

Porous Media 中の一次元圧縮性流の漸近挙動について

早稲田大理工 西川雅堂 (MASATAKA NISHIKAWA)
WASEDA UNIVERSITY

1. Introduction.

本論文は西原健二教授 (早稲田大政経) との共同研究 [7] に基づいています. Porous Media 中の一次元圧縮性流の Lagrange 座標で書かれた方程式系は

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ u_t + p(v, s)_x = -\alpha u, \\ \{e(v, s) + \frac{1}{2}u^2\}_t + (pu)_x = -\alpha u^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

で記述される. ここに, v : 比体積, u : 速度, s : エントロピーであり, p : 圧力は滑らかで $p(v, s) > 0$, $p_v(v, s) < 0$ ($v > 0$) を満たすものとする. p の典型例は $p(v, s) = (\gamma - 1)v^{-\gamma}e^s$ ($\gamma > 1$: 断熱定数) である. また, α は正定数であり, $e(v, s)$ は, 内部エネルギーで熱力学の第二法則から $e_s \neq 0$, $e_v + p = 0$ を満たす. このことから滑らかな解に対しては

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ u_t + p(v, s)_x = -\alpha u, \\ s_t = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

と同値であることがわかる. $v_{\pm} > 0, u_{\pm}, s_{\pm}$ を与えられた定数とし, $t = 0$ で初期値

$$(v, u, s)(0, x) = (v_0, u_0, s_0)(x) \rightarrow (v_{\pm}, u_{\pm}, s_{\pm}), \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \quad (1.3)$$

を満たす初期値問題の解の漸近挙動について考察する.

この方面の関連した結果を述べよう. Hsiao-Liu[1] により等エントロピー即ち $s(t, x) \equiv$ 定数であるとき, (1.2), (1.3) の解 $(v, u)(t, x)$ は Darcy's Law から得られる放物型方程式

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \tilde{u}_x = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ p(\tilde{v})_x = -\alpha \tilde{u}, \end{cases} \quad (1.4)$$

の解 $(\tilde{v}, \tilde{u})(t, x)$ に漸近することを示された. $v_+ \neq v_-$ ならば (1.4) は自己相似解 $\tilde{v}(t, x) = v^*(\frac{x+x_0}{\sqrt{t+1}})$ を持つ. 但し, x_0 はシフトである. (1.2) の第二式から $u(t, x) \rightarrow u_{\pm}$ ($x \rightarrow \pm\infty$) が期待されるが今 $\tilde{u}(t, x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) であるため gap が生じてくる. そこで Hsiao-Liu[1] は x_0 の決め方も含め次の補助関数 $(\hat{v}, \hat{u})$ を導入することで定式化している.

$$\begin{cases} \hat{v}_t - \hat{u}_x = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ \hat{u}_t = -\alpha \hat{u}, \\ (\hat{v}, \hat{u})(t, \pm\infty) = (0, e^{-\alpha t} u_{\pm}), \end{cases} \quad (1.5)$$

$$(\hat{v}, \hat{u})(t, x) = \left\{ \frac{u_+ - u_-}{-\alpha} e^{-\alpha t} m_0(x), e^{-\alpha t} \left(u_- + (u_+ - u_-) \int_{-\infty}^x m_0(y) dy \right) \right\}, \quad (1.6)$$

(但し, $m_0(x)$ は support compact な台を持ち, $\int_R m_0(x) dx = 1$ を満たす滑らかな関数とする.) とおくと, (1.2), (1.4), (1.5) から,

$$\begin{cases} (v - \bar{v} - \hat{v})_t - (u - \bar{u} - \hat{u})_x = 0, \\ (u - \bar{u} - \hat{u})_t + \{p(v) - p(\bar{v})\}_x = -\alpha(u - \bar{u} - \hat{u}) - \hat{u}_t, \end{cases} \quad (1.7)$$

が得られる. 第一式の保存則の性質から

$$\int_R (v - \bar{v} - \hat{v})(t, x) dx = \int_R (v_0(x) - v^*(x + x_0) - \hat{v}(0, x)) dx, \quad (1.8)$$

