

回転球殻熱対流ダイナモ — 流れ構造と磁場生成の関係 —

核融合研 荒木 圭典 (Keisuke Araki)
京大数理研 北内 英章 (Hideaki Kitauchi)
核融合研 木田 重雄 (Sigeo Kida)

1 はじめに

地球の磁場生成および反転の機構は、地球物理学のみならず、巨視的変数の物理学においても重要な、古くからある未解決の問題のひとつです。観測技術の進歩により、地磁気の歴史や地球の内部構造について、多くの情報がこれまでに蓄積されてきました。現在、地磁気の起源は、地球内部の外殻における熔融鉄を主成分とする電気伝導性流体の対流によるダイナモ作用によって、生成・維持されていると考えられています。とはいえ、現在の観測データは、地球内部における具体的な磁気生成ダイナミクスの理解にとって、未だ情報不足であるというのも事実でしょう。

それでは、この問題に対して理論物理学にはどのようなアプローチがあり、どのような寄与ができるのでしょうか。

計算機によるシミュレーションはもっとも有望なアプローチのひとつです。しかし、天体内部の物質の種類・状態等の多様性を考えると、現実には近づけようとすればするほど、多くの過程を考慮に入れなくてはなりません。それに伴って、天体中の磁場の生成・維持の機構には、数え切れないほどの多様性があると思われます。また、系の制御パラメーターも、現在の計算機的能力を越えた値になるものと考えられます。

現在、理論物理学のとりうる最も生産的なアプローチは、磁場生成や反転を引き起こすためのミニマルの条件を、なるべく単純なモデルの下に、洗い出すことだと考えます。わたしたちの目標は、現実の地球の歴史を忠実に再現することではなく、地磁気のダイナミクスの本質を理解するためのあり得べき『おはなし』を描き、そのおはなしに欠くべからざる『登場人物』と、登場人物間の『関係』を確定することにあります。

この条件を探り出すために、ここでは球殻中に閉じ込められた 1 成分 Boussinesq MHD 流体のダイナミクスを、直接数値シミュレーションによって考察します。その際に、系の境界条件や制御パラメーターの値は、現実の地球のデータを全く度外視して設定します。たとえば、ここでは半径比 0.5 の場合を取り扱いますが、これは地球の外殻領域の半径比 0.34 に比べて大きく、球殻としてはやや薄いものになりますが、ダイナミクスの『おはなし』の理解にとって本質的ではないと考えます。

わたくしたちは、ダイナモのダイナミクスの考察において、いわゆる『層流ダイナモ』を扱います。その理由は、磁場の生成および反転に対する速度場の大域的な

条件、生成した磁場と速度場の大域的な構造の関係を確定するために、基礎方程式の解、とりわけ速度場の複雑さや、それに伴う仮説の導入を避けるためです。逆に言えば、『乱流ダイナモ』では、(1) 磁場生成に寄与する流れ場の構造が、直接に扱うには複雑すぎる、(2) したがって、複雑さを避けようとするれば、何らかの『統計的』な仮説を導入せざるを得ないからです。

また、ここでは運動学的ダイナモの手法を用いた解析も行います。このとき、計算に用いる速度場は直接数値シミュレーションで得られた熱対流の解を用い、従来の運動学的ダイナモの研究に見られるような、速度場を『手で与える』ことはしません。なぜなら、速度場の構造は磁場生成の大域的な条件の考察に欠くべからざるものですが、Colioris 力の速度場の構造に対する影響は、散逸過程等とのバランスで決まるものであり、単純に『手で与える』ことはできないからです。

2 物理学的モデルについて

本研究ではミニマルモデルとして、Boussinesq 近似および MHD 近似された 1 成分電気伝導性流体の運動を考えます。考える流体は密度 ρ 、熱拡散係数 κ 、熱膨張率 α 、動粘性係数 ν 、透磁率 μ 、電気伝導度 σ の等方的な物質です。これが、共通の角速度 Ω で回転している半径 r_1 および r_2 ($r_1 < r_2$) の二つの同心球の間に入っており、球の中心に向かって重力 $\mathbf{g} = -\rho\gamma\mathbf{r}$ を受けています。内外殻はそれぞれ一定の温度に保たれており、内殻の温度が外殻の温度よりも ΔT だけ高くなっています。

