimes B| = |A|^q |B|^p.$$

補題 3.4.

P_1, P_2 を $P_1 + P_2 = I$ かつ $P_1 P_2 = 0$ となる対称かつべき零行列とする。 c_1, c_2 ($c_1, c_2 \neq 0$) に対して

$$(3.12) \quad (c_1 P_1 + c_2 P_2)^{-1} = c_1^{-1} P_1 + c_2^{-1} P_2$$

4. 漸近展開

T_1 の特性関数は次であたえられる。

$$(4.1) \quad c_1(t) = c_{p,n} \int \text{etr}[(it)H] |S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \text{etr}[-\frac{1}{2}S] dS.$$

T_1 は $Y = \sqrt{\frac{2}{n}} \log S / n$ で表わすと,

$$(4.2) \quad T_1 = \text{tr} Y^2 + \sqrt{\frac{2}{n}} \text{tr} Y^3 + \frac{7}{6n} \text{tr} Y^4 + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

よって (3.5) を使って

$$(4.3) \quad c_1(t) = c^* \int \exp[(it) \text{tr} Y^2 + \sqrt{\frac{2}{n}}(it) \text{tr} Y^3 + \frac{7}{6n}(it) \text{tr} Y^4 \\ + \frac{1}{2}(n-p+1)\sqrt{\frac{2}{n}} \text{tr} Y - \frac{n}{2} \text{tr} e^{\sqrt{\frac{2}{n}}Y}] \left\{ 1 + \frac{1}{2}(p-1)\sqrt{\frac{2}{n}} \text{tr} Y \right. \\ \left. + \frac{1}{12n} \{ (3p^2 - 6p + 2)(\text{tr} Y)^2 + p \text{tr} Y^2 \} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right\} dY.$$

また

$$(4.4) \quad e^{\sqrt{\frac{2}{n}}Y} = I + \sqrt{\frac{2}{n}}Y + \frac{1}{n}Y^2 + \frac{\sqrt{2}}{3n\sqrt{n}}Y^3 + \frac{1}{6n^2}Y^4 + O(n^{-\frac{5}{2}})$$

よって

$$(4.5) \quad c_1(t) = c^* \cdot \exp[-\frac{np}{2}] \int \exp[-\frac{1}{2}(1-2it) \text{tr} Y^2] \left[1 + \sqrt{\frac{2}{n}}(it - \frac{1}{6}) \text{tr} Y^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \left\{ -\frac{1}{12}(\text{tr} Y)^2 + \frac{p}{12} \text{tr} Y^2 + \frac{1}{12}(14it-1) \text{tr} Y^4 + (it - \frac{1}{6})^2 (\text{tr} Y^3)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right\} \right] dY.$$

よって $Y \in P(p+1)/2$ 次元正規分布平均の共分散行列 $(\sigma_{ij,ke})$ にもこのとおきができる。よって $\sigma_{ij,ke} = (1-2it)^{-1} \cdot (\delta_{ik}\delta_{je} + \delta_{ik}\delta_{je})/2$ 。また $|(\sigma_{ij,ke})| = (1-2it)^{-\frac{p}{2}} 2^{-P(P+1)/2}$ であるから

$$(4.6) \quad C_1(t) = C \cdot (1-2it)^{-\frac{p}{2}} E \left[1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \left(it - \frac{1}{6} \right) \text{tr} Y^3 + \frac{1}{n} \left\{ -\frac{1}{12} (\text{tr} Y)^2 + \frac{p}{12} \text{tr} Y^2 + \frac{1}{12} (14it - 1) \text{tr} Y^4 + \left(it - \frac{1}{6} \right)^2 (\text{tr} Y^3)^2 \right\} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right],$$

ただし $\frac{p}{2} = \frac{1}{2}P(P+1)$ である

$$(4.7) \quad C = C^* (2\pi)^{\frac{1}{4}P(P+1)} 2^{-P(P+1)/4} \exp \left[-\frac{pn}{2} \right].$$

補題 3.2 より

$$(4.8) \quad E(\text{tr} Y)^2 = p(t)_1, \quad E \text{tr} Y^2 = \frac{1}{2}P(P+1)(t)_1, \\ E \text{tr} Y^4 = \frac{p}{4}(2p^2 + 5p + 5)(t)_2, \quad E(\text{tr} Y^3)^2 = \frac{3}{4}p(4p^2 + 9p + 7)(t)_3,$$