がわかる. そこで x_0 を

$$\int_R (v_0(x) - v^*(x + x_0)) dx = -\frac{u_+ - u_-}{-\alpha}, \quad (1.9)$$

を満たすように定義し, Perturbation (V, z) を

$$(V, z)(t, x) = \left(\int_{-\infty}^x (v - \bar{v} - \hat{v})(t, y) dy, (u - \bar{u} - \hat{u})(t, x) \right), \quad (1.10)$$

とおくと, (1.7) は第一式を一回積分することにより次に書きかえることができる:

$$\begin{cases} V_t - z = 0, \\ z_t + \{p(V_x + \bar{v} + \hat{v}) - p(\bar{v})\}_x + \alpha z = -\bar{u}_t, \end{cases} \quad (1.11)$$

即ち, Damping の付いた 2 階準線型波動方程式

$$\begin{cases} V_{tt} + \{p(V_x + \bar{v} + \hat{v}) - p(\bar{v})\}_x + \alpha V_t = -\bar{u}_t, \\ (V, V_t)(0, x) = (V_0, z_0)(x) := \left(\int_{-\infty}^x \{v_0(y) - \bar{v}(0, y)\} dy, u_0(x) - \bar{u}(0, x) \right), \end{cases} \quad (1.12)$$

と同値になる. つまり $(\hat{v}, \hat{u})(t, x) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) は明らかだから $(v - \bar{v}, u - \bar{u})(t, x) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を示すことは $(V_x, z)(t, x) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を示すことと同値である. Hsiao-Liu[1] は Initial perturbation が $\|(V_0, z_0)\|_{H^3 \times H^2} \ll 1$ の意味で十分小さく, さらに $|(v_+ - v_-, u_+ - u_-)| \ll 1$ であれば $(V_x, z)(t, x) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) (=安定性) であることを示し, さらにその漸近の rate $\|(V_x, z)\|_{L^\infty \cap L^2} = O(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}})$ を得ている. 解が $t \rightarrow \infty$ の時放物型の性質を持つことから上のような rate では不十分であると思われるのだがこの点については Nishihara[2] により解決されている.

等エントロピーでない場合も同様に定式化することができる. 今 (1.6) で定義される関数は指数的に減衰する良い関数なので始めから $u_+ = u_- = 0$ として簡単化すると, (1.12) の代わりに

$$\begin{cases} V_{tt} + \{p(V_x + \tilde{v}, s_0) - p(\tilde{v}, s_0)\}_x + \alpha V_t = -\tilde{u}_t, \\ (V, V_t)(0, x) = (V_0, z_0)(x) := \left(\int_{-\infty}^x \{v_0(y) - \tilde{v}(0, y)\} dy, u_0(x) - \tilde{u}(0, x) \right), \end{cases} \quad (1.13)$$

となる. 但し, この場合 $(\tilde{v}, \tilde{u})(t, x)$ はエントロピーの影響があるため

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \tilde{u}_x = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ p(\tilde{v}, s_0)_x = -\alpha \tilde{u}, \\ \tilde{v}(0, x) = \tilde{v}_0(x) \rightarrow v_{\pm}, \end{cases} \quad (1.14)$$

つまり

$$\begin{cases} \tilde{v}_t + p(\tilde{v}, s_0)_{xx} = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ \tilde{v}(0, x) = \tilde{v}_0(x) \rightarrow v_{\pm} \\ \tilde{u} = -\frac{1}{\alpha} p(\tilde{v}, s_0)_x, \end{cases} \quad (1.15)$$

の解である. 安定性については, $s_+ = s_-, v_+ = v_-$ の時は Hsiao-Serre[3],[4] により, $s_+ = s_-, v_+ \neq v_-$ の時は Hsiao-Luo[5] により得られている. しかし漸近の rate についてはまだ得られていなかった. 本論文では特に $s_+ = s_-, v_+ = v_-$ の時の rate について考察する. なお, $s_+ = s_-, v_+ \neq v_-$ の場合は最近 Marcati-Pan[6] により考察され, さらにその中で $s_+ \neq s_-$ の場合についても $p(v_+, s_+) = p(v_-, s_-)$ という仮定の下で考察されている.