したがって流体の運動方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla H + \alpha\gamma T\mathbf{r} + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u} + 2\Omega\hat{\mathbf{z}}) - \frac{1}{\rho}\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)T + \kappa\Delta T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\mathbf{b} \quad (5)$$

となります、ここで $\hat{\mathbf{z}}$ は球殻の角速度方向の単位ベクトル、 H は Bernoulli 関数

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\gamma r^2 - \frac{1}{2}\Omega^2|\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}}|^2 \quad (6)$$

です。MHD 流体の領域の外部は、透磁率 μ の絶縁体、すなわち

$$r < r_1, r > r_2 \text{ において } \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (7)$$

を仮定します。これらの方程式を境界条件

$$r = r_1, r = r_2 \text{ において } \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_{\text{MHD流体}} = \mathbf{b}_{\text{絶縁体}} \quad (8)$$

のもとに解きます。

この力学系には 5 個の制御パラメーター、半径比 $\eta = r_1/r_2$ 、Prandtl 数 $Pr = \nu/\kappa$ 、磁気 Prandtl 数 $Pm = 1/\kappa\mu\sigma$ 、Taylor 数 $Ta = (2\Omega d^2/\nu)^2$ 、Rayleigh 数 $Ra = \alpha\gamma\Delta T d^4/(\kappa\nu)$ があります。本研究では、

$$\eta = 0.5, Pr = 1, Pm = 0.1, Ta = 8000, Ra = 3200 \quad (9)$$

の場合を報告します。

数値計算は $\mathbf{u}$, $\mathbf{b}$ をトロイダル / ポロイダルのベクトル場で表現し、各『流れ関数 (defining scalar)』を r - 方向に Chebyshev 関数 T_n ($n \leq 31$)、 ϑ - および φ - 方向には球面調和関数 $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ ($l \leq 31, |m| \leq 31$) で展開します。時間方向の積分には、2 次精度の Adams-Bashforth 法と Crank-Nicolson 法を用いました。

3 計算結果 (1) 電磁流体力学近似方程式系

MHD 方程式の直接数値計算の結果、ダイナモ過程によって生じる磁場は、生成・消滅を繰り返し、磁場および運動エネルギーが定常状態に落ち着く事はありませんでした (図 1 参照)。しかし、赤道面での磁場の長時間の振舞いを見ると、準周期的な磁場の生成・消滅が繰り返されていることが判りました (図 2 参照)。

このような場の振舞は、同じパラメーターにおける熱対流のみの解¹と、定性的な性質が異なります。この両者の相違は、磁気 Prandtl 数のみの相違²ですから、現在の計算のパラメーターは、臨界磁気 Prandtl 数 Pm_c をはるかに越えて、何度目かの分岐を起こした後の状態であることが予想されます。

磁場のエネルギーの大きさは、流体の運動エネルギーの 3 割程度の値です。これは Kageyama *et al.*,³ Gratzmaier & Roberts⁴ の結果と比較して、運動エネルギーの磁気エネルギーへの転換の割合が低い解になっています。

¹ $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ と強制的において、直接数値計算によって求めた解。西向きに位相速度 -1.2 で歳差運動する定常な対流カラムが形成されます。

² 磁場の無い熱対流のみの解は、磁場が不安定化しない磁気 Prandtl 数における計算の結果とみなすことができます。

³ A. Kageyama, T. Sato and the Complexity Simulation Group, "Computer simulation of a magnetohydrodynamic dynamo. II", *Phys. Plasmas*, 2 (1995) pp.1421-1431; "Computer Has Solved A Historical Puzzle: Generation of Earth's Dipole Field", *Research Report NIFS Series*, NIFS-359.

⁴ *Nature*, vol.377 (1995) pp.203-209; *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol.91 (1995) pp.63-75.

興味深いことにこの非定常な過程において、運動エネルギーの揺らぎの振幅が、磁気エネルギーの揺らぎの振幅の半分程度であり、たがいに『逆位相』で振れていることが観察されました。この逆位相の振動の原因は、Lorentz 項を通して運動エネルギーと磁気エネルギーの間のやりとりが生じているためであると考えられます。

4 計算結果 (2) 運動学的ダイナモ方程式系

前節で述べたように、MHD 近似方程式系の解の時間発展は磁場の生成・消滅を伴う複雑な過程で、流れの構造と磁場の関係の解析は難しいものとなっています。この節では、運動学的ダイナモの手法を用いて、流れの構造と磁場の生成過程の関係を調べます。運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + Pm \nabla^2 \mathbf{b} \quad (10)$$