ただし $(t)_a = (1-2it)^{-a}$ 。

また奇数次元-ポントは、この場合 0 となるから、特性関数 $C_1(t)$ は次のようになる。

$$(4.9) \quad C_1(t) = (1-2it)^{-\frac{p}{2}} \left[1 + \frac{1}{n} \left\{ \frac{p}{12} (4p^2 + 9p + 7)(t)_3 - \frac{p}{8} (6p^2 + 13p + 9)(t)_2 + \frac{p}{2} (p+1)^2(t)_1 - \frac{p}{24} (2p^2 + 3p - 1) \right\} + O(n^{-2}) \right].$$

上式を反転することによって次の定理を得る。

定理4.1. 仮説の下で

$$(4.10) \quad P_r(T_1 \leq x) = P_f + \frac{1}{n} \left\{ \frac{p}{12} (4p^2 + 9p + 7) P_{f+6} - \frac{p}{8} (6p^2 + 13p + 9) \right. \\ \left. \cdot P_{f+4} + \frac{p}{2} (p+1)^2 P_{f+2} - \frac{p}{24} (2p^2 + 3p - 1) P_f \right\} + O(n^{-2}),$$

ただし $f = \frac{1}{2} p(p+1)$, $P_f = P(X_f^2 \leq x)$.

以下同じような考えによって次の結果を得る。

定理4.2. 仮説の下で

$$(4.11) \quad P_r(T_2 \leq x) = P_f + \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{12} (p^3 + 3p^2 - 8p - 12 - 200p^{-1}) P_{f+6} \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (-2p^3 - 5p^2 + 7p + 12 + 420p^{-1}) P_{f+4} + \frac{1}{4} (p^3 + 2p^2 - p - 2 \right. \\ \left. - 216p^{-1}) P_{f+2} + \frac{1}{24} (-2p^3 - 3p^2 + p + 436p^{-1}) P_f \right\} + O(n^{-2}),$$

ただし $f = \frac{1}{2} p(p+1) - 1$.

定理4.3. 仮説の下で

$$(4.12) \quad P_r(T_3 \leq x) = P_f + \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{12} (p^3 - 3p\widehat{p}_2 + 2\widehat{p}_3) P_{f+6} + \frac{1}{8} (-2p^3 + 4p\widehat{p}_1 \right. \\ \left. - 2\widehat{p}_3 - p^2 + \widehat{p}_1) P_{f+4} + \frac{1}{4} (p^3 - p\widehat{p}_1 + p^2 - \widehat{p}_2) P_{f+2} + \frac{1}{24} (-2p^3 \right. \\ \left. + 2\widehat{p}_3 - 3p^2 + 3\widehat{p}_1) P_f \right\} + O(n^{-2})$$

ただし $\widehat{p}_a = \sum_{d=1}^a p_d^a$, $f = \frac{1}{2} (p^2 - \widehat{p}_1)$.

定理 4.4. 仮定の下で

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad P_r(T_4 \leq \chi) = & P_f + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{12} \{ \hat{f} p(4p^2 + 9p + 7) - 3k^2 p(p+1)^2 \right. \\
 & - (3k-2)p(p^2 + 3p + 4) \} P_{f+6} + \frac{1}{8} \{ -\hat{f} p(6p^2 + 13p + 9) \\
 & + 4k^2 p(p+1)^2 + (2k-1)p(2p^2 + 5p + 5) \} P_{f+4} + \frac{1}{4} (2\hat{f} - k^2 - k) \\
 & \cdot p(p+1)^2 P_{f+2} + \frac{1}{24} (1 - \hat{f}) p(2p^2 + 3p - 1) P_f \left. \right] + O(n^{-2}),
 \end{aligned}$$

$$\text{with } \hat{f} = \sum_{a=1}^k \hat{f}_a^{-1}, \quad f = \frac{1}{2}(k-1)p(p+1), \quad \hat{f}_a = n_a/n.$$

参考文献

- [1] Jack, H. (1964-65). Jacobians of transformations involving orthogonal matrices. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 67 81-103.
- [2] John, S. (1971). Some optimal multivariate tests. Biometrika 58 123-127.
- [3] Nagao, H. (1970). Asymptotic expansions of some test-criteria for homogeneity of variances and covariance matrices from normal populations. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 34 153-247.
- [4] Nagao, H. (1972). Non-null distributions of the likelihood ratio criteria for independence and equality of mean vectors and covariance matrices. To appear.

- [5] Sugiura, N. (1969). Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. *Ann. Math. Statist.* 40 2051-2063.
- [6] Sugiura, N. (1971). Locally best invariant test for sphericity and the limiting distributions. Report at the meeting of the mathematical society of Japan.