Hsiao-Serre[3] で示されているように $s_+ = s_-, v_+ = v_-$ の時, 放物型方程式 (1.15) の解は等エントロピーの場合と異なり自己相似解ではなく,

$$p(\bar{v}(x), s_0(x)) = p(\underline{v}, \underline{s}), \quad (1.16)$$

で定義される定常解 $(\bar{v}(x), 0)$ を持つ. 典型例では $\bar{v}(x) = e^{\frac{1}{\gamma}(s_0(x) - \underline{s})} \underline{v}$ で与えられる. (1.15) の解は $(\bar{v}(x), 0)$ からの Initial perturbation が十分小さければ安定であることが言えるため結果として (1.2), (1.3) の解は (1.15) の非定常解を経由して,

$$(v, u)(t, x) \rightarrow (\bar{v}, \bar{u})(t, x) \rightarrow (\bar{v}(x), 0) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

となることがわかる. そこで漸近の rate を Parabolic part $(\bar{v}, \bar{u})(t, x) \rightarrow (\bar{v}(x), 0)$ ($t \rightarrow \infty$) と Hyperbolic part $(v, u)(t, x) \rightarrow (\bar{v}, \bar{u})$ ($t \rightarrow \infty$) に分けそれぞれについて求めることにより得たいと思う.

2. Parabolic part. この章では, $\bar{v}(t, x)$ が $t \rightarrow \infty$ の時 $\bar{v}(x)$ に漸近することを示そう. 結果を先に述べる.

Proposition 1 (Asymptotic property of $\tilde{v}$).

$p(v, s)$ は滑らかな関数で $p > 0, p_v < 0$ ($v > 0$) を満たすものとする. もし, $(\tilde{v}_0 - \bar{v}, s_0 - \underline{s}) \in H^6(R) \times H^6(R)$ で十分小さければ (1.15) の大域解が存在し, 次を満たす.

$$\begin{aligned} \partial_t^i(\tilde{v} - \bar{v}) &\in C([0, \infty); H^{6-2i}(R)), \partial_t^j q_x \in C([0, \infty); H^{5-2j}(R)), \\ q_{tttx} &\in L^2(0, \infty; L^2(R)), \end{aligned}$$

但し, $q = p(\bar{v}, s) - p(\tilde{v}, s)$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2$ とする. さらに, $(\tilde{v}_0 - \bar{v}, s_0 - \underline{s}) \in L^1(R) \times L^1(R)$ であれば,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{v}(t, \cdot) - (\bar{v}(\cdot) + \bar{\theta}_0(t, \cdot))\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}, \\ \|(\tilde{v} - \bar{\theta}_0)_t(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-2}, \\ \|(\tilde{v} - \bar{\theta}_0)_{tt}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-\frac{11}{4}}, \\ \|\tilde{v}(t, \cdot) - (\bar{v}(\cdot) + \bar{\theta}_0(t, \cdot))\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}, \\ \|(\tilde{v} - \bar{\theta}_0)_t(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{7}{4}}, \\ \|(\tilde{v} - \bar{\theta}_0)_{tt}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{5}{2}}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

を満たす. ここに, $\bar{\theta}_0$ は *asymptotic profile* で

$$\bar{\theta}_0(t, x) = \frac{-p_v(\underline{v}, \underline{s})}{-p_v(\bar{v}, s)} \int_R G(t, x-y) \{\tilde{v}_0(y) - \bar{v}(y)\} dy, \quad (2.2)$$

$G(t, x) : v_t + p_v(\underline{v}, \underline{s})v_{xx} = 0$ の *Green function*,

と定義する.

Proposition 1 を使えば $\tilde{u} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) も言える.

$$\tilde{u} - 0 = -p(\tilde{v}, s_0)_x = q_x \quad (2.3)$$

より,

Proposition 2.