を直接数値シミュレーションし、最不安定モードを求めました。ここで、速度場 $\mathbf{u}$ は熱対流の定常進行渦解を、磁場 $\mathbf{b}$ の初期条件は MHD シミュレーションと同様にランダム位相のデータを低波数に入れたものを用いました。

熱対流の定常進行渦解の速度場 $\mathbf{u}$ は、南北に反転対称性、東西に 5 回対称性を持っているので、磁場の固有関数は (1) 南北の反転に対して対称、反対称、(2) 東西の波数 m に関して $m = 5n$, $m = 5n \pm 1$, $m = 5n \pm 2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の合計 6 個の対称性のカテゴリーに分離します。ここでは線形成長率の大きい、東西方向には $m = 5n \pm 2$ 、赤道面に関しては対称、反対称の両方のモードの攪乱について解析します。

運動学的ダイナモ問題の課題は『ある速度場 $\mathbf{u}$ が与えられたときに磁場 $\mathbf{b}$ の生成の強い場所を探し、 $\mathbf{b}$ が強く生成される部分の $\mathbf{u}$ の条件を求めよ』とまとめられます。ここでは、とりわけ速度場 $\mathbf{u}$ の局所的条件と磁場生成の関係について考察します。具体的には、磁場の強度分布 $|\mathbf{b}|$ と次に挙げる速度場の局所量の位置関係を考察します、

- (1) 渦度 $|\nabla \times \mathbf{u}|$ の強度分布、
- (2) 速度勾配テンソル $D_{ij} = \nabla_i u_j$ の第 1 固有値 $\lambda_1(D)$ の強度分布、
- (3) 歪み速度テンソル $S_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ の第 1 固有値 $\lambda_1(S)$ の強度分布、
- (4) 磁場の速度場に平行な成分 $|\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}|/|\mathbf{u}|$ と、垂直な成分 $|\mathbf{b} \times \mathbf{u}|/|\mathbf{u}|$ 、
- (5) 磁場の、歪み速度テンソル $S_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ の各固有ベクトル $\mathbf{e}_j$ の向きの成分 $|\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j|$ 。

図 3 は直接数値シミュレーションにより得られた、運動学的ダイナモの不安定攪乱の空間的構造です。図 3 より明らかなように、対称、反対称いずれのモードも、磁場の強い領域は局在しています。反対称解において磁場の局在している領域の対

流カラムに対する相対的な位置は、(A) サイクロンの上流側、とりわけ SP1⁵からの流線に沿う方向、(B) サイクロンと逆サイクロンのすき間、SP2, SP3 へと向かう吸い込み流れの領域。対称解において磁場の局在している領域の対流カラムに対する相対的な位置は、赤道面のサイクロンと逆サイクロンのすき間の湧き出しの部分。この両者の大域的構造が大きく異なっている原因は、両者の対称性の差、言い替えると、赤道面での解の境界条件の差に起因していると思われます。

ここでの観察結果は

- (1) 磁場の振幅の大きい部分と渦度の強い部分とは必ずしも一致しない (図 4)。
- (2) 磁場生成は、速度勾配テンソル、歪み速度テンソルの固有値の大きい部分とは必ずしも一致しない (図 5, 6)。
- (3) 磁場の振幅の大きい部分では、磁場ベクトル $\mathbf{b}$ と速度ベクトル $\mathbf{u}$ の方向が揃っている (図 7)。
- (4) 磁場の振幅の大きい部分において、磁場ベクトル $\mathbf{b}$ と歪み速度テンソルの固有ベクトルの向きの関係は、流れの上流、中流、下流へと移動するにつれて、第 1、第 2、第 3 固有ベクトルの向きと揃っている (図 8)。

したがって、運動学的ダイナモにおける磁場形成の機構は、磁場が流れに沿って移動するうちに第 1 固有ベクトルによる引き伸ばしを受けて増幅され、下流側へと流されるうちに第 2, 第 3 固有ベクトルによる収縮を受けて振幅を減らしていると考えられます。したがって、生成消滅の機構のほとんどを Lorentz 項が引き受けられていると考えられます。

5 まとめ

ここでは磁場生成の機構を、運動学的ダイナモの手法を用いて、速度場と磁場の方向の揃い方や、速度勾配テンソルや歪み速度勾配テンソルといった局所的な量を手がかりに調べました。その結果、生成される磁場の大域的な構造は、南北の対称性ごとに違うことがあきらかになりました。このことは、磁場生成が局所的な速度分布のみでは決まらないこと、すなわち解が「境界条件を知っている」ことを示しています。また、磁場生成が起こっている場合には (1) 磁場と速度場の方向がそろっており、(2) 磁場は、速度場の上流側で、速度場による伸張過程による増幅を受けていることが、対称性によらない共通の性質として観察されました。

その一方で、磁場生成の強い部分の条件は、歪み速度テンソルの第一固有値、速度勾配テンソル第一固有値といった局所的な量のみでは、うまく評価できないことも判明しました。今後の課題は、生成の強い部分の速度場の条件を確定すること、とりわけ速度場の空間構造と磁場の南北対称性との関連を明らかにすることです。

⁵SP# は $\mathbf{u}$ の淀み点の番号。詳細は H. Kitauchi, K. Araki and S. Kida, “Flow structure of thermal convection in a rotating spherical shell”, research report NIFS series, NIFS-426.

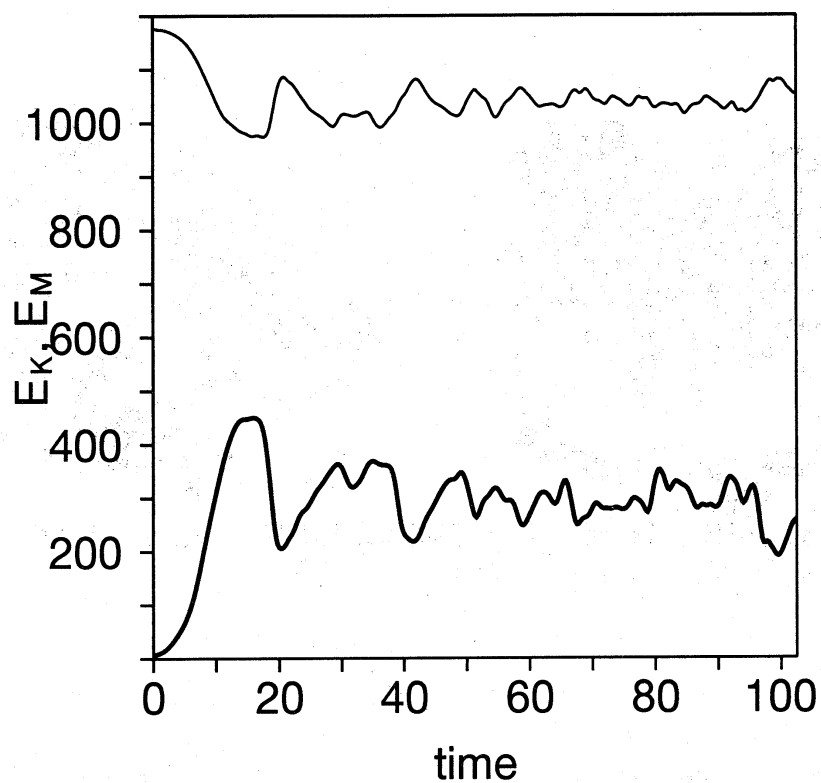


図 1: 流体の運動エネルギーと磁場のエネルギーの時間発展。
磁場のエネルギーには球殻の外のポテンシャル場の分も含まれている。

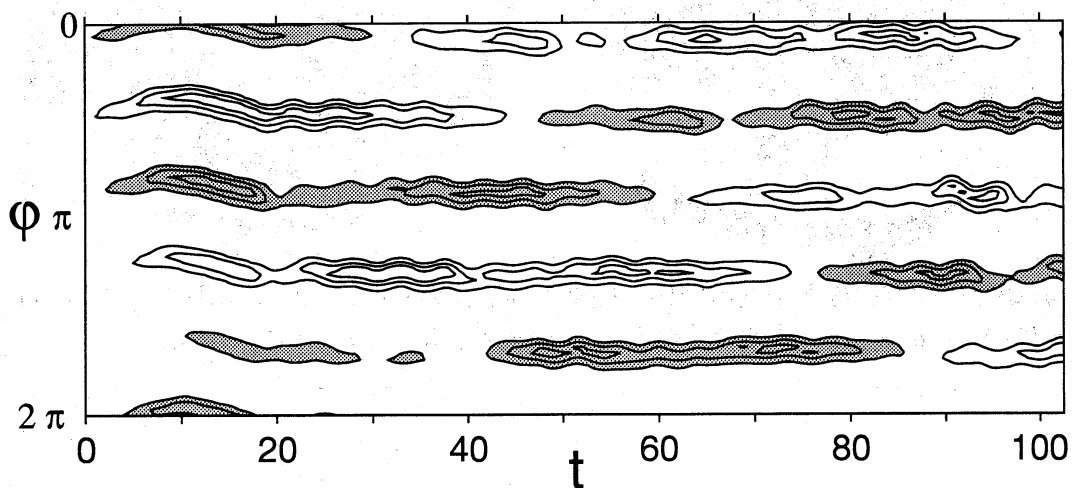


図 2: 赤道面、流体層の中央における B_θ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0$) の分布の時間発展

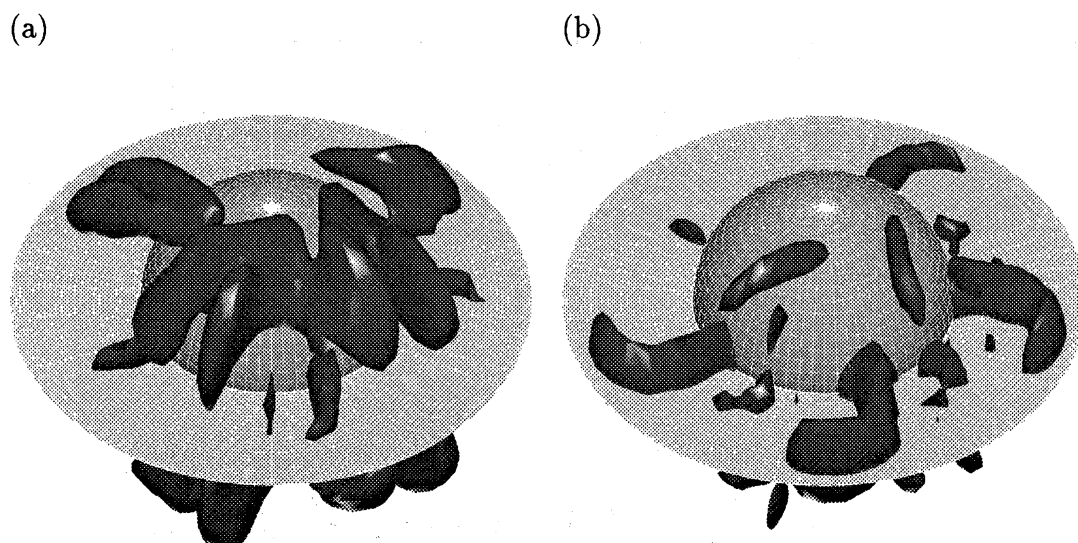


図 3: 磁場の固有関数の等値面。磁場の振幅は最大値が 1 になるように規格化した。
(a) 反対称モード $|b| = 0.3$, (b) 対称モード $|b| = 0.15$.