Proposition 1 と同じ仮定の下, 次が成立する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(\tilde{u} - \bar{q}_{0x})(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}} \log(2+t), \\ \|(\tilde{u} - \bar{q}_{0x})(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{5}{4}}. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

但し, $\bar{q}_0$ は次で定義される.

$$\bar{q}_0(t, x) = -p_v(\underline{v}, \underline{s}) \int_R G(t, x-y) \{\tilde{v}_0(y) - \bar{v}(y)\} dy. \quad (2.5)$$

証明の概要を述べよう. perturbation θ を

$$\theta(t, x) := \tilde{v}(t, x) - \bar{v}(x) \quad (2.6)$$

とおくと, (1.15) は

$$\begin{cases} \theta_t = q(\theta, x)_{xx} \\ \theta(0, x) = \theta_0(x) \equiv \bar{v}_0(x) - \bar{v}(x), \end{cases} \quad (2.7)$$

但し, $q(\theta, x) \equiv p(\bar{v}(x), s(x)) - p(\theta + \bar{v}(x), s(x))$ と書きなおすことができる. (2.7) の大域解の存在は解空間

$$X(0, T) = \left\{ \theta \left| \begin{array}{l} \partial_t^i \in C^0([0, T]; H^{6-2i}(R)) (i = 0, 1, 2, 3), \\ \partial_t^j q_x \in L^2(0, T; H^{5-2j}(R)) (j = 0, 1, 2), \\ q_{tttx} \in L^2(0, T; L^2(R)) \end{array} \right. \right\} \quad (2.9)$$

での局所解の存在を示し, A priori estimate を用いてその解を延長する方法をとる. 局所解の存在は standard な方法で示すことができるので, ここでは A priori estimate について見てみよう.

$$N(T) := \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \sum_{k=0}^3 (1+t)^k \|\partial_t^k \theta(t)\|_{L^2} + \sum_{k=0}^2 (1+t)^{k+\frac{1}{2}} \|\partial_t^k q_x(t)\|_{L^2} \right\} \leq \varepsilon. \quad (2.10)$$

と定義すると次が得られる.

Proposition 3. θ を $X(0, T)$ に属する局所解とする. $N(T) \leq \varepsilon$ を十分小さくとると次が成立する.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^3 (1+t)^{2k} \|\partial_t^k \theta(t)\|_{L^2}^2 + \sum_{k=0}^2 (1+t)^{2k+1} \|\partial_t^k q_x(t)\|_{L^2}^2 \\ & + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^3 (1+\tau)^{2k-1} \|\partial_t^k \theta(\tau)\|_{L^2}^2 + \sum_{k=0}^2 (1+\tau)^{2k} \|\partial_t^k q_x(\tau)\|_{L^2}^2 \right) d\tau \\ & \leq C \|(\theta_0(\cdot), s_0(\cdot) - \underline{s})\|_{H^6}^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

証明はエネルギー法を使えば良い. Proposition 3 と Sobolev の不等式を使えば

$$\sup_R |\theta| \leq C \sup_R |q| \leq C \|q(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|q_x(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leq C \|\theta(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|q_x(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}}, \quad (2.12)$$

となり, 減衰の rate は得ることはできる. 同様に $\|(\theta_t, \theta_{tt})(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{5}{4}}, t^{-\frac{9}{4}})$ も得られる. ここからはさらに $(\theta, s_0 - \underline{s}) \in L^1(R) \times L^1(R)$ を仮定して (2.1) の評価を導こう. 証明は次の 3-step に分けて行う.

(i) (2.7) の線型化方程式

$$\begin{cases} \bar{\theta}_t = (a(x)\bar{\theta})_{xx} \\ \bar{\theta}(0, x) = \theta_0(x) \equiv \bar{v}_0(x) - \bar{v}(x), \end{cases} \quad (2.13)$$

(但し, $a(x) = -p_v(\bar{v}(x), s_0(x))$) の L^2 -評価を導く.

- (ii) $(\theta_0, s_0 - \underline{s}) \in L^1(R) \times L^1(R)$ の仮定の下で, $\bar{\theta} - \bar{\theta}_0$ の L^∞ -評価及び L^2 -評価を導く.
 (iii) $\theta - \bar{\theta}_0 = (\theta - \bar{\theta}) + (\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)$ より $\theta - \bar{\theta} (=:\Theta)$ の方程式

$$\begin{cases} \Theta_t = (a(x)\Theta)_{xx} + O(\theta^2)_x \\ \Theta|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

の L^∞ -評価及び L^2 -評価を導く.

ここでは (ii) のみ簡単に説明する. (2.13) から $a(x) \rightarrow \underline{a}$ ($x \rightarrow \pm\infty$) に注意すると

$$\bar{\theta}_t = \underline{a}\bar{\theta}_{xx} + \{(a(x) - \underline{a})\bar{\theta}\}_{xx}, \quad (2.15)$$

がわかるので Green function を用いれば

$$\bar{\theta}(t, x) = \int_R G(t, x - y)\theta_0(y)dy + \int_0^t \int_R G(t - \tau, x - y)\{(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}(\tau, y)\}_{yy}dyd\tau, \quad (2.16)$$

と表わすことができる. 部分積分により

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{t}{2}}^t \int_R G \cdot \{(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}(\tau, y)\}_{yy}dyd\tau \\ &= -\frac{1}{\underline{a}}(a(x) - \underline{a})\bar{\theta}(t, x) + \frac{1}{\underline{a}} \int_R G\left(\frac{t}{2}, x - y\right) (a(y) - \underline{a})\bar{\theta}\left(\frac{t}{2}, y\right) dy \\ &+ \frac{1}{\underline{a}} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_R G \cdot (a(y) - \underline{a})\bar{\theta}_\tau(\tau, y)dyd\tau, \end{aligned} \quad (2.17)$$

であるから (2.16) は $\bar{\theta}_0$ の定義 (2.2) を用いると

$$\begin{aligned} (\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)(t, x) &= \frac{1}{a(x)} \int_R G\left(\frac{t}{2}, x - y\right) (a(y) - \underline{a})\bar{\theta}\left(\frac{t}{2}, y\right) dy \\ &+ \frac{\underline{a}}{a(x)} \int_0^{\frac{t}{2}} \int_R G_{yy}(t - \tau, x - y)(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}(\tau, y)dyd\tau \\ &+ \frac{1}{a(x)} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_R G(t - \tau, x - y)(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}_\tau(\tau, y)dyd\tau. \end{aligned} \quad (2.18)$$

に帰着される. (i) で評価されるべき (2.12) と同様の評価

$$\|(\bar{\theta}, \bar{\theta}_t, \bar{\theta}_{tt})(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{1}{4}}, t^{-\frac{5}{4}}, t^{-\frac{9}{4}})$$

と Hausdorff-Young の不等式などを (2.18) の右辺に適用すれば (2.1) と同様の評価

$$\|(\bar{\theta} - \bar{\theta}_0, (\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)_t, (\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)_{tt})(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-1}, t^{-2}, t^{-\frac{11}{4}}) \quad (2.19)$$

を得ることができる. これと (ii) と同様の方法で示される (iii) の評価

$$\|(\Theta, \Theta_t, \Theta_{tt})(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-1}, t^{-2}, t^{-\frac{11}{4}}) \quad (2.20)$$

を合わせれば (2.1) を導くことができる. L^2 -評価も同様. 又, $\tilde{u}$ についての Proposition 2 も $\tilde{u} = q_x$ で q の満たす方程式 $q_t = -p_v(\theta + \bar{v}, s_0)q_{xx}$ から (2.15) と同様の変形をして評価す

3. Hyperbolic part. (1.13) の線型化すると

$$\begin{cases} V_{tt} + \{p_v(\tilde{v}, s_0)V_x\}_x + \alpha V_t = -q_{xt} + F_x, \\ (V, V_t)(0, x) = (V_0, z_0)(x) := \left(\int_{-\infty}^x \{v_0(y) - \tilde{v}_0(y)\} dy, u_0(x) - \tilde{u}(0, x) \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

が得られる. ここで, $F = -\{p(V_x + \tilde{v}, s_0) - p(\tilde{v}, s_0) - p_v(\tilde{v}, s_0)V_x\}$ とおいた. 但し, $\tilde{v}_0(x)$ は

$$\int_R \{v_0(x) - \tilde{v}_0(x)\} dx = 0 \quad (3.2)$$

を満たすようここで決める. 大域解の存在及び減衰の rate も §2 の parabolic part の場合と同様エネルギー法と解表示を使うことによって得られる. 結果だけ簡単に述べておこう.

Proposition 4.