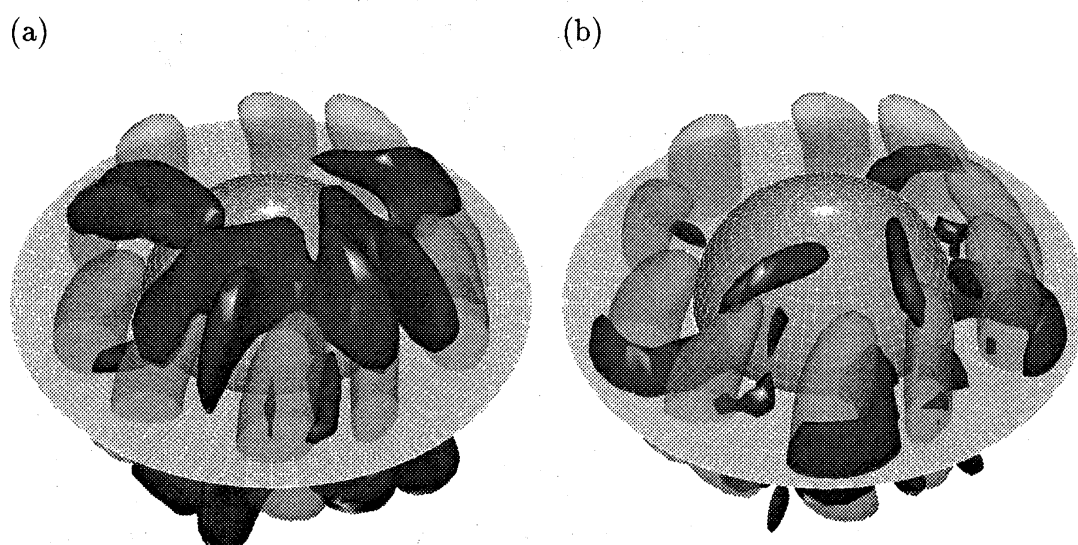


図 4: 磁場の固有関数と渦度の関係。磁場の等値面のレベルは図 3 に同じ。渦度のレベルは $|\nabla \times \mathbf{u}| = 52$ 。渦度の等値面のうち境界近傍の部分は除いてある。

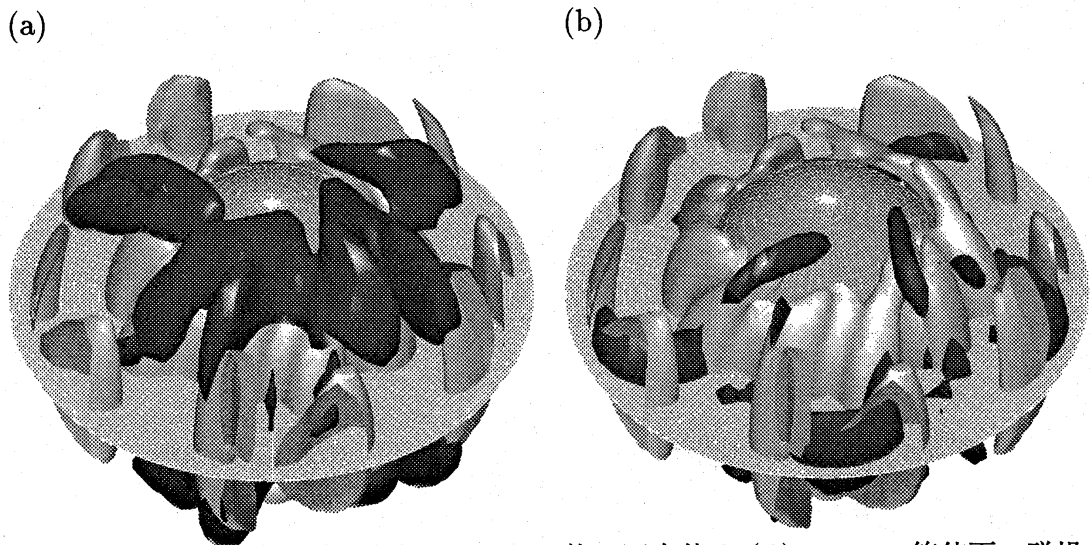


図 5: 磁場の固有関数と歪み速度テンソルの第一固有値 $\lambda_1(S) = 1.5$ の等値面。磁場の等値面のレベルは図 3 に同じ。固有値の等値面のうち境界近傍の部分は除いてある。