$v_0 - \tilde{v}(0, x) \in L^1(R)$ とする. Proposition 1 の仮定の下, もし $(V_0, z_0) \in H^3(R) \times H^2(R)$ が十分小さければ (3.1) の大域解が存在し, さらに $(V_0, z_0) \in L^1(R) \times L^1(R)$ を仮定すれば

$$\begin{cases} \|(V_x, z)(t)\|_{L^\infty} = O(t^{-1}, t^{-\frac{3}{2}}) \\ \|(V_x, z)(t)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{3}{4}}, t^{-\frac{5}{4}}), \end{cases} \quad (3.3)$$

が成立する.

Remark 1. Proposition 1 で仮定されている $(\tilde{v}_0 - \bar{v}, s_0 - \underline{s}) \in H^6(R) \times H^6(R)$ は

$$V_t - (-p_v(\underline{v}, \underline{s}))V_{xx} = p(\tilde{v}, s)_{xt} - (F_x + V_{tt}) - \{(p_v(\tilde{v}, s) - p_v(\underline{v}, \underline{s}))V_x\}_x \quad (3.4)$$

に注意して解表示による評価をするときに, $\|z(t)\|_{L^\infty}$ を評価の際に必要な $\|z(t)\|_{L^2}$ の評価を導くために必要である.

4. Main Theorem. Proposition 1 と Proposition 3 から

$$\begin{aligned} \|v(t, \cdot) - (\bar{v}(\cdot) + \bar{\theta}_0(t, \cdot))\|_{L^\infty} &\leq \|v(t, \cdot) - \tilde{v}(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\tilde{v}(t, \cdot) - (\bar{v}(\cdot) + \bar{\theta}_0(t, \cdot))\|_{L^\infty} \\ &= \|V_x(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|(\theta - \bar{\theta}_0)(t, \cdot)\|_{L^\infty} \\ &\leq C(1+t)^{-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

を得ることができる. 同様に L^2 -評価, $\tilde{u}$ の評価を導くと次が得られる.

Theorem 3.

$$\begin{cases} \|v(t, \cdot) - (\bar{v}(\cdot) + \bar{\theta}_0(t, \cdot))\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}, \\ \|u(t, \cdot) - \bar{q}_{0x}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}} \log(2+t), \\ \|v(t, \cdot) - (\bar{v}(\cdot) + \bar{\theta}_0(t, \cdot))\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}}, \\ \|u(t, \cdot) - \bar{q}_{0x}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{5}{4}}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Remark 2. 偶然にも $\int_R (v_0 - \bar{v})(x) dx = 0$ が成立していたとするならば, $(V, z)(t, x) = \left(\int_{-\infty}^x (v(t, y) - \bar{v}(y)) dy, (u - \bar{u})(t, x) \right)$ と置くことができ問題は少し簡単になる. (1.11) は

$$\begin{cases} V_t - z = 0, \\ z_t + \{p(V_x + \bar{v}, s) - p(\bar{v}, s)\}_x + z = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

となり (4.2) で例えば第一式の代わりに $\|v(t, \cdot) - \bar{v}(\cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-1})$ が得ることができる.

REFERENCES

- [1] L. Hsiao and T-P. Liu, *Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping*, Commun. Math. Phys. **143** (1992), pp. 599-605.
- [2] K. Nishihara, *Convergence rates to nonlinear diffusion waves for solutions of system of hyperbolic conservation laws with damping*, J. Differential Equations **131** (1996), pp. 171-188.
- [3] L. Hsiao and D. Serre, *Large-time behavior of solutions for the system of compressible adiabatic flow through porous media*, Chin. Ann. Math. **16B** (1995), pp. 431-444.
- [4] L. Hsiao and D. Serre, *Global existence of solutions for the system of compressible adiabatic flow through porous media*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), pp. 70-77.
- [5] L. Hsiao and T. Luo, *Nonlinear diffusive phenomena of solutions for the system of compressible adiabatic flow through porous media*, J. Differential Equations **125** (1996), pp. 329-365.
- [6] P. Marcati and R. Pan, *On the diffusive profiles for the system of compressible adiabatic flow through porous media (pre-print)*.
- [7] M. Nishikawa and K. Nishihara, *Asymptotic behavior of solutions to the System of Compressible Adiabatic Flow through Porous Media*, SIAM J. Math. Anal. (to appear).