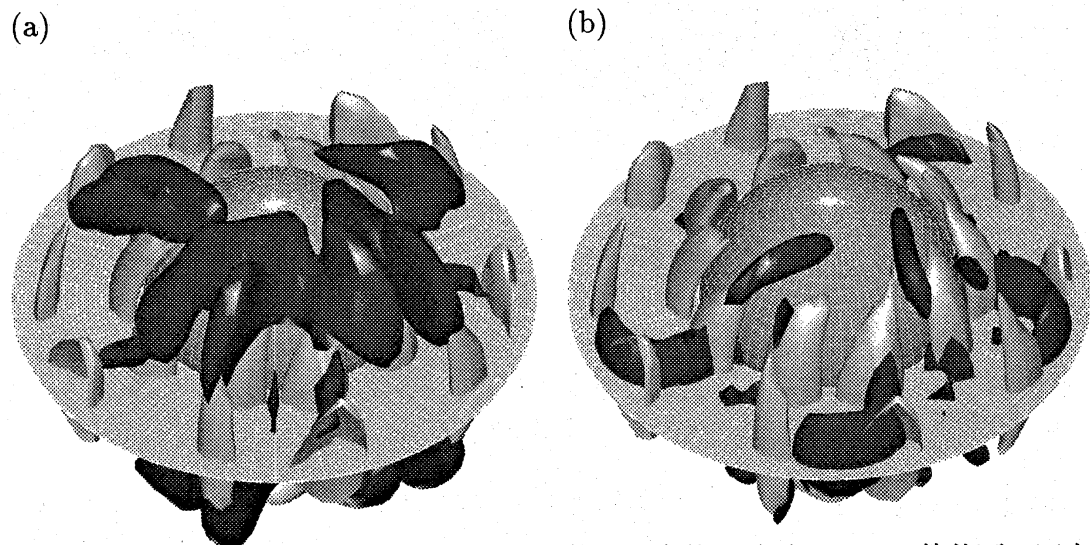
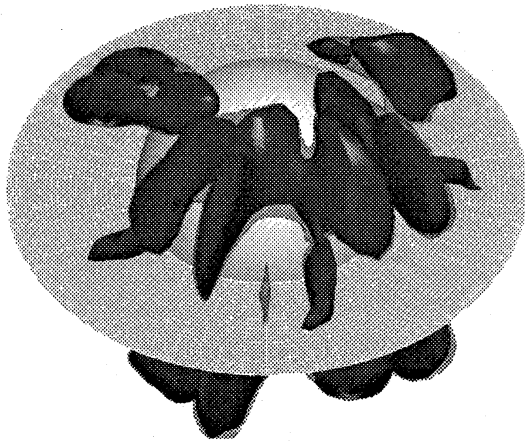
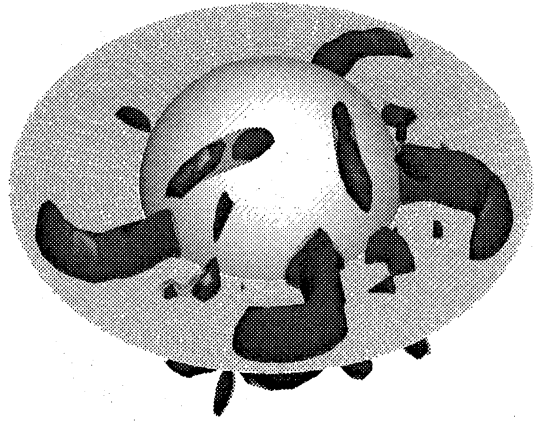


図 6: 磁場の固有関数と速度勾配テンソルの第一固有値 $\lambda_1(D) = 1.5$ の等値面。固有値の等値面のうち境界近傍の部分は除いてある。

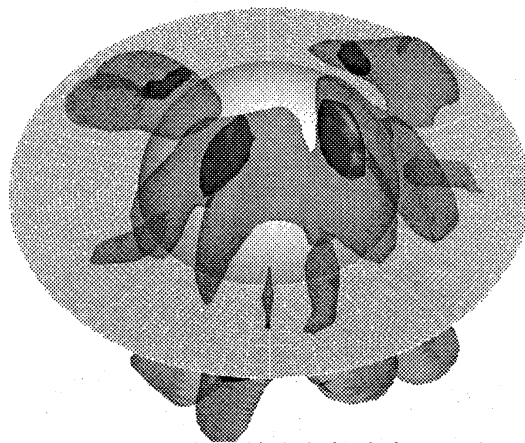
(a1)



(s1)



(a2)



(s2)

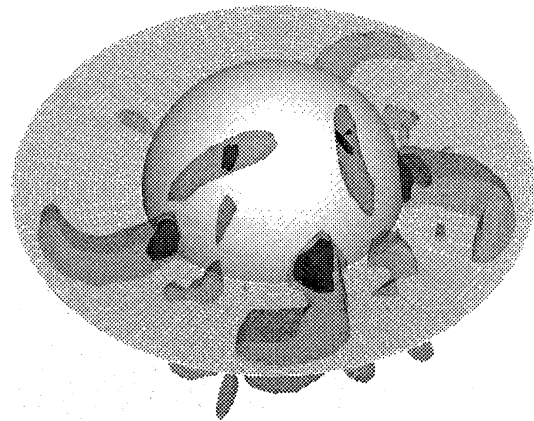
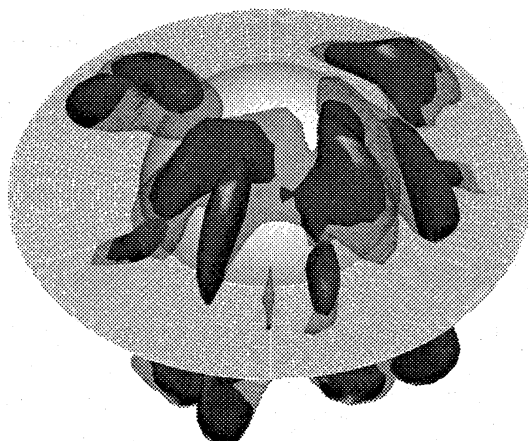


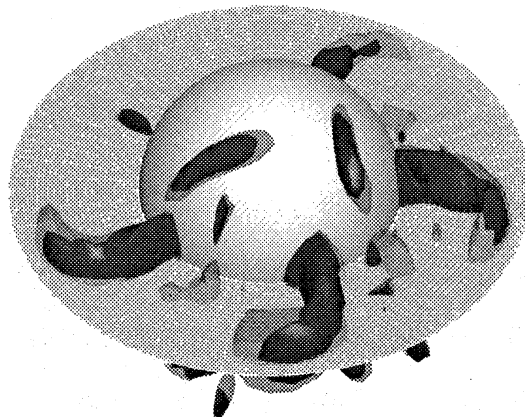
図 7: 磁場の固有関数 $|b|$ と速度ベクトル u の関係。 $|b|$ と $(b, u)/|u|$, $|b \times u|/|u|$ の等値面を同じ閾値で描いたもの。等値面のレベルは図 3 に同じ。図の番号で a(s) は反対称 (対称) モード、1 (2) は内積 (外積)。

次頁 図 8: 磁場の固有関数 $|b|$ と歪み速度テンソル S_{ij} の固有ベクトル e_j ($j=1, 2, 3$ は固有値の大きさの順番を示す) の関係。 $|b|$ と (b, e_j) の等値面を同じ閾値で描いたもの。等値面のレベルは図 3 に同じ。図の番号の a(s) は反対称 (対称) モードを、1, 2, 3 は固有値の番号を表している。

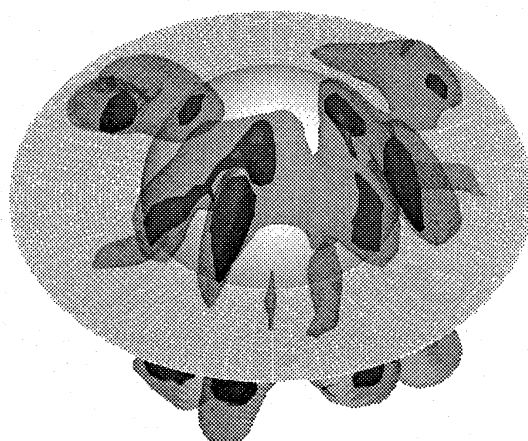
(a1)



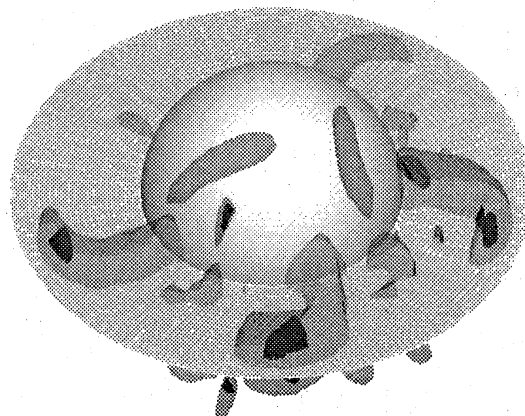
(s1)



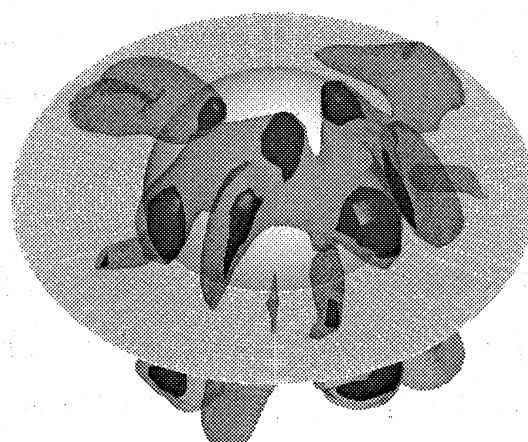
(a2)



(s2)



(a3)



(s3)

